
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01219094 8

COURS
D'ANALYSE MATHÉMATIQUE


COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR

ÉDOUARD GOURSAT
Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

CINQUIÈME ÉDITION

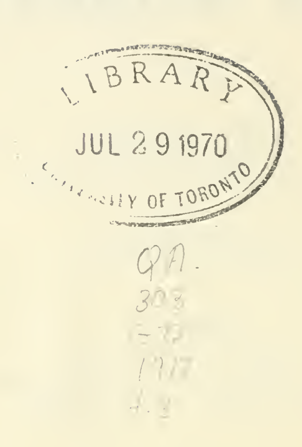
TOME III

INTÉGRALES INFINIMENT VOISINES
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE
ÉQUATIONS INTÉGRALES. CALCUL DES VARIATIONS



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins

1956
Nouveau tirage


LIBRARY
JUL 29 1970
UNIVERSITY OF TORONTO
QA.

COURS

D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

CHAPITRE XXIII.

INTÉGRALES INFINIMENT VOISINES.

L'étude des fonctions définies par une équation différentielle, dans tout leur domaine d'existence, est un problème dont la solution complète, dans le cas général, dépasse actuellement la puissance de l'analyse. On a cependant obtenu des résultats du plus haut intérêt en se limitant à l'étude des intégrales infiniment voisines d'une intégrale connue. C'est ainsi que, dans ses mémorables travaux sur le *Problème des trois corps* (¹), H. Poincaré a pu démontrer l'existence d'une infinité de solutions périodiques et de solutions asymptotiques à une solution périodique. La recherche des solutions infiniment voisines d'une solution connue l'a conduit à un système d'équations différentielles linéaires qu'il appelle *équations aux variations*; le système analogue pour les équations aux dérivées partielles avait déjà été considéré par G. Darboux (²) sous le nom de *système auxiliaire*. Les résultats de H. Poincaré

(¹) *Acta mathematica*, t. XIII, 1890; *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I et III.

(²) *Comptes rendus*, t. XCVI, 19 mars 1883, p. 766; Note XI du Tome IV des *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, p. 505-516. Dans un Mémoire du Tome XXIII des *Annales de l'École Normale* (3ᵉ série, 1906), j'ai étendu le théorème fondamental de H. Poincaré à certains systèmes d'équations aux dérivées partielles.

ont été utilisés depuis lors par M. Painlevé ([1]) et quelques autres mathématiciens dans un problème d'analyse pure, la formation des équations différentielles à points critiques fixes.

Nous démontrons dans ce Chapitre le théorème fondamental de H. Poincaré, après avoir étudié les intégrales d'un système d'équations différentielles, considérées comme fonctions des valeurs initiales. Cette étude a déjà été faite (II, n° 388), dans le cas où les seconds membres sont des fonctions analytiques. Nous la reprenons dans le cas général, au moyen de la méthode des approximations successives de M. Picard, qui conduit très simplement au but, en exigeant le maximum d'hypothèses.

I. — ÉQUATIONS AUX VARIATIONS

437. **Compléments sur les équations linéaires.** — Nous allons d'abord présenter quelques remarques sur l'application de la méthode de M. Picard aux équations linéaires. Considérons, pour fixer les idées, un système de deux équations linéaires

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = ay + bz + c, \qquad \frac{dz}{dx} = a_1 y + b_1 z + c_1,$$

a, b, c, a_1, b_1, c_1 étant des fonctions continues de la variable réelle x dans l'intervalle de x_0 à $x_1 > x_0$. Pour appliquer la méthode de M. Picard à la détermination des intégrales prenant les valeurs y_0 et z_0 pour $x = x_0$, on peut prendre, pour premières valeurs approchées de ces intégrales, au lieu des valeurs initiales elles-mêmes, deux fonctions quelconques $u(x)$ et $v(x)$, continues dans l'intervalle (x_0, x_1). Cela revient à poser

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [au(t) + bv(t) + c]\,dt,$$

$$z_1(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} [a_1 u(t) + b_1 v(t) + c_1]\,dt.$$

([1]) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVIII, p. 201; *Acta mathematica*, t. XXV, 1902, p. 1-85.

x étant remplacé par t dans a, b, c, a_1, b_1, c_1 et pour $n > 1$.

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [a y_{n-1}(t) + b z_{n-1}(t) + c]\, dt,$$

$$z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} [a_1 y_{n-1}(t) + b_1 z_{n-1}(t) + c_1]\, dt.$$

Toutes ces fonctions y_n, z_n sont évidemment continues dans l'intervalle (x_0, x_1). Cela posé, soit M une limite supérieure des valeurs absolues des coefficients a, b, a_1, b_1 dans l'intervalle (x_0, x_1), et H une limite supérieure des valeurs absolues de $y_1 - u$ et de $z_1 - v$ dans le même intervalle. On voit immédiatement qu'on a, en tout point de l'intervalle (x_0, x_1),

$$|y_2(x) - y_1(x)| < 2\text{MH}(x - x_0), \qquad |z_2(x) - z_1(x)| < 2\text{MH}(x - x_0),$$

et l'on vérifie ensuite de proche en proche qu'on a, quel que soit n,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < \text{H}\,\frac{[2\text{M}(x - x_0)]^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$|z_n(x) - z_{n-1}(x)| < \text{H}\,\frac{[2\text{M}(x - x_0)]^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Le raisonnement s'achève comme dans le cas général (II, n° 389); y_0 et z_n tendent uniformément vers des limites $y(x)$ et $z(x)$ qui sont les intégrales du système (1), prenant les valeurs y_0 et z_0 pour $z = x_0$.

On dit, pour abréger, qu'une fonction $F(x)$ de la variable réelle x est *dominante* pour une autre fonction $f(x)$, dans un intervalle (α, β), lorsque $F(x)$ est positif et supérieur à la valeur absolue de $f(x)$ pour toute valeur de x dans cet intervalle. Remplaçons, dans le système (1), les coefficients a, b, c, a_1, b_1, c_1 par des fonctions continues A, B, C, A_1, B_1, C_1, qui soient respectivement dominantes pour les premières dans l'intervalle (x_0, x_1), et proposons-nous d'obtenir les intégrales du nouveau système

$$(2) \qquad \frac{dY}{dx} = AY + BZ + C, \qquad \frac{dZ}{dx} = A_1 Y + B_1 Z + C_1$$

qui, pour $x = x_0$ prennent des valeurs positives Y_0 et Z_0 respectivement supérieures à $|y_0|$ et $|z_0|$. Si l'on prend pour premières valeurs approchées des fonctions $U(x)$ et $V(x)$, qui soient respectivement dominantes pour $u(x)$ et $v(x)$, on voit aisément de

proche en proche, que toutes les valeurs approchées successives $Y_n(x)$, $Z_n(x)$ des intégrales du nouveau système sont positives dans l'intervalle (x_0, x_1), et dominantes pour les valeurs approchées de même rang $y_n(x)$ et $z_n(x)$ des intégrales du premier système. Les intégrales $Y(x)$ et $Z(x)$ du système (2), qui prennent les valeurs Y_0 et Z_0 pour $x = x_0$, sont par suite dominantes dans tout l'intervalle (x_0, x_1) pour les premières intégrales $y(x)$ et $z(x)$ du système (1). En prenant pour A, B, C, A_1, B_1, C_1 des constantes positives. on obtient un système auxiliaire à coefficients constants, et il serait facile d'en déduire des limites pour les valeurs absolues des intégrales du système (1) dans l'intervalle (x_0, x_1). Remarquons aussi que ces propriétés s'étendent sans difficulté à un domaine complexe, lorsque a, b, c, a_1, b_1, c_1, sont des fonctions holomorphes de x dans ce domaine.

Une dernière remarque, qui s'étend à un système d'un nombre quelconque d'équations linéaires, est la suivante. Soit $y' = ay + b$ une équation linéaire où les coefficients a et b sont des fonctions continues, la première *positive*, dans un intervalle (x_0, x_1), où $x_1 > x_0$, et soit $Y(x)$ l'intégrale de cette équation qui est égale à y_0 pour $x = x_0$. Si l'on prend pour première valeur approchée une fonction $u(x) \leqq Y(x)$ en tout point de l'intervalle, *toutes les autres valeurs approchées y_n seront aussi inférieures ou au plus égales à* $Y(x)$. Cette propriété résulte immédiatement de la relation de récurrence

$$Y(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^{x} a(t) \{ Y(t) - y_{n-1}(t) \} dt,$$

et de l'hypothèse sur la première valeur approchée.

458. Application à un système semi-linéaire. — Considérons un système particulier de la forme suivante :

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = \varphi(x, y) z + \psi(x, y), \end{cases}$$

où $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ sont trois fonctions continues des variables x et y, lorsque x et y restent compris dans les intervalles $(x_0, x_0 + a)$, $(y_0 - b, y_0 + b)$, a et b étant deux nombres

positifs; on suppose de plus que la fonction $f(x, y)$ satisfait à la condition de Lipschitz dans ce domaine, relativement à y. Pour obtenir les intégrales du système (3), qui prennent respectivement les valeurs y_0 et z_0 pour $x = x_0$, il est naturel de procéder comme il suit. On cherchera d'abord l'intégrale de la première équation, qui est égale à y_0 pour $x = x_0$, par la méthode de M. Picard par exemple. Soit $Y(x)$ cette intégrale qui est continue dans un intervalle $(x_0, x_0 + h)$, h étant un nombre positif $\leqq a$. Remplaçant ensuite y par $Y(x)$ dans $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$, on obtiendra par deux quadratures l'intégrale $Z(x)$ de la seconde équation qui prend la valeur z_0 pour $x = x_0$.

Mais on pourrait aussi appliquer la méthode des approximations succesives au système (3) tout entier en prenant y_0 pour première valeur approchée de y, et une constante quelconque K pour première valeur approchée de z, ce qui conduit à poser

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt, \qquad z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} [\varphi(t, y_0)K + \psi(t, y_0)]\, dt$$

et, en général,

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\, dt,$$

$$z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} \{ \varphi[t, y_{n-1}(t)] z_{n-1}(t) + \psi[t, y_{n-1}(t)] \}\, dt.$$

Lorsque n croît indéfiniment, y_n tend uniformément vers $Y(x)$ dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$; nous voulons montrer que z_n tend aussi uniformément vers $Z(x)$. Il en est certainement ainsi, d'après le théorème général (n° **389**), si $\rho(x, y)$ et $\psi(x, y)$ satisfont à une condition de Lipschitz relativement à y, mais cette dernière hypothèse est inutile, et il suffit de supposer les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ continues. Nous avons en effet

$$Z(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi[t, Y(t)] Z(t)\, dt + \int_{x_0}^{x} \psi[t, Y(t)]\, dt;$$

en comparant cette formule à celle qui donne $z_n(x)$, il vient

$$Z(x) - z_n(x) = \int_{x_0}^{x} \{ \varphi[t, Y(t)] Z(t) - \varphi[t, y_{n-1}(t)] z_{n-1}(t) \}\, dt$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \{ \psi[t, Y(\tau)] - \psi[t, y_{n-1})(t)] \}\, dt,$$

ce que nous pouvons encore écrire, en posant

$$Z(x) - z_n(x) = \delta_n(x),$$

$$\delta_n(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi[t, y_{n-1}(t)]\delta_{n-1}(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} \left\{ \varphi[t, Y(t)] - \varphi[t, y_{n-1}(t)] \right\} Z(t)\,dt$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \left\{ \psi[t, Y(t)] - \psi[t, y_{n-1}(t)] \right\} dt.$$

Le coefficient de $\delta_{n-1}(t)$ sous le signe $\int$ est plus petit en valeur absolue qu'un nombre positif M, car $y_{n-1}(t)$ reste compris entre $y_0 - b$ et $y_0 + b$; d'autre part, la somme des autres termes sous le signe $\int$ tend uniformément vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, puisque y_n tend uniformément vers Y. Cela étant, choisissons un nombre entier p tel que la valeur absolue de

$$\left\{ \varphi[t, Y(t)] - \varphi[t, y_{n-1}(t)] \right\} Z(t) + \psi[t, Y(t)] - \psi[t, y_{n-1}(t)]$$

soit inférieure à un nombre positif λ, quel que soit t, pourvu qu'on ait $n \geqq p$. Le nombre p étant choisi de cette façon, considérons une suite de fonctions $\Delta_{p-1}(x)$, $\Delta_p(x)$ ..., $\Delta_n(x)$. ... déterminées par la relation de récurrence

$$\Delta_n(x) = \int_{x_0}^{x} [M\Delta_{n-1}(t) + \lambda]\,dt \qquad (n = p, p+1, \ldots),$$

et supposons qu'on ait pris $\Delta_{p-1}(x) \geqq |\delta_{p-1}(x)|$. On voit de proche en proche que toutes les fonctions $\Delta_p(x)$, $\Delta_{p+1}(x)$, ... sont respectivement dominantes pour $\delta_p(x)$, $\delta_{p+1}(x)$, ... Or, lorsque n croît indéfiniment, $\Delta_n(x)$ tend uniformément vers l'intégrale de l'équation linéaire $y' = My + \lambda$, qui est nulle pour $x = x_0$, c'est-à-dire vers $\frac{\lambda}{M}\left\{ e^{M(x-x_0)} - 1 \right\}$. On peut donc trouver un nombre entier m assez grand pour qu'on ait, pourvu que n soit $\geqq p + m$,

$$|\Delta_n(x)| < \frac{\lambda}{M}\left\{ e^{M(x_1-x_0)} - 1 \right\} + \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif quelconque. Cette inégalité sera vérifiée *a fortiori* si l'on remplace $\Delta_n(x)$ par $\delta(x)$. D'ailleurs, on peut supposer qu'on a choisi p de telle façon que $\frac{\lambda}{M}\left\{ e^{M(x_1-x_0)} - 1 \right\}$ soit inférieur à ε, puisque λ peut être rendu aussi petit qu'on le veut.

La valeur absolue de $\delta_n(x) = Z(x) - z_n(x)$ est donc inférieure à 2ε, pourvu qu'on ait $n \geqq p + m$; $z_n(x)$ tend donc uniformément vers $Z(x)$ lorsque n augmente indéfiniment.

Au lieu d'un intervalle tel que $(x_0, x_0 + h)$, il est clair qu'on pourrait aussi appliquer la méthode à un intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$: si les approximations sont uniformément convergentes pour les y_n, il en sera de même pour les z_n. Le théorème s'étend évidemment à un système formé de $n + p$ équations de la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \\ \dfrac{dz_k}{dx} = \varphi_{k1}(x, y_1, \ldots, y_n) z_1 + \ldots \\ \qquad + \varphi_{kp}(x, y_1, \ldots, y_n) z_p + \psi_k(x, y_1, \ldots, y_n), \end{cases}$$

où les fonctions f, φ, ψ sont continues dans un certain domaine D, et où les fonctions f satisfont dans ce domaine à la condition de Lipschitz, relativement aux y_i. Si l'on applique à ce système la méthode des approximations successives, ces approximations sont convergentes dans le même intervalle que les approximations pour les y_i seulement, et la convergence est uniforme (¹).

459. **Intégrales considérées comme fonctions des valeurs initiales.** — Reprenons pour fixer les idées une équation différentielle du premier ordre

$$(5)\qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où nous supposerons que $f(x, y)$ satisfait aux conditions habituelles dans un domaine D défini par les conditions

$$\alpha - a \leqq x \leqq \alpha + a, \qquad \beta - b \leqq y \leqq \beta + b.$$

Prenons un système de valeurs initiales (x_0, y_0) appartenant à ce domaine. Les valeurs approchées successives de l'intégrale y_1, $y_2, \ldots, y_n, \ldots$ restent comprises entre $\beta - b$ et $\beta + b$ pourvu

(¹) Les propriétés qui vont être établies dans les paragraphes suivants ont été l'objet d'un assez grand nombre de travaux, qu'on trouvera cités dans un Mémoire de M. E. Cotton sur le sujet (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXVII, 1919, p. 204, et t. XXXVIII, 1910, p. 4). La méthode que j'ai suivie ne diffère pas essentiellement de celle de M. Cotton.

que l'on ait

$$|y_0 - \beta| + M|x - x_0| < b;$$

il suffit, pour s'en assurer, de reprendre le raisonnement du n° 389, et l'on voit de même que $y_n(x;\, x_0,\, y_0)$ tend uniformément vers une limite $\psi(x;\, x_0,\, y_0)$ dans le D″ défini par les conditions

$$\alpha - a \leqq x \leqq \alpha + a, \qquad \alpha - a \leqq x_0 \leqq \alpha + a, \qquad \beta - b \leqq y_0 \leqq \beta + b,$$
$$|y_0 - \beta| + M|x - x_0| < b.$$

Ce domaine D′ contient en particulier le domaine D″ défini par les inégalités

$$|x - \alpha| < h, \qquad |x_0 - \alpha| \leqq h, \qquad |y_0 - \beta| < \frac{b}{2},$$

h étant le plus petit des deux nombres a et $\dfrac{b}{4\,M}$ · Les valeurs approchées successives $y_n(x;\, x_0,\, y_0)$ sont évidemment des fonctions continues de x_0, y_0 dans ce domaine, et par suite *l'intégrale* $y = \psi(x;\, x_0,\, y_0)$, *qui se réduit à* y_0 *pour* $x = x_0$, *est une fonction continue de* x_0 *et de* y_0.

Pour démontrer que cette fonction admet des dérivées par rapport à x_0 et à y_0, nous supposerons que $f(x, y)$ admet une dérivée continue $f'_y(x, y)$. Soient

$$z = \frac{\partial \psi}{\partial y_0}, \qquad u = \frac{\partial \psi}{\partial x_0},$$

les dérivées dont nous voulons établir l'existence; si ces dérivées existent, elles vérifient les équations différentielles

$$(6) \qquad \frac{dz}{dx} = z f'_y(x, y), \qquad \frac{du}{dx} = u f'_y(x, y),$$

qui se déduisent immédiatement de l'équation (5). Nous sommes donc conduits à étudier le système des trois équations différentielles (5) et (6), et nous prendrons pour valeurs initiales

$$y = y_0, \qquad z = 1, \qquad u = -f(x_0, y_0)$$

pour $x = x_0$. Or, ce système est précisément de la forme étudiée plus haut. La fonction $f'_y(x, y)$ étant continue, nous pouvons appliquer le théorème qui a été établi; la méthode de M. Picard, appliquée à ce système, conduit à des approximations uniformément convergentes dans le même domaine D″. Pour appliquer

cette méthode, nous prendrons pour premières valeurs approchées $y = y_0$, $z = 1$, $u = 0$, et nous poserons

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt, \qquad z_1 = 1 + \int_{x_0}^{x} f'_y(t, y_0)\, dt,$$
$$u_1 = -f(x_0, y_0),$$

puis, d'une façon générale,

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\, dt,$$

$$z_n(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} z_{n-1}(t) f'_y[t, y_{n-1}(t)]\, dt,$$

$$u_n(x) = -f(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} u_{n-1}(t) f'_y[t, y_{n-1}(t)]\, dt.$$

On a d'abord

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0) = u_1, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial y_0} = 1 + \int_{x_0}^{x} f'_y(t, y_0)\, dt = z_1,$$

et ensuite

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} f'_y[t, y_{n-1}(t)] \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_0}\, dt,$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial y_0} = 1 + \int_{x_0}^{x} f'_y[t, y_{n-1}(t)] \frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_0}\, dt;$$

on déduit de ces relations

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_0} - u_n = \int_{x_0}^{x} f'_y[t, y_{n-1}(t)] \left[\frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_0} - u_{n-1}(t)\right] dt,$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial y_0} - z_n = \int_{x_0}^{x} f'_y[t, y_{n-1}(t)] \left[\frac{\partial y_{n-1}}{\partial y_0} - z_{n-1}(t)\right] dt,$$

et, par conséquent, on voit, de proche en proche, que l'on a, quel que soit n, $\frac{\partial y_n}{\partial x_0} = u_n$, $\frac{\partial y_n}{\partial y_0} = z_n$.

Or la limite de y_n est l'intégrale $y = \psi(x; x_0, y_0)$; puisque z_n et u_n tendent uniformément vers leurs limites, ces limites z et u représentent des dérivées partielles de l'intégrale $\psi(x; x_0, y_0)$ par rapport à x_0 et y_0, et ces dérivées sont continues dans le domaine qui a été défini plus haut.

Il est facile d'avoir les expressions de ces dérivées. En effet, si l'on remplace y par $\psi(x; x_0, y_0)$ dans les équations (6), les intégrales de ce système qui prennent les valeurs initiales 1 et $-f(x_0, y_0)$ pour $x = x_0$ s'obtiennent immédiatement et nous donnent

$$z = \frac{\partial\psi}{\partial y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} f'_y[t, \psi(t, x_0, y_0)]\, dt},$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} f'_y[t, \psi(t, x_0, y_0)]\, dt}.$$

Ces formules prouvent que $\psi(x; x_0, y_0)$ considérée comme fonction des valeurs initiales x_0, y_0, satisfait à l'équation aux dérivées partielles ([1])

$$(7) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_0} + f(x_0, y_0)\frac{\partial\psi}{\partial y_0} = 0.$$

Le raisonnement peut s'étendre à un système d'un nombre

([1]) Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue, admettant une dérivée continue φ'_y; la fonction

$$Z(x_0, y_0) = \int_a^{x_0} \varphi[x, \psi(x; x_0, y_0)]\, dx,$$

où a est une constante, admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial Z}{\partial x_0} = \varphi(x_0, y_0) + \int_a^{x_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\, dx, \qquad \frac{\partial Z}{\partial y_0} = \int_a^{x_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\, dx.$$

et, par conséquent, la fonction $Z(x_0, y_0)$ est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$(7') \qquad \frac{\partial Z}{\partial x_0} + f(x_0, y_0)\frac{\partial Z}{\partial y_0} = \varphi(x_0, y_0).$$

La fonction $\psi(x; x_0, y_0)$ jouit des mêmes propriétés de réciprocité que dans le cas où la fonction $f(x, y)$ est holomorphe (II, n° 388). De la relation

$$y_1 = \psi(x_1; x_0, y_0),$$

où y_1 désigne la valeur de l'intégrale pour $x = x_1$, on tire inversement

$$y_0 = \psi(x_0; x_1, y_1),$$

car il y a évidemment réciprocité entre les deux couples de variables (x_0, y_0), (x_1, y_1). En supprimant les seconds indices, on voit donc que l'intégrale de l'équation (5), qui est égale à y_0 pour $x = x_0$, vérifie la relation $y_0 = \psi(x_0 : x, y)$; x_0 étant supposé constant, on peut dire que l'équation précédente représente l'intégrale générale de l'équation (5) dans le domaine qui a été défini plus haut, y_0 étant la constante arbitraire.

quelconque d'équations. Prenons, par exemple, un système de deux équations du premier ordre

$$(8) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z)$$

dont les seconds membres sont continus et admettent des dérivées partielles continues f'_y, f'_z, φ'_y, φ'_z, dans un certain domaine D. La méthode de M. Picard prouve encore que les intégrales

$$y = \psi(x;\, x_0, y_0, z_0), \qquad z = \pi(x;\, x_0, y_0, z_0),$$

qui prennent respectivement les valeurs y_0 et z_0 pour $x = x_0$, sont des fonctions continues de x; x_0, y_0, z_0 dans un autre domaine δ, qu'on définirait comme plus haut. Pour démontrer que les fonctions ψ et π admettent des dérivées partielles par rapport aux variables x_0, y_0, z_0, nous adjoindrons aux équations (8) un système de six équations linéaires

$$(9) \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial y} u + \dfrac{\partial f}{\partial z} \xi, & \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial y} v + \dfrac{\partial f}{\partial z} \eta, & \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial y} w + \dfrac{\partial f}{\partial z} \zeta, \\[2ex] \dfrac{d\xi}{dx} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} u + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \xi, & \dfrac{d\eta}{dx} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} v + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \eta, & \dfrac{d\zeta}{dx} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} w + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \zeta, \end{cases}$$

avec les conditions initiales $u = -f(x_0, y_0, z_0)$, $v = 1$, $w = 0$, $\xi = -\varphi(x_0, y_0, z_0)$, $\eta = 0$, $\zeta = 1$ pour $x = x_0$.

D'après une remarque antérieure, la méthode de M. Picard, appliquée au système des huit équations (8) et (9), conduit à des approximations uniformément convergentes. Or, si nous prenons pour premières valeurs approchées de y, z, u, v, w, ξ, η, ζ les valeurs

$$y = y_0, \quad z = z_0, \quad u = 0, \quad v = 1, \quad w = 0, \quad \xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 1,$$

on vérifie immédiatement qu'on a

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_0} = u_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y_0} = v_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial z_0} = w_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_0} = \xi_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y_0} = \eta_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial z_0} = \zeta_1,$$

et l'on s'assure ensuite de proche en proche que ces formules subsistent quand on remplace l'indice 1 par un indice quelconque n. Par conséquent, les intégrales du système auxiliaire (9), qui prennent les valeurs initiales écrites plus haut, représentent respectivement les dérivées partielles des fonctions $\psi(x;\, x_0, y_0, z_0)$,

$\pi(x; x_0, y_0, z_0)$ par rapport aux variables x_0, y_0, z_0 :

$$(10)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\psi}{\partial x_0}, & v = \dfrac{\partial\psi}{\partial y_0}, & w = \dfrac{\partial\psi}{\partial z_0}, \\ \xi = \dfrac{\partial\pi}{\partial x_0}, & \eta = \dfrac{\partial\pi}{\partial y_0}, & \zeta = \dfrac{\partial\pi}{\partial z_0}, \end{cases}$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarquons que (u, ξ) (v, η), (w, ζ) forment trois couples d'intégrales du système linéaire

$$\frac{dU}{dx} = f'_y(x, \psi, \pi)U + f'_z(x, \psi, \pi)V,$$
$$\frac{dV}{dx} = \varphi'_y(x, \psi, \pi)U + \varphi'_z(x, \psi, \pi)V,$$

correspondant respectivement aux valeurs initiales $(-f_0, -\varphi''_0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. On a donc

$$u = -f_0 v - \varphi_0 w, \qquad \xi = -f_0 \eta - \varphi_0 \zeta$$

et, par suite, les fonctions $\psi(x; x_0, y_0, z_0)$, $\pi(x; x_0\, y_0\, z_0$ vérifient l'équation aux dérivées partielles [1]

$$(11)\quad \frac{\partial F}{\partial x_0} + f(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial F}{\partial y_0} + \varphi(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial F}{\partial z_0} = 0.$$

460. Extension aux équations qui dépendent de paramètres. — On peut encore étendre les propriétés qui précèdent aux systèmes d'équations dont les seconds membres renferment des paramètres variables. Considérons, par exemple, une équation du premier

---

[1] On vérifiera comme plus haut (p. 10, note) que la fonction

$$Z(x; x_0, y_0, z_0) = \int_{x_0}^{x} \theta(x, \psi, \pi)\,dx$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial Z}{\partial x_0} + f(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial Z}{\partial y_0} + \varphi(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial Z}{\partial z_0} + \theta(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

On voit de même que les deux relations $y = \psi(x; x_0, y_0, z_0)$, $z = \pi(x; x_0\, y_0, z_0)$ peuvent aussi écrire

$$y_0 = \psi(x_0; x, y, z), \qquad z_0 = \pi(x_0; x, y, z).$$

On a ainsi deux intégrales premières du système (8) (*cf.* II, n° 393).

ordre dépendant d'un paramètre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \tag{12}$$

le second membre étant une fonction continue de x, y, λ, et ayant des dérivées partielles continues f'_y, et f'_λ dans un certain domaine D. L'intégrale qui prend la valeur y_0 pour $x = x_0$ est encore une fonction continue $y = \psi(x; x_0, y_0, \lambda)$ de x_0, y_0, λ dans un certain domaine δ, car on peut la définir comme somme d'une série uniformément convergente dont tous les termes sont des fonctions continues de x; x_0, y_0, λ dans ce domaine. Pour démontrer que la fonction ψ peut être différentiée par rapport à λ, il suffira d'adjoindre à l'équation (12) les équations linéaires

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dz}{dx} = z f'_y(x, y, \lambda), \qquad \frac{du}{dx} = u f'_y(x, y, \lambda), \\ &\qquad\qquad \frac{dv}{dx} = v f'_y(x, y, \lambda) + f'_\lambda, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

avec les valeurs initiales $z = 1$, $u = -f(x_0, y_0)$, $v = 0$. En reprenant les raisonnements du n° 459, on verra que les intégrales de ce nouveau système sont respectivement

$$y = \psi(x; x_0, y_0, \lambda), \qquad z = \frac{\partial\psi}{\partial y_0}, \qquad u = \frac{\partial\psi}{\partial x_0}, \qquad v = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}.$$

La méthode est évidemment générale, et l'on peut énoncer la proposition générale suivante :

Étant donné un système de n équations différentielles du premier ordre

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_p), \qquad \ldots, \qquad \frac{dy_n}{dx} = f_n, \tag{14}$$

dont les seconds membres sont des fonctions continues des variables x, y_i, λ_k, et admettent des dérivées partielles continues $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \lambda_k}$, dans un domaine D, *les intégrales de ce système, qui prennent les valeurs initiales $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ pour $x = x_0$, sont elles-mêmes des fonctions continues et admettent des dérivées partielles par rapport aux variables x_0, (y_i^0), λ_k, qui sont aussi continues dans un domaine δ suffisamment petit.*

Remarque. — La même méthode permettrait de démontrer l'existence des dérivées partielles des intégrales jusqu'à l'ordre N, relativement aux variables x, (y_i^0), λ_k, pourvu que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ admettent aussi des dérivées partielles continues relativement aux variables y_i, λ_k, jusqu'au même ordre N.

461. **Intégrales infiniment voisines.** — On arrive à des conclusions plus précises lorsque l'on connaît déjà un système particulier d'intégrales des équations différentielles considérées. Nous développerons encore le raisonnement, pour simplifier, sur une équation unique

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda) \tag{15}$$

sur laquelle nous ferons les hypothèses suivantes : 1° pour $\lambda = 0$, cette équation admet une intégrale particulière $y_1(x)$, continue dans l'intervalle (x_0, x_1); 2° la fonction $f(x, y, \lambda)$ est continue et admet des dérivées partielles continues $f'_y(x, y, \lambda)$, $f'_\lambda(x, y, \lambda)$ dans le domaine D défini par les conditions

$$x_0 \leqq x \leqq x_1, \qquad y_1(x) - a \leqq y \leqq y_1(x) + a, \qquad |\lambda| \leqq b,$$

a et b étant deux nombres positifs.

Soit R la bande du plan des xy limitée par les deux droites $x = x_0$, $x = x_1$, et les deux courbes

$$y = y_1(x) - a, \qquad y = y_1(x) + a,$$

entre lesquelles est située la courbe intégrale connue $y = y_1(x)$; la fonction $f(x, y, \lambda)$ est continue, ainsi que ses dérivées partielles, f'_y, f'_λ dans cette bande, pourvu que sa valeur absolue de λ soit inférieure à b.

Cela posé, si la valeur absolue de λ est assez petite, nous allons montrer que la méthode de M. Picard conduit à des approximations successives convergentes dans tout l'intervalle (x_0, x_1), pour l'intégrale qui prend la même valeur initiale y_0 que $y_1(x)$ pour $x = x_0$. Soient H et K les bornes supérieures de $|f'_y|$ et de $|f'_\lambda|$ dans le domaine D; y' et y étant compris entre $y_1(x) - a$ et $y_1(x) + a$, et λ, λ' entre $-b$ et $+b$, nous avons toujours l'inégalité de Lipschitz

$$|f(x, y', \lambda') - f(x, y, \lambda)| < \mathrm{H}|y' - y| + \mathrm{K}|\lambda' - \lambda|. \tag{16}$$

Prenons $Y_1 = y_1(x)$ pour première valeur approchée de l'intégrale cherchée, puis posons

$$Y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, Y_1(t), \lambda]\,dt, \qquad x_0 \leqq x \leqq x_1,$$

$$Y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, Y_2(t), \lambda]\,dt$$

et, d'une façon générale,

$$Y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, Y_{n-1}(t), \lambda]\,dt.$$

Nous allons d'abord montrer que toutes ces valeurs approchées restent comprises entre $y_1(x) - a$ et $y_1(x) + a$ dans tout l'intervalle (x_0, x_1), pourvu que la valeur absolue de λ soit assez petite. Nous avons en effet

$$Y_n(x) - y_1(x) = \int_{x_0}^{x} \{ f[t, Y_{n-1}(t), \lambda] - f[t, y_1(t), 0] \}\,dt;$$

si $Y_{n-1}(x)$ est compris entre $y_1(x) - a$ et $y_1(x) + a$, nous avons encore, d'après la relation (16),

$$|Y_n(x) - y_1(x)| < \int_{x_0}^{x} \{ H\,|Y_{n-1}(t) - y_1(t)| + K\,|\lambda| \}\,dt.$$

Considérons une suite de fonctions $\Delta_n(x)$ définies par la relation de récurrence

$$\Delta_n(x) = \int_{x_0}^{x} \{ H\,\Delta_{n-1}(t) + K|\lambda| \}\,dt,$$

avec la condition $\Delta_1(x) = 0$. Il est clair que toutes les fonctions $\Delta_2(x), \ldots, \Delta(x), \ldots$ sont positives entre x_0 et x_1, et qu'on a $|Y_n(x) - y_1(x)| < \Delta_n(x)$. Or les fonctions $\Delta_n(x)$ sont les valeurs approchées successives de l'intégrale de l'équation linéaire

$$u' = Hu + K|\lambda|,$$

qui est nulle pour $x = x_0$, c'est-à-dire de la fonction

$$\frac{K|\lambda|}{H}\{ e^{H(x-x_0)} - 1 \};$$

la première valeur approchée étant nulle, toutes les suivantes sont

inférieures à l'intégrale elle-même (n° 457) et par suite on a, quel que soit n,

$$\Delta_n(x) < \frac{K|\lambda|}{H}\{e^{H(x_1-x_0)}-1\}.$$

Si $|\lambda|$ est tel que le second membre de cette inégalité soit inférieur à a, on voit de proche en proche que toutes les valeurs approchées successives $Y_2(x), \ldots, Y_n(x), \ldots$ restent comprises entre $y_1(x)-a$ et $y_1(x)+a$, dans tout l'intervalle (x_0, x_1). Le raisonnement s'achève comme dans le cas général (n° 389); lorsque n croît indéfiniment, $Y_n(x)$ a pour limite une intégrale $Y(x, \lambda)$ qui prend la valeur y_0 pour $x = x_0$, qui est continue dans l'intervalle (x_0, x_1), et reste comprise en $y_1 - a$ et $y_1 + a$ dans cet intervalle. La courbe intégrale reste donc comprise dans la bande R lorsque x varie de x_0 à x_1. Les méthodes des n°s 459-460 prouvent de plus que $Y(x, \lambda)$, considérée comme fonction des deux variables x et λ est continue, ainsi que ses dérivées partielles Y'_x et Y'_λ, lorsque x reste dans l'intervalle (x_0, x_1), et que $|\lambda|$ reste inférieur à un nombre η convenablement choisi.

Le raisonnement est évidemment général, et la proposition s'étend à un système formé d'un nombre quelconque d'équations différentielles, dont les seconds membres dépendent d'un nombre quelconque de paramètres.

Lorsque les équations (14) *admettent pour* $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_p = 0$ *un système particulier d'intégrales* $y_i = y_i^0(x)$, *continues dans l'intervalle* (x_0, x_1), *si les seconds membres* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *sont continus et admettent des dérivées partielles continues par rapport aux variables* y_i, λ_k, *dans le domaine* D *défini par les conditions*

$$x_0 \leqq x \leqq x_1, \qquad y_i^0(x) - a \leqq y_i \leqq y_i^0(x) + a, \qquad |\lambda_k| < b,$$

a et b étant deux nombres positifs, les intégrales de ce système qui, pour $x = x_0$, *prennent les mêmes valeurs que*

$$y_1^0(x), \ldots, y_n^0(x),$$

sont des fonctions continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à x *et aux paramètres* λ_k *dans un*

domaine D' défini par les conditions

$$x_0 \leqq x \leqq x_1, \qquad |\lambda_k| < \mu, \qquad k = 1, 2, \ldots, p,$$

μ étant un nombre positif convenablement déterminé.

Dans le cas particulier où les seconds membres f_i sont des fonctions analytiques des inconnues y_i et des paramètres λ_k, les intégrales du système sont représentées, dans la méthode de M. Picard, par des sommes de séries uniformément convergentes dont tous les termes sont des fonctions analytiques ([1]) des paramètres λ_k. Ces intégrales sont donc aussi des fonctions analytiques de ces paramètres, et nous sommes ainsi conduits à un théorème de H. Poincaré, qui sera démontré directement un peu plus loin.

On peut encore généraliser le théorème précédent en supposant que les valeurs initiales de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pour $x = x_0$ sont autant de variables indépendantes. Si nous représentons la valeur initiale de $y_i(x)$ par $y_i^0(x_0) = \beta_i$, il suffira de poser

$$y_i(x) = \beta_i + Y_i(x)$$

pour être ramené à un système de même forme que le système (14), mais renfermant n paramètres de plus $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Les intégrales de ce nouveau système qui pour $x = x_0$ prennent les valeurs initiales $y_i^{(0)}(x_0)$ sont des fonctions continues et admettent des dérivées partielles continues par rapport aux nouveaux paramètres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, pourvu que les valeurs absolues de ces paramètres restent suffisamment petites.

Enfin, on peut aussi supposer que la valeur initiale de x est elle-même variable en admettant la continuité de f_x. Par exemple, si, dans l'équation (15), nous posons

$$x = X + \alpha, \qquad y = Y + \beta,$$

l'équation devient

$$\frac{dY}{dX} = f(X + \alpha, Y + \beta, \lambda),$$

et l'intégrale de cette équation qui pour $X = x_0$ prend la valeur y_0 est une fonction continue de α, β, λ lorsque x varie de x_0 à x_1, en

[1] Il suffit en effet de quelques modifications dans les raisonnements pour voir que les conclusions subsistent lorsque les paramètres ont des valeurs complexes, pourvu que les modules soient assez petits.

supposant toujours vérifiées les conditions énoncées plus haut, pourvu que $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\lambda|$ soient assez petits. On en conclut que, dans le même domaine, l'intégrale de l'équation (15), qui prend la valeur $y_0+\beta$ pour $x=x_0+\alpha$, est une fonction continue, admettant des dérivées partielles continues par rapport aux variables α, β, λ.

Exemples. — Soit $y_1(x)$ une intégrale particulière d'une équation du premier ordre $y'=f(x,y)$, continue de x_0 à x_1, et prenant la valeur y_0 $x=x_0$.

L'intégrale de la même équation, qui prend la valeur de $y_0+\lambda$ pour $x=x_0$ est une fonction $F(x,\lambda)$ des deux variables x; λ, continue et admettant des dérivées partielles continues lorsque x varie de x_0 à x_1 et λ de $-h$ à $+h$, le nombre positif h étant choisi assez petit. Soit AB le segment de la droite $x=x_0$, compris entre les deux points A et B d'ordonnées y_0-h et y_0+h. De chaque point du segment AB part un segment de courbe intégrale allant de ce point d'abscisse x_0 à un point d'abscisse x_1, et l'ensemble de ces segments remplit la bande comprise entre les deux droites $x=x_0$, $x=x_1$, et les deux segments issus des points A et B.

Soient, en effet, λ', λ'' deux valeurs de λ comprises entre $-h$ et $+h$; les deux courbes intégrales $C_{\lambda'}$, $C_{\lambda''}$, qui correspondent à ces valeurs de λ, ne peuvent avoir de point commun entre les deux droites $x=x_0$, $x=x_1$, car il passerait par ce point commun deux courbes intégrales. Si l'on coupe ces courbes par la parallèle $x=\alpha$ à Oy $(x_0<\alpha<x_1)$, la fonction $F(\alpha,\lambda)$, ne peut aller qu'en croissant avec λ; si l'on avait à la fois

$$\lambda'>\lambda'', \qquad F(\alpha,\lambda')<F(\alpha,\lambda''),$$

il est clair que les deux courbes $C_{\lambda'}$, $C_{\lambda''}$ se couperaient entre les deux droites $x=x_0$, $x=\alpha$. La fonction $F(\alpha,\lambda)$ passe donc une fois et une seule fois par toute valeur comprise entre $F(\alpha,-h)$ et $F(\alpha,h)$ lorsque λ croît de $-h$ à $+h$.

Considérons encore un système de deux équations du premier ordre dont les seconds membres ne renferment pas de paramètre variable, et soient $y_1(x)$, $z_1(x)$ un système particulier d'intégrales continues dans l'intervalle (x_0, x_1) et prenant les valeurs y_0 et z_0 pour $x=x_0$. Les intégrales qui, pour $x=x_0$, prennent les valeurs initiales $y_0+\lambda$, $z_0+\mu$ sont des fonctions continues, ainsi que leurs dérivées, dans tout l'intervalle (x_0, x_1) pourvu que $|\lambda|$ et $|\mu|$ soient inférieurs à un nombre positif convenable. Dans le plan $x=x_0$, considérons une petite courbe fermée γ entourant le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0). De chaque point de la région σ, limitée par γ, par un segment de courbe intégrale aboutissant à un point du plan $x=x_1$. L'ensemble de ces segments remplit une région de l'espace, limitée par la surface formée par les segments issus des différents points de γ.

462. Équations aux variations. — Considérons, pour fixer les idées, un système de deux équations

$$(17) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z, \lambda), \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z, \lambda),$$

et soient $y = y_1(x)$, $z = z_1(x)$ un système de solutions correspondant à la valeur $\lambda = 0$ du paramètre, solutions que nous supposons continues dans l'intervalle (x_0, x_1), les autres hypothèses sur les seconds membres f et φ étant conservées. D'après ce qu'on vient de voir, les équations (17) admettent une infinité de systèmes de solutions, dépendant du paramètre λ, continues dans le même intervalle, et se réduisant à $y_1(x)$ et $z_1(x)$ respectivement pour $\lambda = 0$. Il suffira de prendre pour valeurs initiales des fonctions $y_0(\lambda)$, $z_0(\lambda)$, continues ainsi que leurs dérivées, et se réduisant pour $\lambda = 0$ à $y_1(x_0)$ et $z_1(x_0)$ respectivement. Nous pouvons même supposer que le paramètre λ ne figure pas explicitement dans les fonctions f et φ, de telle sorte que ces intégrales ne dépendent de λ que par l'intermédiaire des valeurs initiales. Soient

$$y = F(x, \lambda), \qquad z = \Phi(x, \lambda),$$

un de ces systèmes d'intégrales; pour $\lambda = 0$, on a identiquement

$$(18) \qquad F(x, 0) = y_1(x), \qquad \Phi(x, 0) = z_1(x),$$

tandis que, pour $x = x_0$, on a

$$(19) \qquad F(x_0, \lambda) = y_0(\lambda), \qquad \Phi(x_0, \lambda) = z_0(\lambda).$$

En différentiant les deux membres des équations (17) par rapport au paramètre λ, il vient

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial\lambda} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial\lambda} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + \dfrac{\partial f}{\partial\lambda}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial\lambda} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial\lambda} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}; \end{cases}$$

représentons par $\xi(x)$ et $\eta(x)$ les dérivées $F'_\lambda(x, \lambda)$ et $\Phi'_\lambda(x, \lambda)$, où l'on fait $\lambda = 0$, et donnons à λ la valeur $\lambda = 0$ dans les relations précédentes. Nous voyons que ces fonctions $\xi(x)$, $\eta(x)$ vérifient

les équations linéaires

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx} = f'_y(x, y_1, z_1; 0)\xi + f'_z(x, y_1, z_1; 0)\eta + f'_\lambda(x, y_1, z_1; 0), \\ \dfrac{d\eta}{dx} = \varphi'_y(x, y_1, z_1; 0)\xi + \varphi'_z(x, y_1, z_1; 0)\eta + \varphi'_\lambda(x, y_1, z_1; 0), \end{cases}$$

qui ont été appelées par M. Poincaré *équations aux variations*. Ces équations déterminent les fonctions $\xi(x)$, $\eta(x)$ dans tout l'intervalle (x_0, x_1), si l'on connaît leurs valeurs pour $x = x_0$. Le nom d'*équations aux variations* s'explique par ce fait que si l'on considère la variation $\delta\lambda$ du paramètre comme un infiniment petit, ces équations font connaître la partie principale de l'accroissement des intégrales $y(x)$ et $z(x)$ lorsque x varie de x_0 à x_1.

En général, l'intégration du système (21) présente les mêmes difficultés que l'intégration d'un système linéaire quelconque. Mais si l'on connaît l'intégrale générale du système (17), avec deux constantes arbitraires a et b,

$$(22)\qquad y = G(x, \lambda, a, b), \qquad z = H(x, \lambda, a, b),$$

on peut en déduire immédiatement l'intégrale générale du système (21). Supposons en effet, pour fixer les idées, que les intégrales $y_1(x)$, $z_1(x)$ correspondent aux valeurs a_0, b_0 des constantes d'intégration. En différentiant successivement les équations (17) par rapport aux paramètres a, b, λ, et faisant ensuite $\lambda = 0$, $a = a_0$, $b = b_0$ dans les relations obtenues, on voit immédiatement que les fonctions $G'_\lambda(x, 0; a_0, b_0)$ et $H'_\lambda(x, 0; a_0, b_0)$ forment un système particulier d'intégrales des équations (21), tandis que les fonctions (G'_a, H'_a) et (G'_b, H'_b) forment deux systèmes particuliers d'intégrales des mêmes équations où l'on aurait supprimé les termes indépendants de ξ et de η.

Dans les applications, il arrive souvent que les fonctions f et φ ne dépendent pas de λ, et les équations aux variations forment un système homogène. D'après ce qu'on vient de remarquer, on aura immédiatement l'intégrale générale de ce système linéaire, si l'on connaît l'intégrale générale du système (17).

163. Théorème de M. Poincaré. — Nous avons déjà observé que, lorsque les seconds membres des équations différentielles

étaient des fonctions analytiques des inconnues y_i et des paramètres, les intégrales étaient aussi des fonctions analytiques des paramètres (n° 461). Ce théorème, dû à H. Poincaré, peut aussi se démontrer directement, par les méthodes habituelles du calcul des limites ([1]).

Considérons, pour fixer les idées, un système de deux équations différentielles,

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z, \lambda) = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma} y^\alpha z^\beta \lambda^\gamma, \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi(x, y, z, \lambda) = \Sigma b_{\alpha\beta\gamma} y^\alpha z^\beta \lambda^\gamma, \end{aligned}\right.$$

où les seconds membres sont des séries entières en y, z, λ, dont les coefficients $a_{\alpha\beta\gamma}$, $b_{\alpha\beta\gamma}$ sont des fonctions continues de la variable x dans un certain intervalle (x_0, x_1). Ces séries sont supposées convergentes, quelle que soit la valeur de x dans cet intervalle, pourvu que les modules de y, z, λ ne dépassent pas un nombre positif ρ; de plus, ces séries ne renferment aucun terme indépendant de y, z, λ, de telle sorte que, pour $\lambda = 0$, les équations (23) admettent le système d'intégrales particulières $y = z = 0$.

Nous nous proposons tout d'abord de trouver deux séries entières en λ,

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \ldots + \lambda^n y_n(x) + \ldots, \\ z &= \lambda z_1(x) + \lambda^2 z^2(x) + \ldots + \lambda^n z_n(x) + \ldots, \end{aligned}\right.$$

satisfaisant *formellement* aux équations (23), et dont tous les coefficients $y_n(x)$, $z_n(x)$ s'annulent pour $x = x_0$. En remplaçant y et z par ces développements dans les équations (23), et en identifiant, on a tout d'abord les relations

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{100} y_1(x) + a_{010} z_1(x) + a_{001}, \\ \frac{dz_1}{dx} &= b_{100} y_1(x) + b_{010} z_1(x) + b_{001}, \end{aligned}\right.$$

qui, jointes aux conditions $y_1(x_0) = z_1(x_0) = 0$, déterminent les fonctions $y_1(x)$ et $z_1(x)$. Ces équations sont précisément les équa-

---

([1]) M. Picard a donné une démonstration un peu différente (*Cours d'Analyse*, t. III, Chap. VIII).

tions aux variations qui correspondent au système particulier d'intégrales $y = z = 0$. D'une façon générale, en égalant les coefficients de λ_n dans les deux membres après la substitution, on obtient, pour déterminer les coefficients $y_n(x)$ et $z_n(x)$, les deux équations linéaires

$$(26) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_n}{dx} = a_{100}y_n(x) + a_{010}z_n(x) + u_n, \\ \dfrac{dz_n}{dx} = b_{100}y_n(x) + b_{010}z_n(x) + v_n, \end{cases}$$

u_n et v_n étant deux polynomes entiers, à coefficients entiers et positifs, par rapport aux coefficients $a_{\alpha\beta\gamma}$, $b_{\alpha\beta\gamma}$, et aux fonctions $y_i(x)$ et $z_i(x)$ pour lesquelles on a $i < n$. On voit donc, en raisonnant de proche en proche, que toutes les fonctions y_n et z_n sont continues, ainsi que leurs dérivées y'_n et z'_n, dans l'intervalle (x_0, x_1). Nous pouvons remarquer que toutes ces fonctions se déterminent par des quadratures si l'on a intégré les équations (25).

Pour établir la convergence des développements (24) ainsi obtenus, imaginons un système auxiliaire

$$(27) \quad \begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = F(x, Y, Z; \lambda) = \Sigma A_{\alpha\beta\gamma} Y^\alpha Z^\beta \lambda^\gamma, \\ \dfrac{dZ}{dx} = \Phi(x, Y, Z; \lambda) = \Sigma B_{\alpha\beta\gamma} Y^\alpha Z^\beta \lambda^\gamma, \end{cases}$$

dans lequel les coefficients $A_{\alpha\beta\gamma}$, $B_{\alpha\beta\gamma}$ sont des fonctions dominantes pour $a_{\alpha\beta\gamma}$ et $b_{\alpha\beta\gamma}$ respectivement, dans l'intervalle (x_0, x_1).

On peut encore chercher des développements de la forme

$$(28) \quad \begin{cases} Y = Y_1(x)\lambda + \ldots + Y_n(x)\lambda^n + \ldots, \\ Z = Z_1(x)\lambda + \ldots + Z_n(x)\lambda^n + \ldots, \end{cases}$$

satisfaisant formellement au système auxiliaire (27), et dans lesquels tous les coefficients $Y_n(x)$ et $Z_n(x)$ s'annulent pour $x = x_0$. Supposons $x_1 > x_0$; ces coefficients Y_n et Z_n sont déterminés de proche en proche par des systèmes d'équations linéaires; Y_1 et Z_1 par exemple doivent satisfaire au système

$$(29) \quad \frac{dY_1}{dx} = A_{100}Y_1 + A_{010}Z_1 + A_{001}, \qquad \frac{dZ_1}{dx} = B_{100}Y_1 + B_{010}Z_1 + B_{001}$$

et s'annuler pour $x = x_0$. Si l'on compare ce système au système

analogue (25) qui détermine $y_1(x)$ et $z_1(x)$, on voit aussitôt que $Y_1(x)$ et $Z_1(x)$ sont des fonctions dominantes pour $y_1(x)$ et $z_1(x)$ dans l'intervalle (x_0, x_1) (n° 457). Par suite, $\frac{dY_1}{dx}$, et $\frac{dZ}{dx}$ sont elles-mêmes dominantes pour $\frac{dy_1}{dx}$ et $\frac{dz_1}{dx}$. Le raisonnement peut se continuer de proche en proche, et l'on voit que les fonctions Y_n, Z_n, $\frac{dZ_n}{dx}$, $\frac{dY_n}{dx}$ sont respectivement dominantes pour les fonctions y_n, z_n, $\frac{dy_n}{dx}$, $\frac{dz_n}{dx}$ dans l'intervalle (x_0, x_1). Il nous suffira donc de montrer qu'en choisissant convenablement les fonctions dominantes $A_{\alpha\beta\gamma}$, $B_{\alpha\beta\gamma}$, les séries (28) et celles qu'on en déduit en différentiant terme à terme sont uniformément convergentes lorsque la valeur absolue de λ est assez petite.

Cela posé, soit M une limite supérieure du module des deux fonctions f et φ, lorsque x varie de x_0 à x_1, et que les modules de y, z, λ ne dépassent pas le nombre positif ρ. Le coefficient du terme général en $y^\alpha z^\beta \lambda^\gamma$ est inférieur ou au plus égal au coefficient du même terme dans le développement de $\dfrac{M(y+z+\lambda)}{1-\dfrac{y+z+\lambda}{\rho}}$ suivant les puissances de y, z, λ. Nous pouvons donc *a fortiori* prendre pour le système auxiliaire (28) le système

$$\text{(30)} \qquad \frac{dY}{dx} = \frac{dZ}{dx} = \frac{M(Y+Z+\lambda)\left(1+\dfrac{Y+Z+\lambda}{\rho}\right)}{1-\dfrac{Y+Z+\lambda}{\rho}},$$

et tout revient à démontrer que les intégrales de ce système, qui sont nulles pour $x = x_0$, peuvent être développées suivant les puissances croissantes de λ dans tout l'intervalle (x_0, x_1), pourvu que $|\lambda|$ soit suffisamment petit. En tenant compte des conditions initiales et posant $Y + Z + \lambda = \rho t$, le système (30) se réduit à l'équation unique

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2Mt(1+t)}{1-t},$$

avec la condition $t = \frac{\lambda}{\rho}$ pour $x = x_0$. Les variables se séparent, et l'intégrale cherchée est la racine de l'équation $t = \alpha(t+1)^2$, où $\alpha = \frac{\rho\lambda e^{2M(x-x_0)}}{(\rho+\lambda)^2}$ qui se réduit à $\frac{\lambda}{\rho}$ pour $x = x_0$. Pour $\lambda = 0$, on a

aussi $\alpha = 0$, et la racine de l'équation en t qui est nulle pour $\alpha = 0$ est, comme on le voit aisément, une fonction holomorphe de α tant qu'on aura $|\alpha| < \frac{1}{4}$. Or, pour qu'il en soit ainsi, il suffit de prendre $|\lambda|$ assez petit pour que $\frac{2\lambda e^{2M(x_1-x_0)}}{(2+\lambda)^2}$ soit inférieur à $\frac{1}{4}$. Les intégrales Y et Z pourront donc, si λ satisfait à cette condition, être développées en séries entières en λ, convergentes dans tout l'intervalle (x_0, x_1). Les formules (30) montrent de même que les dérivées $\frac{dY}{dx}$, $\frac{dZ}{dx}$ seront développables en séries entières en λ dans le même intervalle.

La démonstration s'étend évidemment à un nombre quelconque d'équations, dépendant d'un nombre quelconque de paramètres. On peut aussi l'étendre au cas où l'on donne à la variable x des valeurs complexes si les coefficients sont des fonctions analytiques de x. Supposons, par exemple, que les équations (23) ne renferment aucun paramètre variable, et qu'on veuille développer les intégrales suivant les puissances des valeurs initiales y_0, z_0, qui correspondent à $x = x_0$.

Posons

$$y = \Sigma \alpha_{mn} y_0^m z_0^n, \qquad z = \Sigma \beta_{mn} y_0^m z_0^n;$$

les coefficients α_{mn}, β_{mn} seront déterminés de proche en proche par des systèmes d'équations linéaires, avec les conditions initiales $\alpha_{mn}(x_0) = \beta_{mn}(x_0) = 0$, pour $m + n > 1$. Quant aux coefficients $(\alpha_{10}, \beta_{10})$ et $(\alpha_{01}, \beta_{01})$, ils forment deux systèmes de solutions des équations aux variations, déterminés respectivement par les conditions initiales $\alpha_{10}(x_0)$, $\beta_{10}(x_0) = 0$ et $\alpha_{01}(x_0) = 0$, $\beta_{01}(x_0) = 1$. Les séries ainsi obtenues seront certainement convergentes dans tout l'intervalle (x_0, x_1), pourvu que les valeurs absolues de y_0 et de z_0 soient inférieures à un nombre positif assez petit. Ce nouveau problème n'est en effet qu'un cas particulier du premier, car la méthode revient au fond à poser $y = Y + y_0$, $z = Z + z_0$, et à développer suivant les puissances des paramètres y_0, z_0, les intégrales du nouveau système qui sont nulles pour $x = x_0$.

Remarque. — Lorsque le système (23) est un système linéaire en y, z, dont les coefficients sont linéaires en λ, on peut prendre pour système auxiliaire

un système de la forme

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dZ}{dx} = (A + B\lambda)(Y + Z) + C\lambda,$$

A, B, C étant des constantes positives. Les intégrales de ce système auxiliaire, qui sont nulles pour $x = x_0$, sont des *fonctions entières du paramètre* λ, et par suite il en est de même des intégrales du système linéaire proposé. Il en serait évidemment de même si les coefficients du système linéaire étaient des fonctions entières de λ (*cf.* II, n° 390).

II. — SOLUTIONS PÉRIODIQUES ET ASYMPTOTIQUES. STABILITÉ.

464. **Solutions périodiques.** — Nous désignerons désormais par t la variable indépendante, qu'on peut regarder comme représentant le temps, pour fixer les idées. Soient

$$(31) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations définissant le mouvement d'un mobile dans l'espace à n dimensions; les X_i sont supposées des fonctions périodiques de t de période ω. Considérons un système de solutions correspondant aux valeurs initiales $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, pour $t = t_0$, ou, en employant le langage géométrique, la trajectoire issue du point de coordonnées $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Si, pour $t = t_0 + \omega$, ces intégrales reprennent respectivement les valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_n^0$, le mobile se retrouve dans sa position initiale au temps $t_0 + \omega$; comme d'autre part les équations (31) ne changent pas quand on change t en $t + \omega$, il est évident que le système de solutions considéré est périodique. Soit $x_i = \varphi_i(t) (i = 1, 2, \ldots, n)$ ce système de solutions, les fonctions $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ étant des fonctions périodiques de période ω. Si les seconds membres des équations (31) dépendent de certains paramètres variables, il peut se faire que pour des valeurs de ces paramètres voisines des valeurs qui correspondent à la solution périodique connue, et pour des valeurs initiales convenablement choisies, le système (31) admette de nouvelles solutions périodiques voisines de la première. Nous dévelop-

perons les raisonnements sur un système de trois équations. Soient

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x, y, z; t, \mu), \qquad \dfrac{dy}{dt} = Y(x, y, z; t, \mu), \\ \dfrac{dz}{dt} = Z(x, y, z; t, \mu), \end{cases}$$

un système de trois équations différentielles dont les seconds membres sont des fonctions périodiques du temps t de période ω. Supposons que, pour $\mu = 0$, ces équations admettent un système de solutions

$$(33)\qquad x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t),$$

φ_1, φ_2, φ_3 étant des fonctions périodiques de t de période ω. Prenons pour μ une valeur voisine de zéro, et soient

$$(34)\quad x = \Phi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu), \qquad y = \Phi_2(t, \ldots), \qquad z = \Phi_3(t, \ldots)$$

les intégrales des équations (32) qui pour $t = 0$ prennent les valeurs $\varphi_1(0) + \alpha_1$, $\varphi_2(0) + \alpha_2$, $\varphi_3(0) + \alpha_3$ respectivement. Les valeurs de ces intégrales pour $t = \omega$ sont elles-mêmes des fonctions continues de α_1, α_2, α_3, μ, pourvu que les valeurs absolues de ces quantités soient suffisamment petites, et si l'on a

$$(35)\quad \psi_i = \Phi_i(\omega, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu) - \varphi_i(0) - \alpha_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

le mobile occupera au temps $t = \omega$ la même position qu'au temps $t = 0$. On se trouvera donc exactement dans les mêmes conditions qu'au début du mouvement, et, par suite, on aura une solution périodique des équations (32) correspondant à ces valeurs de α_1, α_2, α_3, μ.

Les équations (35) sont vérifiées pour $\mu = 0$ par des valeurs nulles de α_1, α_2, α_3, ce qui donne la solution périodique supposée connue *a priori*. On pourra affirmer que ces équations (35) admettent encore des solutions en α_1, α_2, α_3 pour des valeurs de μ voisines de zéro, si le jacobien des premiers membres par rapport à α_1, α_2, α_3 n'est pas nul pour $\mu = 0$, $\alpha_i = 0$.

Posons

$$\xi_i = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_i}\right)_0, \qquad \eta_i = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_i}\right)_0, \qquad \zeta_i = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha_i}\right)_0,$$

où l'indice zéro indique qu'on a remplacé α_1, α_2, α_3 et μ par zéro

après la différentiation; nous savons que (ξ_i, η_i, ζ_i) sont trois systèmes d'intégrales particulières des équations aux variations

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial X}{\partial x}\xi + \frac{\partial X}{\partial y}\eta + \frac{\partial X}{\partial z}\zeta,\\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial Y}{\partial x}\xi + \frac{\partial Y}{\partial y}\eta + \frac{\partial Y}{\partial z}\zeta,\\ \frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x}\xi + \frac{\partial Z}{\partial y}\eta + \frac{\partial Z}{\partial z}\zeta, \end{aligned}\right.$$

où l'on a remplacé dans les seconds membres x, y, z par $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ et μ par zéro après la différentiation. Or on connaît les valeurs initiales de ces trois systèmes de solutions

$$\xi_1 = 1,\quad \eta_1 = 0,\quad \zeta_1 = 0,\quad \xi_2 = 0,\quad \eta_2 = 1,\quad \zeta_2 = 0,$$
$$\xi_3 = 0,\quad \eta_3 = 0,\quad \zeta_3 = 1.$$

On aurait les valeurs de ces trois fonctions pour $t = \omega$, si l'on savait intégrer le système (36); il en est ainsi, en particulier, toutes les fois que l'on connaît l'intégrale générale du système (32) pour $\mu = 0$. Mais, pour l'objet que nous avons en vue, cette intégration n'est pas nécessaire. En effet, le jacobien qui intervient dans la question a pour expression

$$(37)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \xi_1(\omega) - 1 & \eta_1(\omega) & \zeta_1(\omega) \\ \xi_2(\omega) & \eta_2(\omega) - 1 & \zeta_2(\omega) \\ \xi_3(\omega) & \eta_3(\omega) & \zeta_3(\omega) - 1 \end{vmatrix},$$

en égalant ce déterminant à zéro, on a la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (36) admettent un système de solutions

$$\xi = A\xi_1 + B\xi_2 + C\xi_3,\qquad \eta = A\eta_1 + B\eta_2 + C\eta_3,\qquad \zeta = A\zeta_1 + B\zeta_2 + C\zeta_3,$$

reprenant les mêmes valeurs pour $t = 0$ et pour $t = \omega$, c'est-à-dire un système de solutions périodiques.

Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que l'un des exposants caractéristiques (II, n° **423**) des équations (36) fût nul. Convenons, pour abréger, de dire que ces exposants caractéristiques sont les exposants caractéristiques de la solution périodique connue $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, $x_3 = \varphi_3(t)$; nous pourrons alors énoncer le théorème suivant :

Si aucun des exposants caractéristiques de la solution périodique connue n'est égal à zéro, à toute valeur μ voisine de zéro correspond une solution périodique des équations (32) *voisine de la première.*

Lorsqu'un des exposants caractéristiques de la solution périodique connue est nul, le raisonnement précédent ne s'applique plus, mais on ne peut en conclure qu'il n'existe pas, pour les petites valeurs de μ, des solutions périodiques voisines de la première. Supposons, par exemple, que le jacobien des premiers membres des équations (35) par rapport à α_1, α_2, μ ne soit pas nul pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \mu = 0$; alors, à des valeurs de α_3 voisines de zéro correspond un système de valeurs de α_1, α_2, μ, vérifiant les relations (35). On voit donc qu'inversement à une valeur de μ voisine de zéro correspondent aussi des valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tendant vers zéro avec μ; mais il y a, en général, plusieurs systèmes de valeurs de α_1, α_2, α_3 correspondant à une même valeur de α, et par conséquent plusieurs familles de solutions périodiques voisines de la première. La conclusion ne serait en défaut que si tous les jacobiens des premiers membres des équations (35) étaient nuls pour $a_i = 0$, $\mu = 0$. Même dans ce cas, on ne peut affirmer, sans autre examen, qu'il n'existe pas de solutions périodiques voisines de la première. Il pourrait arriver, par exemple, que les trois équations (35) ne soient pas distinctes; il est clair que, lorsque cette cisconstance se présente, tous les jacobiens en question seront nuls, et pourtant il y aura, en général, une double infinité ou une triple infinité de solutions périodiques, suivant que les trois équations se réduisent à deux équations distinctes ou à une seule. Pour la discussion détaillée, ainsi que pour l'examen du cas où les équations (31) ne renferment pas le temps explicitement, je renverrai le lecteur aux travaux de M. H. Poincaré, ou au *Traité d'Analyse* de M. E. Picard (t. III, Chap. VIII). Ce qui précède suffit pour montrer comment la recherche des solutions périodiques est ramenée à l'étude d'un système de trois équations à trois fonctions inconnues d'un paramètre, dans le voisinage d'une solution connue *a priori*.

465. Solutions stables et instables. — Soit

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

un système de solutions des équations différentielles

$$(38) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; t);$$

les fonctions $\varphi_i(t)$ sont continues pour toutes les valeurs de $t > t_0$, et nous supposons de plus que ces solutions ne passent par aucun point singulier des équations différentielles (38). Considérons un

autre système d'intégrales prenant pour $t = t_0$ les valeurs initiales

$$\varphi_i(0) + \alpha_i.$$

D'après ce que nous savons déjà, on peut choisir les valeurs absolues de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ assez petites pour que la nouvelle solution diffère de la première d'aussi peu qu'on voudra, pendant un temps aussi long qu'on le voudra. Mais il peut se faire que, lorsque t grandit indéfiniment, la nouvelle solution finisse par s'écarter beaucoup de la première, aussi petites que soient les valeurs absolues des α_i. Ceci nous conduit à une nouvelle notion importante, celle de la stabilité des intégrales des équations différentielles.

Pour donner des définitions précises, nous supposerons que la solution connue se réduit à $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, ce qui évidemment ne restreint pas la généralité, car on peut toujours prendre pour nouvelles inconnues les variables $x'_i = x_i - \varphi_i(t)$. Nous nous bornerons d'ailleurs au cas très général où les équations ont la forme

$$(39) \quad \frac{dx_i}{dt} = \Sigma P^{(i)}_{m_1 m_2 \ldots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} \qquad \begin{pmatrix} m_1 \geqq 0, \ \ldots, \ m_n \geqq 0 \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

les seconds membres étant des séries entières ([1]) en $x_1, \ldots, x_n$ dont les coefficients sont des fonctions continues de t, qui restent bornées pour les valeurs réelles de $t \geqq t_0$. Enfin, nous supposerons que ces séries sont convergentes pour toutes les valeurs réelles ou complexes des variables x_i de modules inférieurs à un nombre positif H convenablement choisi, et pour toutes les valeurs de $t \geqq t_0$. Si M est un nombre positif, supérieur à la valeur absolue de l'un quelconque des seconds membres dans le domaine ainsi défini, on a, pour toutes les valeurs de $t \geqq t_0$ (n° 352),

$$|P^i_{m_1 m_2 \ldots m_n}| < \frac{M}{H^{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}}.$$

Lorsque les coefficients P sont indépendants de t, on a les équa-

([1]) La question a été traitée récemment, avec des hypothèses beaucoup plus générales, par M. E. Cotton, qui remplace les équations différentielles (39) par un système d'équations intégrales (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXVIII, 1911, p. 473). Je dois citer aussi un important Mémoire de M. P. Bohl (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVIII, 1910).

tions d'un mouvement permanent, c'est-à-dire des équations définissant le mouvement, dans l'espace à n dimensions, d'un point mobile dont la vitesse à chaque instant est indépendante du temps, et ne dépend que de la position du mobile à chaque instant. Un autre cas très important à considérer est celui où les coefficients P sont des fonctions périodiques du temps; c'est à ce dernier cas qu'on est ramené quand on veut étudier la stabilité d'une solution périodique connue $x_i = \varphi_i(t)$ des équations (38), les seconds membres étant indépendants de t ou des fonctions périodiques. La transformation $x_i = \varphi_i(t) + x'_i$ conduira en effet à des équations (39) où les seconds membres seront des fonctions périodiques de t, alors même que les X_i seraient indépendants de t.

Considérons les intégrales des équations (39) $x_1(t), \ldots x_n(t)$ qui prennent pour $t = t_0$ des valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_n^0$ inférieures à H en valeur absolue. Étant donné un nombre positif quelconque $\varepsilon < H$, s'il est possible de lui associer un autre nombre positif $\eta \leqq \varepsilon$ tel que les conditions $|x_n^0| < \eta$ entraînent comme conséquences les inégalités

$$(40) \qquad |x_1(t)| < \varepsilon, \quad \ldots \quad |x_n(t)| < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de t supérieures à t_0, on dit que la solution $x_i = 0$ est une solution *stable*. S'il existe un nombre positif ε tel qu'il soit impossible de lui associer un autre nombre positif η de façon à satisfaire aux conditions précédentes, la solution est *instable*. Il est clair qu'on peut remplacer la définition de la stabilité par la suivante : à tout nombre positif $\varepsilon < H$, on peut associer un autre nombre positif η tel que la condition

$$(x_1^0)^2 + \ldots + (x_n^0)^2 < \eta^2$$

entraîne l'inégalité $\{x_1(t)\}^2 + \ldots + \{x_n(t)\}^2 < \varepsilon$, pour $t < t_0$. La définition de l'instabilité peut se modifier de la même façon.

Les équations linéaires à coefficients constants fournissent facilement des exemples. Les solutions du système $\frac{dx}{dt} = -y$, $\frac{dy}{dt} = x$, prenant les valeurs initiales x_0, y_0 pour $t = 0$, ont pour expressions

$$x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \qquad y = x_0 \cos t,$$

et l'on a $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Il suffira qu'on ait $x_0^2 + y_0^2 < \varepsilon^2$ pour qu'on ait aussi, quel que soit t, $x^2 - y^2 < \varepsilon^2$. La solution $x = y = 0$ est donc ***stable***.

Les intégrales du système

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = 2x + y,$$

qui prennent les valeurs x_0, y_0 pour $t = 0$, ont pour expressions

$$x = \frac{x_0 + y_0}{3} e^{2t} + \frac{2x_0 - y_0}{3} e^{-t}, \qquad y = \frac{2(x_0 + y_0)}{3} e^{2t} - \frac{2x_0 - y_0}{3} e^{-t}.$$

La solution $x = y = 0$ est *instable*, car si l'on prend par exemple $y_0 = 2x_0$, $|x|$ et $|y|$ croissent indéfiniment avec t, aussi petit que soit x_0, pourvu qu'il ne soit pas nul. Cet exemple donne lieu à quelques remarques. Si les valeurs initiales x_0, y_0 satisfont à la condition $x_0 + y_0 = 0$, $|x|$ et $|y|$ diminuent et tendent vers zéro lorsque t croît de 0 à $+\infty$; il y a *stabilité conditionnelle.* De même, si l'on prend des valeurs initiales telles que la différence $2x_0 - y_0$ soit nulle, x et y tendent vers zéro lorsque t décroît de 0 à $-\infty$. Si x_0, y_0 ne vérifient aucune de ces conditions, $|x|$ et $|y|$ augmentent indéfiniment lorsque t croît indéfiniment, soit par valeurs positives, soit par valeurs négatives.

Les intégrales du système $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -2y - 2x$, qui prennent les valeurs x_0, y_0 pour $t = 0$, ont pour expressions

$$x = e^{-t}[x_0 \cos t + (x_0 + y_0) \sin t], \qquad y = e^{-t}[y_0 \cos t - (2x_0 + y_0) \sin t];$$

quels que soient x_0, y_0, ces fonctions tendent vers zéro lorsque t croît indéfiniment. Non seulement la solution $x = y = 0$ est stable, mais toutes les intégrales se rapprochent indéfiniment de la première lorsque t tend vers $+\infty$; nous dirons pour abréger qu'elles sont asymptotes à la solution $x = y = 0$.

466. Théorèmes généraux sur la stabilité (1). — Lorsque les coefficients des termes du premier degré en $x_1, \ldots, x_n$ dans les seconds membres des équations (39) sont indépendants de t, les équations aux variations qui correspondent à la solution connue $x_i = 0$ sont des équations linéaires à coefficients constants, et l'étude de ce système permet en général de reconnaître si cette solution est stable ou instable.

Soit $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une forme quadratique à coefficients constants : si l'on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par un système de solutions des équations (39), le résultat de la substitution est une

(1) J'ai suivi, à part quelques modifications de détail, la méthode de démonstration de M. Liapounoff, dans le Mémoire déjà cité (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. IX, p. 403).

fonction de t, dont la dérivée V' a pour expression, en tenant compte des équations (39) elles-mêmes,

$$(41) \qquad V' = V_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; t),$$

V_1 étant une nouvelle forme quadratique à coefficients constants, et Φ une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, commençant par des termes du troisième degré au moins. Si l'on peut choisir les coefficients de $V(x_1, \ldots, x_n)$ de façon que $V_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit une *forme définie positive*, on a les théorèmes suivants :

1° *La solution $x_i = 0$ est stable, si la forme correspondante $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une forme définie négative;*

2° *La solution $x_i = 0$ est instable, si la forme V est une forme définie positive, ou une forme indéfinie* [1].

Pour faciliter le raisonnement, nous emploierons le langage de la géométrie, et nous appellerons *point* tout système de valeurs pour les n variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. L'ensemble des points dont les coordonnées vérifient la relation $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \rho^2$ sera appelé une *hypersphère* S_ρ de rayon ρ, et l'ensemble des points pour lesquels on a $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \rho^2$ sera de même *l'intérieur* de l'hypersphère S_ρ.

Cela posé, si la forme $V_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une forme définie positive, il résulte des hypothèses qui ont été faites plus haut sur les coefficients des équations (39) qu'on peut trouver un nombre positif R tel qu'à l'intérieur de l'hypersphère de rayon R la dérivée V' soit positive et ne s'annule qu'à l'origine. En effet, nous pouvons représenter les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ par $\rho\alpha_1$, $\rho\alpha_2, \ldots, \rho\alpha_n$, ρ étant un nombre positif, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des nombres qui vérifient la relation $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$. En faisant cette substitution dans V', il vient

$$V' = \rho^2[V_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + \rho W].$$

---

[1] Lorsque $V_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une forme définie, le hessien de la forme correspondante V ne peut être nul; car si ce hessien était nul, on pourrait satisfaire aux n équations $\frac{dV}{dx_i} = 0$, et par suite à l'équation $V_1 = 0$, par des valeurs non toutes nulles des inconnues x_i. La forme V est donc la somme de n carrés de fonctions linéaires distinctes, multipliés par des facteurs constants différents de zéro.

W étant une fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \rho, t$, qui est continue pourvu que ρ reste inférieur à une certaine limite H et que t soit $> t_0$. Lorsque le point $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ décrit l'hypersphère de rayon un, la forme $V_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ reste positive et supérieure à un certain minimum m. Soit d'autre part M le maximum de la valeur absolue de W. En prenant pour R un nombre positif inférieur à $\frac{m}{M}$, il est clair qu'à l'intérieur de l'hypersphère de rayon R V' sera positif, sauf pour l'origine où l'on a $V' = 0$. Nous supposerons, dans la suite du raisonnement, que le nombre R ait été choisi de cette façon.

Cela étant, examinons d'abord le cas où $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une forme définie négative. Soit ε un nombre positif quelconque inférieur à R; lorsque le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ décrit l'hypersphère de rayon ε, $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reste négatif et par conséquent est plus petit qu'une valeur maximum $-K$. D'ailleurs cette fonction V s'annule pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$; on peut donc assigner un nombre $\lambda > \varepsilon$ tel qu'à l'intérieur de l'hypersphère S_λ de rayon λ, on ait $V > -K$. Le nombre λ étant choisi de cette façon, si pour $t = t_0$, les valeurs initiales $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ sont les coordonnées d'un point intérieur à l'hypersphère de rayon λ, *le point* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *restera toujours à l'intérieur de l'hypersphère de rayon* ε, *lorsque t croîtra de t_0 à $+\infty$*. En effet, le point $(x_1, \ldots, x_n)$ commence par être à l'intérieur de cette hypersphère; s'il n'y reste pas indéfiniment, supposons qu'il atteigne pour la première fois l'hypersphère S_ε au temps $T > t_0$. Soient V_0 et V_T les valeurs de $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aux époques t_0 et T; on a $V_0 > -K$, $V_T \leqq -K$ (d'après la façon dont on a défini les nombres K et λ) et par suite $V_0 > V_T$. Or une telle relation est impossible puisque, du temps t_0 au temps T, la dérivée V' est positive. Nous sommes donc conduits à une contradiction en admettant que le point $(x_1, \ldots, x_n)$ atteint l'hypersphère S_ε; par suite, *la solution $x_i = 0$ est stable*.

Dans le cas considéré, non seulement la solution est stable, mais toutes les solutions suffisamment voisines sont asymptotes à la première. En effet, lorsque t croît de t_0 à $+\infty$, la fonction V, qui part d'une valeur négative, et qui va en croissant, tend vers zéro ou vers une valeur négative $-l$. Je dis que cette dernière

hypothèse est à rejeter. En effet, la fonction V s'annulant à l'origine, il existe un nombre λ' tel qu'à l'intérieur de l'hypersphère de rayon λ', on ait $V > -l$. Le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ resterait donc extérieur à cette hypersphère $S_{\lambda'}$. Or lorsque le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reste compris entre $S_{\lambda'}$ et S_ε, V' reste plus grand qu'un certain minimum $\mu > 0$. On aurait donc, au temps T,

$$V_T > V_0 + \mu(T - t_0);$$

une telle relation est impossible, car le second membre augmente indéfiniment avec T, tandis que V_T devrait rester inférieur à $-l$. Il faut donc que $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tende vers zéro lorsque t augmente indéfiniment, et par suite que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tendent vers zéro.

Il est à remarquer que le raisonnement employé plus haut prouve *qu'il y a stabilité lorsque* V *est une forme définie négative, pourvu que* V' *ne puisse prendre que des valeurs positives ou nulles pour les valeurs des* x_i *voisines de zéro*. Mais on ne peut plus affirmer dans ce cas que les solutions voisines de la première sont asymptotes à celle-là. Par exemple, dans le cas élémentaire des deux équations

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x,$$

si l'on prend $V = -(x^2 + y^2)$, on a $V' = 0$; il y a stabilité, mais non asymptotisme.

Supposons en second lieu que, V_1 étant une forme définie positive, V soit une forme définie positive ou une forme indéterminée. Le nombre R ayant la même signification que plus haut, soit ε un nombre positif inférieur à R, et λ un autre nombre positif $\leqq \varepsilon$. Quelque petit que soit λ, nous allons montrer qu'il est toujours possible de prendre à l'intérieur de l'hypersphère de rayon λ un point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ tel que, les valeurs initiales des variables x_i étant $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ respectivement, le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ finisse par atteindre l'hypersphère de rayon ε. Soient, en effet, $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ les coordonnées d'un point intérieur à cette hypersphère tel qu'on ait $V_0 = V(x_1^0, \ldots, x_n^0) > 0$. La forme V s'annulant à l'origine, il existe un nombre $\lambda' < \lambda$ tel qu'à l'intérieur de l'hypersphère de rayon λ' on ait $V < V_0$. Considérons le système

d'intégrales des équations (39) prenant pour $t = t_0$ les valeurs x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0; nous voulons montrer que le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ finira par sortir de l'hypersphère S_ε au bout d'un temps fini. L'hypothèse contraire conduit en effet à une conséquence absurde. Si le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ restait intérieur à cette hypersphère, V' étant toujours positif, V irait en croissant et ne pourrait prendre de valeur inférieure à V_0. Le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ resterait donc compris entre les deux hypersphères S_ε et $S_{\lambda'}$; mais, dans ce domaine, V' a un minimum positif m. Pour toute valeur de $T > t_0$, on aurait donc $V_T > V_0 + m(T - t_0)$; or une telle inégalité est impossible, car le second membre augmente indéfiniment avec T, tandis que V reste inférieur à une certaine limite, lorsque le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est à l'intérieur de l'hypersphère S_ε.

467. **Application des théorèmes généraux.** — Pour appliquer les théorèmes précédents, il est clair qu'on peut effectuer sur les variables x_i une substitution linéaire à coefficients constants quelconques, dont le déterminant est différent de zéro. Nous choisirons les coefficients de cette substitution de façon à ramener les équations aux variations, correspondant à la solution $x_i = 0$, à une forme canonique simple. Soient

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{42}$$

ces équations aux variations pour le système proposé (39); on les obtient en réduisant les seconds membres aux termes du premier degré. On a vu (II, n° 421) comment on pouvait ramener le système (42) à sa forme canonique; cette forme dépend avant tout de la nature des racines de l'équation caractéristique

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{43}$$

Si cette équation a n racines réelles et distinctes, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on peut ramener les équations (42) à la forme

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \qquad \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n. \tag{44}$$

par une substitution linéaire à coefficients réels. La même substitution, appliquée aux équations (39), conduirait à un système que l'on obtiendrait en ajoutant aux seconds membres des équations (44) des séries entières en $y_1, \ldots, y_n$, commençant par des termes du second degré au moins. *Si aucun des coefficients* λ_i *n'est égal à zéro*, on obtient immédiatement une forme quadratique $V(y_i)$ dont la forme associée $V_1(y_i)$ est une forme définie positive. Il suffit de prendre

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2),$$

ce qui donne

$$V_1 = \lambda_1^2 y_1^2 + \lambda_2^2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 y_n^2.$$

Si tous les coefficients λ_i sont *négatifs*, V est une forme définie négative, il y a *stabilité*. Si l'un au moins des coefficients λ_i est *positif*, la forme V est une forme définie positive ou une forme indéfinie pouvant prendre des valeurs positives; il y a *instabilité*. Lorsque l'un des coefficients λ_i est nul, il est clair qu'on ne peut obtenir pour V_1 une forme définie positive, quelle que soit la forme quadratique V, car V_1 s'annule pour des valeurs des y_i non toutes nulles.

Supposons en second lieu que l'équation caractéristique ait des racines multiples, toutes ces racines étant réelles, et *aucune d'elles n'étant nulle*. On peut alors (II, n° 421) effectuer sur les variables x_i une substitution linéaire à coefficients réels telle que les nouvelles équations aux variations se partagent en un certain nombre de groupes ayant une forme simple (quelques groupes pouvant se composer d'une seule équation). Considérons, pour fixer les idées, un groupe de trois équations de la forme

$$(45)\quad \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \qquad \frac{dy_2}{dt} = \lambda_1 y_2 + \mu y_1, \qquad \frac{dy_3}{dt} = \lambda_1 y_3 + \nu_1 y_1 + \nu_2 y_2;$$

λ_1 n'étant pas nul, on peut, sans changer ce coefficient, remplacer μ, ν_1, ν_2 par des nombres dont la valeur absolue soit inférieure à tout nombre positif donné, car, si l'on change y_1 en $\rho\sigma y_1$; y_2 en σy_2, ρ et σ étant deux facteurs constants différents de zéro, le système (45) est remplacé par un système de même forme, où λ_1 n'a pas changé, et où μ, ν_1, ν_2 ont été remplacés par $\mu\rho$, $\nu_1\sigma\rho$, $\nu_2\sigma$ respectivement. Si λ_1 n'est pas nul, nous pouvons donc toujours

supposer μ, ν_1, ν_2 assez petits pour que la forme quadratique

$$\mathfrak{v}_1 = \lambda_1^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + \lambda_1 \mu y_1 y_2 + \lambda_1 \nu_1 y_1 y_3 + \lambda_1 \nu_2 y_2 y_3$$

soit une forme définie positive, car elle se réduit à la forme

$$\lambda_1^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

pour $\mu = \nu_1 = \nu_2 = 0$, et cette forme quadratique $\mathfrak{v}_1(y_1, y_2, y_3)$ se déduit de la forme $\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\lambda_1(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, en prenant la dérivée par rapport à t et remplaçant $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dy_2}{dt}$, $\frac{dy_3}{dt}$ par leurs expressions (45). En opérant de la même façon avec tous les groupes analogues au groupe (45), on formera évidemment une forme

$$V_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

qui sera définie et positive, pourvu qu'aucun des nombres λ_i ne soit nul. La forme correspondante V qui sera la somme des formes telles que $\frac{1}{2}\lambda_1(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, étendues à tous les groupes d'équations analogues au groupe (45), sera une forme définie négative lorsque tous les nombres λ_i seront négatifs, et dans ce cas seulement. La conclusion est la même que tout à l'heure. *La solution est stable si toutes les racines de l'équation caractéristique sont négatives, et instable si l'une d'elles est positive.*

Enfin, supposons que quelques-unes des racines de l'équation caractéristique soient imaginaires. Ces racines sont alors conjuguées deux à deux, et à chaque groupe d'équations, tel que (45), correspond un groupe conjugué

$$(45') \quad \frac{dy'_1}{dt} = \lambda'_1 y'_1, \quad \frac{dy'_2}{dt} = \lambda'_1 y'_2 + \mu' y'_1, \quad \frac{dy'_3}{dt} = \lambda'_1 y'_3 + \nu'_1 y'_1 + \nu'_2 y'_2,$$

les variables y_1 et y'_1, y_2 et y'_2, y_3 et y'_3 étant imaginaires conjuguées, ainsi que les coefficients λ_1 et λ'_1, μ et μ', ν et ν'. Pour la même raison que tout à l'heure, les modules des coefficients μ, ν_1, ν_2 peuvent être supposés plus petits que tout nombre positif donné à l'avance. On pourrait remplacer le système des équations (45) et (45′) par un système de six équations linéaires à coefficients réels, en posant $y_1 = u_1 + iv_1$, $y'_1 = u_1 - iv_1$, ..., mais cette transformation est inutile pour notre objet. Posons en effet

$$\mathfrak{v} = y_1 y'_1 + y_2 y'_2 + y_3 y'_3;$$

en tenant compte des équations (45) et (45′), on a

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = (\lambda_1 + \lambda'_1)(y_1 y'_1 + y_2 y'_2 + y_3 y'_3) + \mu y_1 y'_2 + \mu' y'_1 y_2 + \nu_1 y_1 y'_3 + \nu'_1 y'_1 y_3 + \nu_2 y_2 y'_3 + \nu'_2 y'_2 y_3;$$

la forme quadratique qui est au second membre est une forme définie, lorsque les modules de μ, ν_1, ν_2 sont assez petits, pourvu que $\lambda_1 + \lambda'_1$ ne soit pas nul, c'est-à-dire pourvu que la partie réelle de α_1 ne soit pas nulle. Soit $\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, α n'étant pas nul; en posant

$$\mathfrak{v} = 2\alpha(y_1 y'_1 + y_2 y'_2 + y_3 y'_3) = 2\alpha(u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + u_3^2 + v_3^2),$$

nous voyons que $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ sera une forme définie positive, si l'on a d'abord ramené les modules des coefficients μ, ν_1, ν_2 à être assez petits, et la forme $\mathfrak{v}$ elle-même sera une forme définie, positive ou négative suivant le signe de α. En opérant de même avec tous les groupes d'équations provenant des racines réelles ou des couples de racines imaginaires conjuguées, on voit que l'on peut toujours former une forme quadratique $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que la forme quadratique associée $V_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit une forme définie positive *pourvu qu'aucune des racines λ_i de l'équation caractéristique n'ait sa partie réelle nulle*. Si toutes ces parties réelles sont *négatives*, la forme V est elle-même une forme définie négative, et la solution $x_i = 0$ est *stable;* si l'une au moins de ces parties réelles est *positive*, la forme V peut prendre des valeurs positives, et la solution $x_i = 0$ est *instable*.

Examen du cas douteux. — Lorsque l'une des racines λ_i a sa partie réelle nulle, il y a doute; c'est le seul cas où la solution $x_i = 0$ puisse être stable sans que toutes les solutions voisines lui soient asymptotiques. On peut lever le doute, sauf dans le cas où les parties réelles de toutes les autres racines sont nulles ou négatives. Supposons, en effet, que quelques-unes des racines de l'équation caractéristique aient leurs parties réelles nulles, tandis que d'autres ont leurs parties réelles positives. Les racines de l'équation caractéristique $D'(s) = 0$ du système auxiliaire

$$(46) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = a_{i1}x'_1 + \ldots + \left(a_{ii} - \frac{\mu}{2}\right)x'_i + \ldots + a_{in}x'_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

que l'on déduit du système (42) en y remplaçant a_{ii} par $a_{ii} - \frac{\mu}{2}$, sont égales aux racines de l'équation (43) diminuées de $\frac{\mu}{2}$. Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, on peut donc choisir pour μ un nombre réel et positif tel qu'aucune des racines de l'équation $D'(s) = 0$ n'ait sa partie réelle nulle, et que quelques-unes de ces racines aient leur partie réelle positive. D'après le cas que nous venons de traiter, il existe une forme quadratique

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

qui peut prendre des valeurs positives, tandis que la forme

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[a_{i1} x_1 + \ldots + \left(a_{ii} - \frac{\mu}{2} \right) x_i + \ldots + a_{in} x_n \right] \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

est elle-même une forme définie positive. Si dans $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des intégrales du système (39), le résultat de la substitution est une fonction de t, dont la dérivée a pour expression, en tenant compte de la définition de $W(x_1, \ldots, x_n)$,

$$V' = \mu V + W + \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$

Φ étant une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui ne renferme aucun terme de degré inférieur à deux. Puisque W est une forme définie positive, on peut déterminer, comme on l'a vu plus haut (n° 466), un nombre positif R tel qu'à l'intérieur de l'hypersphère de rayon R on ait, pour $t \geqq t_0$, $W + \Phi > 0$; et par suite $V' > \mu V$. Soient ε un nombre positif quelconque inférieur à R, et η un autre nombre positif $\leqq \varepsilon$. A l'intérieur de l'hypersphère de rayon η, il existe des points pour lesquels la forme V a une valeur positive.

Soient $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un de ces points et V_0 la valeur correspondante de V; nous allons montrer que la trajectoire issue du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ atteint l'hypersphère de rayon ε au bout d'un temps fini. En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi; V est alors une fonction du temps satisfaisant à une équation de la forme $V' = \mu V + \varphi(t)$, $\varphi(t)$ étant une fonction positive du temps. Cette fonction V est donc supérieure à l'intégrale de l'équation $V' = \mu V$, prenant la même valeur V_0 pour $t = t_0$, c'est-à-dire à $V_0 e^{\mu(t-t_0)}$. Or, cette expression augmente indéfiniment avec t; il est donc impossible que le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reste

constamment à l'intérieur de l'hypersphère de rayon ε, puisque $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reste bornée dans ce domaine.

En définitive, *il y a stabilité lorsque les parties réelles de* TOUTES *les racines λ_i de l'équation caractéristique sont négatives; il y a instabilité si la partie réelle de* L'UNE *de ces racines est positive.* Le seul cas douteux est celui où *p de ces racines* ($p > 0$) *ont leurs parties réelles nulles, tous les autres ayant leurs parties réelles négatives.*

Pour reconnaître s'il y a stabilité ou instabilité, il faut alors tenir compte des termes de degré supérieur au premier dans les seconds membres des équations (39). Nous avons déjà vu un exemple (n° 465) où il y a stabilité; il y a instabilité pour le système

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = x.$$

468. **Stabilité de l'équilibre.** — Soit $U(x_1, x_3, \ldots, x_n)$ une fonction analytique des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, indépendante de t, s'annulant, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$, et holomorphe dans le voisinage. Les équations

$$(47) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_n}$$

admettent la solution $x_i = 0$. Cette solution est *stable* si la fonction

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

est *maximum* pour $x_i = 0$; en effet, quand on remplace, dans cette fonction, les variables x_i par des intégrales du système (47), le résultat est une fonction de t dont la dérivée a pour expression $\sum \left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2$, et par conséquent ne peut prendre de valeurs négatives. Les raisonnements du n° 466 prouvent que la solution $x_i = 0$ est stable si $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a un maximum *propre* à l'origine, puisque cette fonction ne peut prendre de valeurs positives dans le voisinage de l'origine.

Pour traiter la question inverse, désignons par $V(x_1, \ldots, x_n)$ la forme quadratique formée par l'ensemble des termes du second degré dans le développement de U, et bornons-nous au cas où le hessien de cette forme n'est pas nul. Si l'on applique le théorème général du n° 466 à cette forme

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

la forme associée V_1 est précisément $\sum \left(\frac{dV_1}{dx_i}\right)^2$, c'est-à-dire une *forme définie positive*. Pour qu'il y ait stabilité, il faut et il suffit que $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit une forme définie négative, ce qui est aussi la

condition nécessaire et suffisante pour que $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit maximum au point $x_i = 0$. Ainsi, quand le hessien de la forme V n'est pas nul, *il ne peut y avoir stabilité que si* U *est maximum pour l'origine.*

Dans ce cas particulier, on doit poser, dans l'équation caractéristique,

$$a_{ih} = a_{hi} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \, \partial x_h},$$

et, d'après les propriétés bien connues des formes quadratiques, les racines de cette équation sont toujours *réelles* quelle que soit la forme V; il ne peut y avoir de racine nulle si le hessien est différent de zéro.

Dans un problème de Dynamique où il existe une fonction des forces indépendantes du temps, on sait, d'après un théorème de Lagrange, que si cette fonction des forces est maximum pour certaines valeurs des paramètres, la position correspondante du système est une position d'équilibre stable. Les raisonnements du nº 466 ne sont au fond que l'extension de la démonstration classique de Dirichlet. L'examen de la proposition réciproque présente de bien plus grandes difficultés. Nous n'examinerons qu'un cas particulier. Supposons qu'on ait choisi les paramètres, dont dépend la position du système, de façon que les équations différentielles du mouvement soient de la forme

$$(48) \qquad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \qquad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^2 x_n}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_n},$$

$U(x_1, \ldots, x_n)$ étant une fonction de $x_1, \ldots, x_n$, régulière dans le voisinage de l'origine, et s'annulant, ainsi que ses dérivées premières, pour $x_i = 0$. Pour reconnaître si la solution $x_i = 0$ est stable, nous nous bornerons encore au cas où le hessien de la forme $V(x_1, \ldots, x_n)$, qui se compose de l'ensemble des termes du second degré de U, est différent de zéro. Le système (48) est équivalent au système des $2n$ équations du premier ordre

$$(49) \qquad \frac{dx_i}{dt} = y_i, \qquad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_i} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut obtenir directement l'équation caractéristique du système linéaire obtenu en négligeant les termes d'ordre supérieur dans les seconds membres, il suffit de chercher des intégrales de ce système de la forme

$$x_i = \alpha_i \, e^{\mu t}, \qquad y_i = \beta_i \, e^{\mu t},$$

ce qui conduit, pour déterminer μ, à l'équation

$$D(\mu) = \begin{vmatrix} a_{11} - \mu^2 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \mu^2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \mu^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines de cette équation sont $\pm\sqrt{\lambda_i}$, les λ_i étant les racines de la

première équation caractéristique, relative aux équations (47). Tous ces nombres λ_i sont réels, et par hypothèse aucun d'eux n'est nul; si l'un d'eux était positif, l'équation en μ aurait une racine positive, et la solution $x_i = y_i = 0$ des équations (49) ne pourrait être stable, d'après le théorème général. Le résultat de cette discussion peut donc s'énoncer comme il suit : *Lorsque l'étude des termes du second degré de* $U(x_1, \ldots, x_n)$ *permet de reconnaître si cette fonction est maximum, ou non, pour les valeurs* $x_i = 0$, *il est nécessaire que* U *soit maximum pour que l'équilibre soit stable* (¹).

Remarque. — Lorsque tous les nombres λ_i sont négatifs, les parties réelles de toutes les racines de $D(\mu) = 0$ sont nulles. On est donc dans un cas où l'on ne pourrait affirmer *a priori* la stabilité, si l'on n'avait pas égard à la forme spéciale des équations (49) (²).

469. Application à des systèmes plus généraux. — On peut étendre les résultats précédents aux systèmes (39), tels que les équations linéaires (42) forment un *système réductible* (II, n° 424). Nous rappellerons qu'on appelle ainsi les systèmes linéaires qu'on peut ramener à un système linéaire à coefficients constants par une substitution linéaire effectuée sur les inconnues x_i, les coefficients de cette substitution étant des fonctions continues et bornées de la variable t pour $t > t_0$, ainsi que leurs dérivées par rapport à t, et l'inverse du déterminant de ces coefficients étant borné. Il est clair que, si le système (42) est réductible, en appliquant au système (39) tout entier la substitution linéaire qu'on vient de définir, on remplacera ce système par un système de même espèce dans lequel les coefficients des termes du premier degré dans le second membre seront indépendants de t.

En particulier, lorsque les coefficients du système (39) sont des fonctions périodiques de t, nous avons vu que le système (42) est

---

(¹) La réciproque du théorème de Lagrange a été établie, dans des cas plus généraux par MM. Liapounoff (*Journal de Liouville*, 1896), Painlevé (*Comptes rendus*, t. 125, p. 1021), Hadamard (*Journal de Liouville*, 1897), et plus récemment par M. E. Cotton (*Comptes rendus*, t. 153, p. 1029).

(²) La définition de la stabilité donnée plus haut (n° 465) ne concerne que *l'avenir*, t variant de t_0 à $+\infty$. Mais on peut en concevoir une autre, concernant à la fois l'*avenir* et le *passé*, t variant alors de $-\infty$ à $+\infty$. Quand on change t en $-t$, les racines de l'équation caractéristique sont multipliées par (-1); il ne peut donc y avoir stabilité à la fois dans l'avenir et le passé que si les parties réelles de toutes ces racines sont nulles. On se trouve dans un cas où l'étude des équations aux variations ne suffit pas pour décider qu'il y a stabilité ou non.

réductible. Il résulte de la démonstration qui a été donnée de ce théorème que les racines de l'équation caractéristique du système transformé sont précisément les exposants caractéristiques du système (42) à coefficients périodiques (II, n° 423). Il y aura donc stabilité si tous les exposants caractéristiques ont leurs parties réelles négatives, instabilité si l'un de ces exposants a sa partie réelle positive.

470. **Séries asymptotiques. Stabilité conditionnelle.** — On peut confirmer les résultats obtenus dans les numéros précédents par l'étude directe des séries représentant les intégrales, ces séries étant ordonnées suivant les puissances des valeurs initiales, lorsque les parties réelles des nombres λ_i sont toutes négatives (voir *Exercice* 1, p. 46). MM. Poincaré et Liapounoff ont introduit des séries d'une autre espèce, qui mettent en évidence le caractère asymptotique des solutions. Nous n'étudierons que le cas le plus simple, celui d'un système que l'on peut ramener à la forme réduite

$$(50)\qquad \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 + \ldots, \quad \frac{dx_p}{dt} = \lambda_p x_p + \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + \ldots,$$

les termes non écrits formant des séries entières en $x_1, \ldots, x_n$, commençant par des termes du second degré, dont les coefficients sont indépendants de t. Posons

$$u_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad u_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad \ldots, \qquad u_p = C_p e^{\lambda_p t} \qquad (p \leqq n),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_p$ étant des constantes *différentes de zéro*, et proposons-nous de trouver des séries entières à coefficients constants, ordonnées suivant les puissances de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ et satisfaisant formellement aux équations (50),

$$(51)\qquad x_i = \Sigma L^i_{m_1 m_2 \ldots m_p} u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les coefficients $L^i_{m_1 m_2 \ldots m_p}$ sont des constantes qu'il s'agit de déterminer. Pour achever de préciser le problème, nous supposerons que les termes du premier degré dans $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont respectivement $u_1, \ldots, u_p$, tandis que $x_{p+1}, \ldots, x_n$ ne renferment aucun terme du premier degré en $u_1, \ldots, u_p$. On a, d'une façon générale,

$$\frac{d}{dt}\left(u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p}\right) = (m_1\lambda_1 + \ldots + m_p\lambda_p) u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p};$$

en substituant les développements (51) dans les équations (50), et en écrivant qu'on obtient une identité, on obtient, pour déterminer le coefficient $L^i_{m_1 m_2 \ldots m_p}$ la relation

$$(52)\qquad (m_1\lambda_1 + \ldots + m_p\lambda_p - \lambda_i) L^i_{m_1 \ldots m_n} = H^i_{m_1 \ldots m_n},$$

le second membre se déduisant par des additions et des multiplications des coefficients des séries (50) et des coefficients déjà déterminés des séries (51), provenant des termes de degré inférieur en $u_1, \ldots, u_p$. On pourra donc déterminer de proche en proche tous les coefficients L^i sans être jamais arrêté pourvu qu'il n'existe entre les λ aucune relation de la forme

$$(53) \qquad m_1\lambda_1 + \ldots + m_p\lambda_p - \lambda_i = 0,$$

$m_1, \ldots, m_p$ étant des nombres entiers positifs dont la somme est au moins égale à 2, et l'indice i pouvant prendre toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Plaçons-nous dans cette hypothèse, et admettons en outre que le module de l'expression (53) a une borne inférieure l *positive*. Pour démontrer la convergence des séries (51) ainsi obtenues, considérons le système d'équations auxiliaires, où η est compris entre 0 et 1, et inférieur à l,

$$(54) \qquad \begin{cases} \eta y_1 = u_1 + \Sigma Q^1_{m_1\ldots m_n} y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \eta y_p = u_p + \Sigma Q^p_{m_1\ldots m_n} y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n}, \\ \eta y_{p+1} = \Sigma Q^{p+1}_{m_1\ldots m_n} y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \eta y_n = \Sigma Q^n_{m_1\ldots m_n} y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n}, \end{cases}$$

es seconds membres étant des séries majorantes pour les séries qui figurent dans les équations (50). On satisfait aux équations (54) par des séries entières convergentes en $u_1, u_2, \ldots, u_p$, et l'on vérifie aisément, de proche en proche, d'après la façon dont le nombre η a été défini, que ces nouvelles séries sont majorantes pour les séries (51). Il en résulte que les séries (51) sont elles-mêmes convergentes pour les valeurs de t comprises entre zéro et un nombre positif T, pourvu que les valeurs absolues des coefficients $C_1, \ldots, C_p$ soient inférieures à une limite convenable.

Cela étant, supposons que les parties réelles des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ soient négatives, et que l'égalité (53) n'ait jamais lieu pour des valeurs entières et positives des nombres $m_1, m_2, \ldots, m_p$ dont la somme est supérieure à deux. Dans ce cas, comme la partie réelle de $\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_p m_p$ diminue indéfiniment lorsque les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_p$ croissent indéfiniment, il y a un minimum positif pour le module du premier membre de la relation (58), et nous pouvons appliquer le résultat qui précède. Il existe des séries (51) satisfaisant formellement aux équations (50), ordonnées suivant les puissances de $C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, C_p e^{\lambda_p t}$; ces séries sont convergentes pour $t = 0$, pourvu que les modules de $C_1, C_2, \ldots, C_p$ soient assez petits, et par suite elles sont convergentes pour toutes les valeurs positives de t. Il est évident que les intégrales correspondantes sont asymptotiques à la solution $x_i = 0$. Si $p = n$, le résultat est bien d'accord avec le théorème général sur la stabilité, mais on obtient des résultats nouveaux en supposant que, parmi les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, il y en a p seulement

dont la partie réelle est négative. Si l'on a pris pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ces p racines et si la relation (53) n'est jamais vérifiée pour des valeurs entières et positives des coefficients $m_1, \ldots, m_p$, nous obtenons des intégrales asymptotiques à la solution $x_i = 0$, dépendant de p constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_p$. On dit qu'il y a *stabilité conditionnelle*. L'ensemble de ces trajectoires forme dans l'espace à n dimensions une multiplicité à p dimensions (E_p), qui est aussi un lieu de points tels que les trajectoires issues de l'un de ces points soient asymptotes à la solution $x_i = 0$.

Les mêmes séries permettent aussi de démontrer qu'il ne peut y avoir stabilité, au sens absolu du mot, si l'un des nombres λ_i a sa partie réelle positive. Soit en effet λ_1 une des racines de $D(\lambda) = 0$, dont la partie réelle est positive, et au moins égale à la partie réelle de l'une quelconque des autres racines. Aucun des nombres $m_1\lambda_1 - \lambda_i$ ne peut être nul, si l'on a $m_1 > 1$; il existe donc des solutions du système (50) où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont représentés par des séries entières ordonnées suivant les puissances de $u_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$ avec un rayon de convergence ρ différent de zéro. La série qui donne x_1 commence par le terme u_1, tandis que les autres séries commencent par des termes du second degré. La valeur initiale x_1^0 de x_1 pour $t = 0$ est égale à la somme d'une série entière en C_1, commençant par C_1 et l'on en tire inversement pour C_1 une série entière en x_1^0, commençant par x_1^0, de sorte que $(x_1^0)^2 + \ldots + (x_n^0)^2$ tend vers zéro en même temps que x_1^0. Supposons, pour fixer les idées, que λ_1 soit réel, et soit h un nombre positif $< \rho$, tel que la valeur de $x_1(u_1)$ pour $u_1 = h$ ne soit pas nulle. Soit, d'autre part, η un nombre positif quelconque. Il est toujours possible de prendre pour x_1^0 un nombre positif inférieur à η tel que la valeur correspondante c de C_1 soit positive et inférieure à h, puisque le rapport $\frac{C_1}{x_1^0}$ tend vers l'unité lorsque x_1^0 tend vers zéro. L'intégrale correspondante $x_1(ce^{\lambda_1 t})$, qui prend la valeur x_1^0 pour $t = 0$, atteindra la valeur $x_1(h)$ au temps T donné par l'égalité $h = ce^{\lambda_1 T}$, c'est-à-dire pour la valeur positive $T = \frac{1}{\lambda_1}\log\left(\frac{h}{c}\right)$. La solution $x_i = 0$ est donc instable. On raisonnerait d'une façon analogue si λ_1 était un nombre complexe à partie réelle positive. Il y aurait alors une autre racine λ_2 conjuguée de la première, et l'on considérerait les séries ordonnées suivant les puissances de $C_1 e^{\lambda_1 t}$ et de $C_2 e^{\lambda_2 t}$ en prenant pour C_1 et C_2 des imaginaires conjuguées.

Pour l'étude des séries asymptotiques dans des cas plus généraux, on consultera, outre le Mémoire de M. Liapounoff, le Chapitre VII du Tome I des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* de M. Poincaré, et le Chapitre VIII du Tome III du *Traité d'Analyse* de M. Picard.

COMPLÉMENTS ET EXERCICES.

1. Démontrer, par l'étude directe des séries, ordonnées suivant les puissances des valeurs initiales, qui représentent les intégrales, qu'il y a stabilité, lorsque les parties réelles de toutes les racines de l'équation caractéristique $D(\lambda) = 0$ sont négatives.

R. Considérons un système de la forme

$$\text{(A)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = -\lambda_i x_i + \Sigma P^i_{m_1 m_2 \ldots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

les parties réelles des λ_i étant toutes positives. Soit μ un nombre positif plus petit que les parties réelles de tous les λ_i. On considère le système auxiliaire

$$\text{(A')} \qquad \frac{dX_i}{dt} = -\mu X_i + \Sigma Q^i_{m_1 \ldots m_n} X_1^{m_1} X_2^{m_2} \ldots X_n^{m_n},$$

les Q_t étant des fonctions dominantes pour les fonctions P_i pour $t \geqq t_0$. En posant $x_i = e^{-kt} y_i$, $X_1 = e^{kt} Y_i$, les deux systèmes (A) et (A') sont remplacés par deux systèmes de même espèce où le coefficient de Y_i sera supérieur au module du coefficient de y_i pourvu que le nombre positif k soit pris convenablement. Il suffira donc de démontrer la propriété énoncée pour un système auxiliaire de la forme

$$\frac{dX_i}{dt} = -\mu X_i + M \frac{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2}{1 - \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{\rho}},$$

M, λ et ρ étant des nombres positifs; ce qui se fait facilement en développant les intégrales suivant les puissances des valeurs initiales.

2. Appliquer les théorèmes généraux sur la stabilité à l'étude des intégrales de l'équation $X\,dy - Y\,dz = 0$, dans le voisinage de l'origine; X et Y sont des séries entières en x et y, sans terme constant.

On ramène à l'étude du système

$$\frac{dx}{dt} = X = a'x + b'y + \ldots, \qquad \frac{dy}{dt} = Y = ax + by + \ldots$$

et l'on observe que la courbe intégrale issue du point (x_0, y_0) va passer par l'origine lorsque x et y tendent vers zéro quand la valeur absolue de t augmente indéfiniment, et dans ce cas seulement (*cf.* II, p. 509).

CHAPITRE XXIV.

ÉQUATIONS DE MONGE-AMPÈRE [1].

I. — CARACTÉRISTIQUES. INTÉGRALES INTERMÉDIAIRES.

471. Problème de Cauchy pour une équation du second ordre. — Dans le cas d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, le théorème général d'existence de Cauchy (t. II, n° 456) s'énonce ainsi :

Étant donnée une équation

$$(1) \qquad r = F(x, y, z, p, q, s, t), \qquad \left(r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}, \, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right),$$

dont le second membre est une fonction analytique holomorphe dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0, t_0, soient $\varphi_0(y)$ et $\varphi_1(y)$ deux fonctions de y, holomorphes au voisinage de $y = y_0$, et telles qu'on ait

$$\varphi_0(y_0) = z_0, \qquad \varphi'_0(y_0) = q_0, \qquad \varphi''_0(y_0) = t_0,$$
$$\varphi_1(y_0) = p_0, \qquad \varphi'_1(y_0) = s_0;$$

l'équation (1) *admet une intégrale $z(x, y)$, holomorphe dans le domaine du point (x_0, y_0), et telle que, pour $x = x_0$, on ait*

$$z(x_0, y) = \varphi_0(y), \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x_0} = \varphi_1(y).$$

Il n'existe qu'une intégrale satisfaisant à ces conditions.

Les conditions qui déterminent la surface intégrale ont une

[1] Je me borne aux points essentiels de la théorie; pour plus de détails, on pourra consulter mes *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (Hermann, 1896-1898).

signification géométrique évidente. Les deux équations $x = x_0$, $z = \varphi_0(y)$ représentent une courbe plane C; et l'on voit que cette courbe C appartient à une infinité de surfaces intégrales dépendant d'une fonction arbitraire $\varphi_1(y)$. Si l'on se donne aussi cette fonction $\varphi_1(y)$, le plan tangent à la surface intégrale est connu par là même tout le long de C. Plus généralement, considérons une courbe quelconque Γ, plane ou gauche, et une développable Δ passant par cette courbe, de façon qu'à chaque point M de Γ corresponde un plan passant par la tangente en M à cette courbe; une intégrale d'une équation du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{2}$$

est en général complètement déterminée si on l'assujettit à passer par la courbe Γ et à être tangente à la développable Δ tout le long de cette courbe. Supposons en effet que, dans le voisinage d'un point (x_0, y_0, z_0) de Γ, les équations de cette courbe soient mises sous la forme $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant holomorphes dans le domaine du point x_0. Prenons trois nouvelles variables u, v, w, liées aux variables x, y, z par les relations

$$x = u, \qquad y = f(u) + v, \qquad z' = \varphi(u) + w,$$

et considérons u et v comme les nouvelles variables indépendantes et w comme la nouvelle fonction inconnue. De la relation $dz = p\,dx + q\,dy$, on tire (I, n° 64)

$$p = \frac{\partial w}{\partial u} + \varphi'(u) - \frac{\partial w}{\partial v} f'(u), \qquad q = \frac{\partial w}{\partial v};$$

il vient ensuite, en partant des identités $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$,

$$r = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2f'(u)\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \{f'(u)\}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - f''(u)\frac{\partial w}{\partial v} + \varphi''(u),$$

$$s = \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} - f'(u)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \qquad t = \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

L'équation (2) se change en une nouvelle équation du second ordre

$$\mathcal{F}\left(u, v, w, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right) = 0, \tag{3}$$

tandis que les conditions géométriques auxquelles doit satisfaire l'intégrale cherchée sont remplacées par les suivantes. Puisque z doit se réduire à $\varphi(x)$ pour $y=f(x)$, w doit être nul pour $v=0$, quel que soit u; d'autre part, puisque le plan tangent à la surface est donné tout le long de Γ, q est une fonction connue de x, et par suite $\frac{\partial w}{\partial v}$ est une fonction connue de u pour $v=0$. On est donc ramené à un problème plus simple :

Déterminer une intégrale de l'équation (3) *se réduisant à zéro, pour* $v=0$, *tandis que la dérivée* $\frac{\partial w}{\partial v}$ *se réduit à une fonction connue de* u.

Ces conditions font connaître les valeurs de w, $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}$ pour $u=x_0$, $v=0$; pour qu'on ait le droit d'appliquer le théorème général d'existence, il suffira qu'on puisse résoudre l'équation (3) par rapport à $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ de façon à mettre l'équation sous la forme normale (1). Il suffit pour cela que cette équation (3) admette en $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ une racine qui soit une fonction holomorphe des autres variables dans le voisinage des valeurs initiales précédentes. Pour vérifier qu'il en est bien ainsi en général, si la courbe Γ et la développable Δ n'ont pas été choisies d'une façon particulière, observons que, le long de Γ, les coefficients angulaires p et q du plan tangent à la développable Δ sont des fonctions de x satisfaisant à la condition $\varphi'(x)=p+qf'(x)$, qui exprime que ce plan contient la tangente à Γ.

Les valeurs des dérivées secondes r, s, t de la fonction inconnue $z(x, y)$ doivent satisfaire, en chaque point de Γ, à l'équation (2) et aux deux relations

$$(4) \qquad p'(x)=r+sf'(x), \qquad q'(x)=s+tf'(x).$$

Soient r_0, s_0, t_0 un système de solutions des équations (2) et (4) où l'on a fait $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0=\varphi(x_0)$. A ce système de solutions de l'équation (2) correspond un système de solutions de l'équation (3), et l'on vérifie immédiatement, d'après les for-

mules du changement de variables qui donnent r, s, t, qu'on a

$$(5)\qquad \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)} \right\}_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_0 \{f'(x_0)\}^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_0 f'(x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0.$$

Si le second membre de cette relation n'est pas nul, l'équation (3) peut être résolue par rapport à $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}$, et le théorème général d'existence est applicable.

En résumé, le problème proposé admet autant de solutions holomorphes que les équations (2) et (4) admettent de systèmes de solutions en r, s, t pour lesquels l'expression

$$\frac{\partial F}{\partial r}\{f'(x)\}^2 - \frac{\partial F}{\partial s} f'(x) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

est différente de zéro.

L'étude des cas exceptionnels où cette expression est nulle va être poursuivie en détail pour une classe particulière d'équations.

Les explications qui précèdent justifient la définition de l'intégrale générale proposée par M. Darboux et adoptée depuis : *Une intégrale est générale si l'on peut disposer des arbitraires qui y figurent, fonctions ou constantes en nombre illimité, de manière à retrouver les solutions dont les théorèmes de Cauchy nous démontrent l'existence, c'est-à-dire de manière à attribuer à la fonction inconnue et à l'une de ses dérivées premières des valeurs se succédant suivant une loi continue quelconque, donnée à l'avance, pour tous les points d'une courbe.*

La détermination effective de l'intégrale satisfaisant à ces conditions constitue le *Problème de Cauchy* pour une équation du second ordre. Les raisonnements qui précèdent supposent que l'équation et les données sont analytiques; par extension, on conserve le nom de problème de Cauchy, alors même que les données ne sont pas analytiques, Nous verrons plus loin que, dans bien des cas, la condition d'analyticité n'intervient pas dans la solution (Chap. XXVI).

Remarque I. — Une fois qu'on a reconnu l'existence d'une intégrale satisfaisant aux conditions de Cauchy, on peut calculer de proche en proche les valeurs des dérivées successives de la fonction inconnue $z(x, y)$ en un point quelconque de Γ. Les

dérivées du troisième ordre, par exemple, s'obtiendront en résolvant le système de cinq équations linéaires compatibles

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} s + \frac{\partial F}{\partial r} p_{30} + \frac{\partial F}{\partial s} p_{21} + \frac{\partial F}{\partial t} p_{12} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} s + \frac{\partial F}{\partial q} t + \frac{\partial F}{\partial r} p_{21} + \frac{\partial F}{\partial s} p_{12} + \frac{\partial F}{\partial t} p_{03} = 0,$$

$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right),$$

$$\frac{dr}{dx} = p_{30} + p_{21} f'(x), \qquad \frac{ds}{dx} = p_{21} + p_{12} f'(x), \qquad \frac{dt}{dx} = p_{12} + p_{03} f'(x),$$

r, s, t ayant déjà été calculées, et ainsi de suite. On vérifie aisément que les dérivées d'ordre n sont fournies par un système d'équations linéaires, dans lesquelles le déterminant des coefficients des inconnues est une puissance de l'expression

$$\frac{\partial F}{\partial r} \{f'(x)\}^2 - \frac{\partial F}{\partial s} f'(x) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

qui, par hypothèse, est différente de zéro.

Remarque II. — Étant donnée une surface intégrale S de l'équation (2), l'équation différentielle

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial F}{\partial s} dx\, dy + \frac{\partial F}{\partial t} dx^2 = 0,$$

où l'on suppose z, p, q, r, s, t exprimées au moyen des variables x et y, détermine sur cette surface deux familles de courbes, qu'on appelle *courbes caractéristiques*. Si l'on considère une de ces courbes Γ et la développable Δ circonscrite à S tout le long de Γ, on ne peut appliquer à cet assemblage le théorème général d'existence, puisqu'on se trouve justement dans le cas exceptionnel qui a été exclu de nos raisonnements. On voit en particulier que s'il existe une infinité de surfaces intégrales, dépendant d'une ou plusieurs constantes arbitraires, tangentes tout le long d'une courbe, cette courbe est nécessairement une courbe caractéristique sur chacune de ces surfaces.

Remarque III. — On dit souvent que l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes dépend de *deux* fonctions arbitraires d'une variable. Cette locution n'a de sens précis

que si l'on se reporte à l'énoncé même du théorème de Cauchy, et il faudrait bien se garder de juger du degré de généralité d'une intégrale d'après le nombre des fonctions arbitraires qui figurent dans son expression. Considérons par exemple l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$, et l'intégrale de cette équation qui, pour $x = x_0$, est égale à une fonction donnée $\varphi(y)$, tandis que $\frac{\partial z}{\partial x}$ se réduit à une autre fonction donnée $\varphi(y)$, ces deux fonctions étant holomorphes dans le domaine du point y_0

$$\varphi(y) = a_0 + a_1(y - y_0) + \ldots + a_n(y - y_0)^n + \ldots,$$
$$\psi(y) = b_0 - b_1(y - y_0) + \ldots + b_n(y - y_0)^n + \ldots.$$

Cette intégrale s'obtient aisément et, si l'on ordonne le développement suivant les puissances de $x - x_0$, on peut l'écrire sous la forme

$$z = \varphi(y) + (x - x_0)\psi(y) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2}\varphi'(y) + \frac{(x - x_0)^3}{1.2.3}\psi'(y) + \ldots$$
$$+ \frac{(x - x_0)^{2n}}{2n!}\varphi^{(n)}(y) + \frac{(x - x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}\psi^{(n)}(y)\ldots,$$

où les deux fonctions arbitraires $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont mises en évidence. Mais, si l'on ordonne le développement suivant les puissances de $y - y_0$, on peut aussi l'écrire

$$z = F(x) + (y - y_0)F''(x) + \frac{(y - y_0)^2}{1.2}F^{(IV)}(x) + \ldots + \frac{(y - y_0)^n}{n!}F^{(2n)}(x)\ldots,$$

$F(x)$ désignant la fonction holomorphe

$$F(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + a_1\frac{(x - x_0)^2}{1.2} + b_1\frac{(x - x_0)^3}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ a_n\frac{(x - x_0)^{2n}}{(n+1)\ldots(2n-1)2n} + b_n\frac{(x - x_0)^{2n+1}}{(n+1)\ldots(2n+1)} + \ldots.$$

et, dans cette nouvelle expression, ne figure plus qu'une fonction $F(x)$. On s'explique aisément ce résultat en observant qu'au point de vue purement formel il est absolument équivalent de se donner les deux séries entières $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ ou de se donner la seule série $F(x)$ (*cf.* I, 170).

Cette remarque conduit à une propriété importante des intégrales de l'équation $r = q$. La fonction $F(x)$ est la fonction à laquelle se réduit l'intégrale pour $y = y_0$; nous voyons que cette intégrale est complètement déterminée quand on connaît la seule fonction $F(x)$, ce qui semble en contradiction avec le théorème de Cauchy. Mais cette contradiction apparente s'explique si l'on observe que les courbes $y = C$ d'une surface intégrale sont des courbes caractéristiques, pour lesquelles le théorème est en défaut. Observons aussi que cette fonction $F(x)$ ne peut pas être choisie arbitrairement, si l'on suppose l'intégrale holomorphe dans le domaine du point (x_0, y_0). En effet, les

séries $\varphi(y)$, $\psi(y)$ ont alors un rayon de convergence fini, et il existe deux nombres positifs M et ρ tels que l'on ait, quel que soit n, $(a_n) < M\rho^{-n}$, $|b_n| < M\rho^{-n}$. En remplaçant a_n et b_n par $M\rho^{-n}$ dans $F(x)$, on obtient une *fonction entière*, et par conséquent toute intégrale de l'équation $r = q$, qui est une fonction analytique des deux variables x, y, holomorphe dans le domaine d'un point (x_0, y_0), est *une fonction entière de la variable* x, pour $y = y_0$. Il s'ensuit que l'on ne peut trouver d'intégrale analytique se réduisant pour $y = y_0$ à une fonction holomorphe donnée de x, si cette fonction holomorphe est quelconque; il est nécessaire en particulier qu'elle soit une fonction entière de x. Cet exemple est souvent cité pour montrer que l'on ne peut appliquer le théorème d'existence de Cauchy à une équation qui n'est pas mise sous la forme normale exigée par la démonstration.

472. Éléments de contact. Les multiplicités M. — Pour abréger le langage, nous appellerons *élément de contact*, ou plus simplement *élément*, l'ensemble d'un point de coordonnées (x, y, z) et d'un plan de coefficients angulaires p, q, passant par ce point. Lorsque les cinq coordonnées x, y, z, p, q d'un élément sont fonctions d'une ou plusieurs variables indépendantes, on obtient des multiplicités d'éléments, mais nous n'avons à considérer ici que les multiplicités telles que les fonctions x, y, z, p, q et leurs différentielles vérifient identiquement la relation

$$dz = p\,dx + q\,dy; \tag{7}$$

on dit alors que deux éléments infiniment voisins d'une telle multiplicité sont *unis*. La relation (7) exprime que le point $(x + dx, y + dy, z + dz)$ est situé dans le plan de coefficients angulaires p, q, passant par le point (x, y, z). Les multiplicités de cette espèce sont représentées par la lettre M_i, l'indice i indiquant le nombre des dimensions de la multiplicité, c'est-à-dire le nombre des variables indépendantes dont dépendent x, y, z, p, q.

Considérons d'abord une multiplicité M_1 ; x, y, z, p, q sont alors des fonctions d'une variable indépendante α, vérifiant la relation (7). Le point x, y, z décrit une courbe Γ, et la condition (7) exprime que le plan de coefficients angulaires p, q correspondant à chaque point de Γ passe par la tangente à Γ en ce point. La multiplicité M_1 est donc formée par l'assemblage d'une courbe Γ et d'une développable Δ passant par cette courbe, chaque point de Γ étant associé au plan tangent à Δ en ce point. Il peut arriver, comme cas particulier, que la courbe Γ se réduise à un point; la

multiplicité M_1 se compose alors de l'ensemble des éléments obtenus en associant un point fixe de l'espace aux plans tangents à un cône quelconque ayant son sommet en ce point.

Si à chaque point d'une surface S on associe le plan tangent en ce point, on obtient une multiplicité d'éléments dépendant de deux paramètres variables, vérifiant identiquement la relation (7), c'est-à-dire une multiplicité M_2. Inversement, étant données cinq fonctions de deux variables indépendantes, satisfaisant à la condition (7), trois cas peuvent se présenter : 1° en général, le point (x, y, z) décrit une surface S ; le plan de coefficients angulaires p, q est alors le plan tangent au point (x, y, z) à cette surface, et la multiplicité M_2 s'obtient en associant chaque point d'une surface au plan tangent en ce point; 2° si un point x, y, z décrit une courbe Γ, la multiplicité M_2 se compose de tous les éléments que l'on obtient en associant chaque point de Γ à un plan quelconque passant par la tangente en ce point; cet assemblage dépend bien de deux paramètres ; 3° il peut aussi arriver que le point (x, y, z) soit fixe, p et q étant les deux paramètres variables. La relation (7) est encore vérifiée, et la multiplicité M_2 se compose de tous les éléments obtenus en associant un point fixe de l'espace à un plan quelconque passant par ce point. Il y a intérêt, pour la généralité de certains théorèmes, à considérer des multiplicités M_2 des trois espèces. Mais, dans la suite, nous ne nous occuperons que des multiplicités M_1 formées d'une courbe et des plans tangents à une développable passant par cette courbe, et des multiplicités M_2 dont chaque élément est formé par un point d'une surface S associé au plan tangent en ce point. Il est clair qu'une surface S ou, plus exactement, la multiplicité M_2 correspondante peut être, d'une infinité de manières, engendrée par une famille de multiplicités M_1 dépendant d'une constante arbitraire. Il suffit en effet de prendre sur S une famille quelconque de courbes dépendant d'un paramètre, et d'associer à chacune de ces courbes la développable circonscrite de S le long de cette courbe.

Avec la terminologie qui vient d'être expliquée, le problème de Cauchy pour une équation du second ordre à deux variables indépendantes peut être posé ainsi : *Étant donnée une multiplicité* M_1, *trouver une surface intégrale à laquelle appartiennent tous les éléments de cette multiplicité.*

473. Équations de Monge-Ampère. Caractéristiques. — Nous allons discuter ce problème, lorsque l'équation du second ordre est linéaire en r, s, t, ou de la forme plus générale considérée par Ampère

$$\text{(8)} \qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

H, K, L, M, N étant des fonctions de x, y, z, p, q. Soient $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $z(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ les coordonnées d'un élément d'une multiplicité M_1, composée d'une courbe Γ, dont chaque point est associé au plan tangent en ce point à une développable Δ passant par cette courbe. Les dérivées secondes r, s, t de la fonction inconnue $z(x, y)$ en un point quelconque de Γ doivent satisfaire à l'équation (8) et aux deux conditions

$$\text{(9)} \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

où x, y, z, p, q sont des fonctions du paramètre λ, et nous avons tout d'abord à résoudre ce système de trois équations en r, s, t. Pour discuter plus facilement ce système, il est commode d'employer la représentation géométrique suivante. Si l'on regarde x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq comme des constantes données, r, s, t comme les coordonnées rectangulaires d'un point, les équations (9) représentent une droite D, parallèle à l'une des génératrices du cône (T) qui a pour équation $rt - s^2 = 0$, tandis que l'équation (8) représente une surface du second degré S, dont le cône (T) est le cône directeur, si N n'est pas nul, ou un plan P. si $N = 0$. Cela posé, les seuls cas qui puissent se présenter sont les suivants :

1° En général, la droite D rencontre la surface S ou le plan P en un seul point à distance finie, et par suite les équations (8) et (9) admettent un seul système de solutions en r, s, t. Le problème de Cauchy a une solution et une seule [1].

2° Il peut se faire que la droite D ne rencontre la surface S ou le plan P en aucun point à distance finie. Le problème de Cauchy n'admet pas de solution holomorphe.

3° Enfin, il peut se faire que la droite D soit située tout entière

---

[1] En effet l'expression (5) (n° 471) n'est pas nulle pour ce système de solutions, car $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial s}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$ sont les paramètres directeurs de la normale à S ou à P, et dy^2, $-dx\,dy$, dx^2 sont les paramètres directeurs de la droite D.

sur la surface S ou le plan P, de sorte que les équations (8) et (9) admettent une infinité de systèmes de solutions en r, s, t, pour chaque point de la courbe Γ. On dit alors que la multiplicité considérée M_1 est une *multiplicité caractéristique*, ou une *caractéristique*.

Pour former les équations qui définissent ces multiplicités, il suffit d'exprimer que la droite D est située tout entière sur la surface représentée par l'équation (8). Supposons d'abord N = o; nous pouvons écrire l'équation (8), en multipliant tous les termes par N,

$$(Nr + L)(Nt + H) - N^2 s^2 + 2KNs + MN - HL = 0,$$

ou encore

$$(10)\qquad (Nr + L)(Nt + H) - (Ns + \lambda_1)(Ns + \lambda_2) = 0,$$

λ_1 et λ_2 étant les deux racines de l'équation du second degré

$$(11)\qquad \lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN = 0,$$

$$(12)\qquad \lambda_1 = -K + \sqrt{K^2 - HL + MN}, \qquad \lambda_2 = -K - \sqrt{K^2 - HL + MN}.$$

L'équation (10) met en évidence les deux systèmes de génératrices rectilignes de S; on obtient toutes ces génératrices en attribuant au paramètre μ toutes les valeurs possibles dans l'un des systèmes d'équations

$$(A)\quad \begin{cases} Nr + L = \mu(Ns + \lambda_1), \\ Ns + \lambda_2 = \mu(Nt + H), \end{cases} \qquad (B)\quad \begin{cases} Nr + L = \mu(Ns + \lambda_2), \\ Ns + \lambda_1 = \mu(Nt + H). \end{cases}$$

Pour que la droite D, représentée par les équations (9), fasse partie de l'un de ces systèmes de génératrices, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer μ de façon qu'on ait

$$\frac{dx}{N} = \frac{dy}{-\mu N} = \frac{dp}{\mu\lambda_1 - L} = \frac{dq}{\mu H - \lambda_2},$$

ou les relations analogues, obtenues en permutant λ_1 et λ_2.

L'élimination de u entre les équations précédentes conduit à deux équations

$$N\,dp + L\,dx + \lambda_1 dy = 0, \qquad N\,dq + \lambda_2 dx + H\,dy = 0.$$

En définitive, toute caractéristique M_1 de l'équation (8) se com-

pose d'un système de *cinq* fonctions x, y, z, p, q d'une variable indépendante satisfaisant à l'un des deux systèmes suivants de *trois* équations

$$(13)_1 \quad \begin{cases} N\,dp + L\,dx + \lambda_1\,dy = 0, \qquad N\,dq + \lambda_2\,dx + H\,dy = 0, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0. \end{cases}$$

$$(13)_2 \quad \begin{cases} N\,dp + L\,dx + \lambda_2\,dy = 0, \qquad N\,dq + \lambda_1\,dx + H\,dy = 0, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0, \end{cases}$$

qui se déduisent l'un de l'autre en permutant λ_1 et λ_2. On voit qu'il y a en général *deux* familles distinctes de caractéristiques, qui sont confondues si l'on a $\lambda_1 = \lambda_2$, c'est-à-dire si S se réduit à un cône, et dans ce cas seulement.

Supposons maintenant $N = 0$; l'équation (8) est alors linéaire en r, s, t,

$$(8') \qquad Hr + 2Ks + Lt + M = 0.$$

La parallèle à la droite D menée par l'origine a pour équations

$$\frac{r}{(dy)^2} = \frac{s}{-dx\,dy} = \frac{t}{(dx)^2};$$

cette parallèle doit être dans le plan $Hr + 2Ks + Lt = 0$, mené par l'origine parallèlement au plan P, ce qui exige qu'on ait

$$(14) \qquad H\,dy^2 - 2K\,dx\,dy + L\,dx^2 = 0.$$

Nous distinguerons encore plusieurs cas :

Premier cas. — Soit $H \neq 0$. On tire de l'équation (14) deux valeurs finies λ_1, λ_2 pour $\frac{dy}{dx}$. Prenons par exemple $dy = \lambda_1\,dx$; les équations (9) donnent ensuite

$$s = \frac{dq}{dx} - \lambda_1 t, \qquad r = \frac{dp}{dx} - \lambda_1 \frac{dq}{dx} + \lambda_1^2 t,$$

et, en portant ces valeurs de r et de s dans l'équation (8'), la condition obtenue s'écrit, en tenant compte des relations entre les coefficients et les racines de l'équation (14),

$$H\,dp + H\lambda_2\,dq + M\,dx = 0.$$

Les équations différentielles des deux systèmes de caractéristiques sont donc les suivantes :

$$(15)_1 \quad \begin{cases} dy = \lambda_1 dx, \quad \text{H}\,dp + \text{H}\lambda_2\,dq + \text{M}\,dx = 0, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0, \end{cases}$$

$$(15)_2 \quad \begin{cases} dy = \lambda_2 dx, \quad \text{H}\,dp + \text{H}\lambda_1\,dq + \text{M}\,dx = 0, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0, \end{cases}$$

λ_1 et λ_2 étant les deux racines de l'équation

$$(16) \qquad \text{H}\lambda^2 - 2\text{K}\lambda + \text{L} = 0.$$

Deuxième cas. — Soient $\text{H} = 0$, $\text{L} \neq 0$. Un calcul tout à fait pareil donne les équations différentielles des deux systèmes de caractéristiques

$$(17)_1 \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad dx = 0, \qquad \text{M}\,dy + 2\text{K}\,dp + \text{L}\,dq = 0,$$
$$(17)_2 \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad 2\text{K}\,dy - \text{L}\,dx = 0, \qquad \text{M}\,dy + \text{L}\,dq = 0.$$

Troisième cas. — Soit $\text{H} = \text{L} = 0$. On a deux systèmes de caractéristiques *toujours distincts*, dont les équations différentielles sont respectivement

$$(18)_1 \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad dx = 0, \qquad 2\text{K}\,dp + \text{M}\,dy = 0,$$
$$(18)_2 \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad dy = 0, \qquad 2\text{K}\,dq + \text{M}\,dx = 0.$$

On remarquera que la relation

$$(19) \qquad \text{K}^2 - \text{HL} + \text{MN} = 0$$

exprime dans tous les cas la condition nécessaire et suffisante pour que les deux systèmes de caractéristiques se réduisent à un seul.

Les caractéristiques de chaque système dépendent d'une fonction arbitraire, et non pas d'un nombre fini de constantes arbitraires, comme pour une équation du premier ordre. En effet, on a trois relations seulement entre cinq fonctions d'une variable et leurs dérivées ; on peut choisir pour l'une des variables y, z, p, q une fonction arbitraire de x, et il reste un système de trois équations différentielles du premier ordre pour déterminer les trois autres fonctions. Prenons par exemple une équation de la forme

$$s = f(x, y, z, p, q);$$

les équations différentielles de l'un des systèmes sont

$$dx = 0, \qquad dz = q\,dy, \qquad dp = f(x, y, z, p, q)\,dy.$$

La première, $dx = 0$, montre que x est constant tout le long de la caractéristique, c'est-à-dire que la courbe Γ est dans un plan parallèle au plan des yz. Inversement, soit Γ une courbe plane quelconque représentée par les deux équations $x = x_0$, $z = \varphi(y)$. On tire de la seconde des équations $q = \varphi'(y)$, tandis que p doit être une intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dy} = f[x_0, y, \varphi(y), p, \varphi'(y)];$$

on peut encore choisir arbitrairement la valeur de p pour une valeur donnée y_0 de y. Toute courbe plane, dont le plan est parallèle au plan des yz, appartient donc à une infinité de multiplicités caractéristiques dépendant d'une constante arbitraire ([1]). Il est clair, par raison de symétrie, qu'il en est de même de toute courbe plane dont le plan est parallèle au plan des xz.

474. Propriétés des caractéristiques. — Le rôle capital des caractéristiques dans la théorie de l'équation (8) est une conséquence du théorème suivant : *Toute intégrale de cette équation peut être engendrée, de deux façons différentes, par des caractéristiques.*

On peut encore énoncer cette propriété d'une façon plus précise : *Tout élément d'une intégrale fait partie d'une caractéristique de chacun des systèmes, dont tous les éléments appartiennent à cette intégrale.*

Supposons, pour fixer les idées, $N \neq 0$. Soit $z = f(x, y)$ une intégrale de l'équation (8); si l'on remplace, dans les deux premières équations $(13)_1$, z, p, q, r, s, t par $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ respectivement, on obtient deux équations différentielles du pre-

---

([1]) Les équations générales des caractéristiques d'une équation $s = f(x, y, z)$ peuvent être obtenues explicitement. Si l'on prend en effet $x = x_0$, $p = \varphi(y)$, la dernière équation $dq = f\,dy$ donnera z, et la seconde donne ensuite $q = \frac{dz}{dy}$.

mier ordre

$$(20)\qquad \begin{cases} (Nr+L)\,dx+(Ns+\lambda_1)\,dy=0,\\ (Ns+\lambda_2)\,dx+(Nt+H)\,dy=0, \end{cases}$$

qui se réduisent à une seule, puisque l'élimination de $\frac{dy}{dx}$ conduit précisément à l'équation (10). Il existe donc, sur la surface intégrale considérée, une famille de courbes, dépendant d'une constante arbitraire, satisfaisant aux deux équations équivalentes (20). Soit C l'une de ces courbes; les éléments du premier ordre de l'intégrale le long de C forment une multiplicité M_1, qui est une multiplicité caractéristique. En effet, en vertu des relations

$$dp=r\,dx+s\,dy,\qquad dq=s\,dx+t\,dy,$$

on peut inversement remonter des équations (20) aux équations différentielles $(13)_1$ des caractéristiques. Par chaque point de la surface intégrale il passe donc une courbe C telle que les éléments de la surface le long de cette courbe forment une multiplicité caractéristique du premier système. On verrait de même que, par chaque point de la surface, il passe une courbe C′ telle que les éléments de l'intégrale le long de C′ forment une caractéristique du second système. Les courbes C et C′ constituent les deux familles de *courbes caractéristiques* sur la surface intégrale considérée. Ces deux familles de courbes sont données par une équation différentielle du premier ordre et du second degré. On tire en effet de la première des équations (20)

$$\lambda_1=-(Nr+L)\frac{dx}{dy}-Ns,$$

et, en remplaçant λ_1 par cette expression dans l'équation (11), on aboutit à l'équation différentielle

$$(Nt+H)\,dy^2+2(Ns-K)\,dx\,dy+(Nr+L)\,dx^2=0,$$

qu'on peut encore écrire (*cf.* n° 471)

$$(21)\qquad R\,dy^2-S\,dx\,dy+T\,dy^2=0,$$

R, S, T désignant les dérivées partielles du premier membre de l'équation (8), par rapport à r, s, t respectivement.

Des calculs tout pareils s'appliquent au cas où N est nul. Sur

toute surface intégrale, il existe deux familles de courbes caractéristiques, en général distinctes, qui sont définies par l'équation différentielle du premier ordre et du second degré

$$\text{(22)} \qquad H\,dy^2 - 2K\,dx\,dy + L\,dx^2 = 0;$$

les éléments de la surface intégrale le long de l'une de ces courbes forment une multiplicité caractéristique [1].

Inversement, *si une multiplicité* M_2, *dont chaque élément se compose d'un point d'une surface* S *et du plan tangent en ce point*, *est engendrée par une famille de multiplicités caractéristiques dépendant d'une constante arbitraire*, *la surface correspondante* S *est une surface intégrale.*

Nous raisonnerons toujours en supposant que N n'est pas nul. Par hypothèse, par chaque point de la surface S passe une courbe C telle que la multiplicité M_1 formée par les éléments de la surface S tout le long de C soit une multiplicité caractéristique. Supposons, par exemple, que les valeurs de x, y, z, p, q le long de C vérifient le système $(13)_1$. Les deux premières équations $(13)_1$ peuvent s'écrire sous la forme équivalente (20) et, pour que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ tirées de ces deux équations soient les mêmes, il est nécessaire que les valeurs r, s, t satisfassent à l'équation (10), c'est-à-dire que S soit une surface intégrale de l'équation proposée. La démonstration serait toute pareille si N était nul.

Il résulte de ces théorèmes que tout système de trois équations différentielles

$$\text{(23)} \qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \qquad A\,dp + B\,dq + F\,dx + G\,dy = 0, \\ \qquad\qquad A_1\,dp + B_1\,dq + F_1\,dx + G_1\,dy = 0, \end{cases}$$

A, B, ..., G_1 étant des fonctions quelconques de x, y, z, p, q (l'un au moins des coefficients A, B, A_1, B_1 n'étant pas nul), définit un des systèmes de caractéristiques d'une équation de Monge-Ampère; on obtiendrait cette équation en remplaçant dp par $r\,dx + s\,dy$,

[1] Le raisonnement est en défaut pour les intégrales qui vérifient à la fois les trois équations $R = S = T = 0$. De telles intégrales, s'il en existe, sont des intégrales *singulières*, auxquelles on ne peut appliquer le théorème de Cauchy, quelle que soit la multiplicité M_1 prise sur l'une d'elles.

dq par $s\,dx + t\,dy$, et éliminant $\frac{dy}{dx}$. L'équation contiendra un terme en $rt - s^2$ si $AB_1 - BA_1$ n'est pas nul, et sera linéaire en r, s, t dans le cas contraire.

On a aussi étudié les caractéristiques au point de vue du problème de Cauchy. Nous avons vu plus haut que, quand on se propose de résoudre ce problème pour une multiplicité caractéristique M_1, une des dérivées du second ordre peut être prise arbitrairement. Si l'on passe au calcul des dérivées suivantes, on trouve de même que, dans chaque ordre, la valeur d'une dérivée peut être prise arbitrairement, du moins lorsque les deux systèmes de caractéristiques sont distincts. *L'indétermination est réelle;* cela résulte des propositions suivantes, dont nous donnerons seulement l'énoncé ([1]), et qui se démontrent par les méthodes habituelles du calcul des limites.

Lorsque les deux familles de caractéristiques sont distinctes :

I. *Toute caractéristique appartient à une infinité d'intégrales, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires.*

II. *Lorsque deux intégrales, admettant tous les éléments d'une caractéristique, ont un contact d'ordre n, en un point de cette caractéristique, elles ont un contact d'ordre n en tous les points de la caractéristique.*

III. *Une caractéristique et une courbe* Γ *rencontrant la courbe caractéristique en un point* M *déterminent une intégrale et une seule, pourvu que la tangente en* M *à* Γ *soit dans le plan de l'élément correspondant.*

IV. *En particulier, deux caractéristiques de systèmes différents, ayant un élément commun, déterminent une surface intégrale et une seule.*

Les énoncés sont moins simples lorsque les deux familles de caractéristiques ne sont pas distinctes.

475. **Intégrales intermédiaires.** — Les trois équations différentielles qui définissent les caractéristiques, renfermant cinq variables x, y, z, p, q, ne peuvent être intégrées, comme un système

([1]) E. Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre* (I, Chap. 4; II, Chap. 10).

d'équations différentielles ordinaires. On peut cependant chercher s'il existe des *intégrales premières* pour ces équations ; nous dirons que la relation $V(x, y, z, p, q) = \text{const.}$ est une intégrale première des équations $(13)_1$ par exemple, lorsque la relation $dV = 0$ est une conséquence de ces trois équations. Lorsqu'il en est ainsi, il est clair que la fonction $V(x, y, z, p, q)$ conserve la même valeur tout le long d'une caractéristique quelconque de ce système, cette valeur étant variable d'une caractéristique à l'autre. Si dans dV on remplace dz, dp, dq par leurs expressions tirées des formules $(13)_1$, on trouve

$$\begin{aligned} dV = & \left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{L}{N}\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\lambda_2}{N}\frac{\partial V}{\partial q}\right)dx \\ & + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\lambda_1}{N}\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{H}{N}\frac{\partial V}{\partial q}\right)dy; \end{aligned}$$

pour que les équations $(13)_1$ entraînent la relation $dV = 0$, il faut et il suffit que V vérifie les deux conditions

$$(24) \qquad \begin{cases} N\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} + p\dfrac{\partial V}{\partial z}\right) - L\dfrac{\partial V}{\partial p} - \lambda_2\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0, \\ N\left(\dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z}\right) - \lambda_1\dfrac{\partial V}{\partial p} - H\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0. \end{cases}$$

On raisonnerait de même dans tous les autres cas, et le résultat obtenu peut s'énoncer ainsi : *Pour que $V(x, y, z, p, q) = C$ soit une intégrale première des équations différentielles d'un des systèmes de caractéristiques, il faut et il suffit que la fonction V soit une intégrale du système de deux équations linéaires qu'on obtient, en remplaçant, dans les équations différentielles des caractéristiques de l'autre système, dx, dy, dp, dq, par*

$$\frac{\partial V}{\partial p}, \quad \frac{\partial V}{\partial q}, \quad -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right), \quad -\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

respectivement.

Si $V(x, y, z, p, q)$ est une intégrale des équations (24), on a identiquement, d'après la façon même dont on a obtenu ce système,

$$\begin{aligned} dV = \frac{\partial V}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy) & + \frac{1}{N}\frac{\partial V}{\partial p}(N\,dp + L\,dx + \lambda_1 dy), \\ & + \frac{1}{N}\frac{\partial V}{\partial q}(N\,dq + \lambda_2\,dx + H\,dy); \end{aligned}$$

inversement, si l'on a obtenu, par un moyen quelconque, trois multiplicateurs μ_1, μ_2, μ_3, tels qu'on ait identiquement

$$dU = \mu_1(dz - p\,dx - q\,dy) + \mu_2(N\,dp + L\,dx + \lambda_1 dy) + \mu_3(N\,dq + \lambda_2 dx + H\,dy),$$

il est clair que $U = C$ est une intégrale première pour ce système de caractéristiques. La recherche des intégrales premières revient donc aussi à la recherche des combinaisons intégrables des équations différentielles des caractéristiques (*cf.* II, n° 393).

Lorsque les fonctions L, H, N, λ_1, λ_2 sont quelconques, le système (24) n'admet pas d'autre solution que la solution banale $V = C$. On a déjà vu comment on peut reconnaître si ce système admet d'autres intégrales, et obtenir ces intégrales en intégrant des équations différentielles ordinaires (II, n°s 450-451).

La connaissance d'une intégrale première permet de trouver des intégrales de l'équation du second ordre (8). En effet, *si* $V(x, y, z, p, q) = C$ *est une intégrale première des équations différentielles de l'un des systèmes de caractéristiques, toutes les intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre* $V(x, y, z, p, q) = C$ (*sauf peut-être les intégrales singulières*) *sont aussi des intégrales de l'équation du second ordre* (8).

Supposons toujours $N \neq 0$, et soit V une intégrale du système (24). Toute intégrale non singulière S de l'équation du premier ordre $V = C$ est un lieu de courbes caractéristiques, et la multiplicité M_1, formée par les éléments de la surface le long d'une de ces courbes, satisfait aux équations différentielles (II, n° 447)

$$(25)\qquad \frac{dx}{\frac{\partial V}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial V}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial V}{\partial p} + q\frac{\partial V}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}} = \frac{-dq}{\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}}.$$

En rapprochant ces équations des relations (24), on voit que les éléments de la multiplicité M_1 satisfont aux équations différentielles obtenues en remplaçant, dans les formules (24), $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$, $\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}$ par dx, dy, $-dp$, $-dq$ respectivement, c'est-à-dire aux équations $(13)_2$. Les multiplicités M_1 sont donc aussi des multiplicités caractéristiques pour l'équation (8) et,

par conséquent (n° 474), la surface S est une intégrale de cette équation.

Inversement, *si toutes les intégrales non singulières de l'équation* $V(x, y, z, p, q) = C$ *sont aussi des intégrales de l'équation* (8), *quelle que soit la valeur de la constante* C, $dV = 0$ *est une combinaison intégrable des équations différentielles de l'un des systèmes de caractéristiques de l'équation* (8). En effet, soit M_1 une multiplicité caractéristique de l'équation $V = C$; tous les éléments de M_1 appartiennent à une infinité d'intégrales non singulières de l'équation $V = C$ et, par conséquent, à une infinité d'intégrales de l'équation (8). Toutes les multiplicités M_1, définies par les équations différentielles (25), doivent donc faire partie de l'un des systèmes de caractéristiques, et, par suite, la fonction V doit satisfaire aux relations qu'on déduit des équations différentielles de l'un de ces systèmes en y remplaçant dx, dy, dp, dq par les dénominateurs correspondants des formules (25) [1].

---

[1] On peut aussi établir cette propriété directement. De l'équation

$$V(x, y, z, p, q) = C$$

on déduit, en différentiant par rapport à x et par rapport à y,

$$(e) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p + \frac{\partial V}{\partial p} r + \frac{\partial V}{\partial q} s = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q + \frac{\partial V}{\partial p} s + \frac{\partial V}{\partial q} t = 0.$$

Si, de ces relations, on tire deux des dérivées du second ordre, r et s par exemple, et qu'on les porte dans l'équation (8), le résultat de la substitution doit se réduire à une identité. En effet, si ce résultat n'était pas indépendant de t, on en tirerait la valeur de t et, par suite, on aurait les trois dérivées du second ordre exprimées au moyen de x, y, z, p, q. Des différentiations successives permettraient d'exprimer de proche en proche toutes les dérivées partielles de z au moyen de x, y, z, p, q, et les intégrales communes à l'équation (8) et à $V = C$ ne pourraient dépendre que d'un nombre *fini* de constantes arbitraires. Si le résultat de la substitution est indépendant de t, comme ce résultat ne contient pas C, l'équation (8) ne peut admettre toutes les intégrales de $V = C$, à moins que ce résultat ne soit identiquement nul.

Si donc nous revenons à l'interprétation géométrique du texte, nous pouvons dire que la droite D, représentée par les équations (e), où l'on regarde r, s, t comme des coordonnées courantes, doit être située sur la surface représentée par l'équation (8). Il s'ensuit que V doit satisfaire à l'un des systèmes qu'on obtient en remplaçant dx, dy, dp, dq par

$$-\frac{\partial V}{\partial p}, \quad -\frac{\partial V}{\partial q}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z},$$

Si le système (24), ou l'un des systèmes formés de la même façon en partant des équations différentielles de l'un des systèmes de caractéristiques, admet deux intégrales distinctes u et v, $\varphi(u, v)$ est aussi une intégrale quelle que soit la fonction φ(II, n° 451) et toutes les intégrales non singulières de l'équation $\varphi(u, v) = 0$ sont aussi des intégrales de l'équation du second ordre. Réciproquement, soit S une intégrale de l'équation (8); on peut choisir la fonction φ de façon qu'elle soit aussi une intégrale de l'équation du premier ordre $\varphi(u, v) = 0$. Considérons, en effet, sur la surface S les caractéristiques du système pour lequel $u = C$ et $v = C'$ sont deux intégrales premières, et soit Γ une autre courbe de cette surface, différente de ces caractéristiques. Le long de cette courbe Γ u et v sont fonctions d'un seul paramètre variable et sont liées, par conséquent, par une relation $\varphi(u, v) = 0$; *cette relation subsiste en tous les points de* S. Soit M un point de S; la caractéristique du système considéré qui passe en M rencontre Γ en un point M_0, et, puisque u et v conservent la même valeur quand on se déplace sur cette caractéristique, on a aussi $\varphi(u, v) = \varphi(u_0, v_0) = 0$. On voit donc que *toute intégrale de l'équation du second ordre* (8) *satisfait aussi à une équation du premier ordre de la forme* $\varphi(u, v) = 0$, *et réciproquement.*

L'équation $\varphi(u, v) = 0$, que l'on peut aussi écrire $v = \psi(u)$ et qui dépend d'une fonction arbitraire, s'appelle une *intégrale intermédiaire* (¹) de l'équation du second ordre.

On peut vérifier par un calcul direct que l'équation $\varphi(u, v) = 0$ est équivalente à l'équation (8). Désignons par $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}$ les dérivées de u et de v, prises en regardant z comme une fonction des variables x et y, p et q comme ses dérivées partielles; de l'équation $\varphi(u, v) = 0$, on déduit une équation du second ordre, indépendante de la fonction φ,

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} = 0,$$

---

respectivement dans les équations différentielles de l'un des systèmes de caractéristiques.

(¹) On appelle aussi quelquefois *intégrales intermédiaires* toute équation du premier ordre $V = C$, dont toutes les intégrales non singulières vérifient l'équation (8).

ou, en développant,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p+\frac{\partial u}{\partial p}r+\frac{\partial u}{\partial q}s\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q+\frac{\partial v}{\partial p}s+\frac{\partial v}{\partial q}t\right)$$
$$-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p+\frac{\partial v}{\partial p}r+\frac{\partial v}{\partial q}s\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q+\frac{\partial u}{\partial p}s+\frac{\partial u}{\partial q}t\right)=0.$$

Supposons toujours que l'équation (8) ait un terme en $rt-s^2$ et que u et v soient deux intégrales du système (24). Multiplions tous les termes de l'équation précédente par N^2 et remplaçons

$$N\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad N\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \ldots$$

par leurs expressions tirées des formules (24); en tenant compte des valeurs de $\lambda_1+\lambda_2$ et $\lambda_1\lambda_2$, on aboutit, après quelques réductions faciles, à l'équation

$$N\frac{D(u,v)}{D(p,q)}[Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)]=0,$$

qui ne diffère que par un facteur de l'équation (8).

En résumé, *lorsque les équations différentielles de l'un des systèmes de caractéristiques admettent deux combinaisons intégrables distinctes, l'intégration de l'équation de Monge-Ampère est ramenée à l'intégration d'une équation du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire.* On ne peut, en général, effectuer l'intégration de cette équation du premier ordre qu'après avoir pris pour la fonction arbitraire une forme déterminée. Mais la solution du problème de Cauchy se ramène toujours, dans ce cas, à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. En effet, si l'un se donne une multiplicité M_1, les coordonnées d'un élément (x, y, z, p, q) sont des fonctions d'un paramètre variable α. En remplaçant x, y, z, p, q par leurs expressions dans u et v, les résultats obtenus sont des fonctions $U(\alpha)$ et $V(\alpha)$ de α. Pour que tous les éléments de M_1 appartiennent à une intégrale de l'équation $v=\psi(u)$, la fonction ψ doit satisfaire à la relation $V(\alpha)=\psi[U(\alpha)]$ qui détermine, en général, cette fonction. La fonction ψ étant connue, on est ramené au problème de Cauchy pour une équation du premier ordre.

Les équations (24) admettent au plus *trois* intégrales distinctes: pour qu'il en soit ainsi, elles doivent former un système complet (II, n° 451). On vérifiera aisément, en effectuant les calculs, que

cela ne peut avoir lieu que si l'on a $\lambda_1 = \lambda_2$, et cette condition n'est pas suffisante. Soient u, v, w trois intégrales distinctes; l'équation (8) admet alors deux intégrales intermédiaires distinctes $v = \psi(u)$, $w = \pi(u)$. L'équation (8) admet aussi deux intégrales intermédiaires lorsque les deux systèmes de caractéristiques sont distincts, si les équations différentielles de chacun des systèmes admettent deux combinaisons intégrables. Supposons, pour fixer les idées, que les équations (24) admettent deux intégrales distinctes u et v, et que les équations (24)′, obtenues en permutant λ_1 et λ_2,

$$(24)' \qquad \begin{cases} \mathrm{N}\left(\dfrac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x} + p\,\dfrac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial z}\right) - \mathrm{L}\,\dfrac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial p} - \lambda_1 \dfrac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial q} = 0, \\ \mathrm{N}\left(\dfrac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial y} + q\,\dfrac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial z}\right) - \lambda_2 \dfrac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial p} - \mathrm{H}\,\dfrac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial q} = 0, \end{cases}$$

admettent elles-mêmes deux intégrales distinctes u_1 et v_1; l'équation (8) admet alors les deux intégrales intermédiaires $v = \psi(u)$, $v_1 = \pi(u_1)$. Mais on déduit des équations (24) et (24)′

$$\begin{aligned}[\mathrm{V}, \mathrm{V}_1] = {} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x} + p\,\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial z}\right) - \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial p}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + p\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial y} + q\,\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial z}\right) - \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial q}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + q\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right) = 0,\end{aligned}$$

et par suite, $[v - \psi(u),\ v_1 - \pi(u_1)] = 0$, quelles que soient les fonctions arbitraires ψ et π. Il s'ensuit (II, n° **443**) que les deux équations simultanées du premier ordre

$$v = \psi(u), \qquad v_1 = \pi(u_1)$$

forment un système complètement intégrable. Comme on ne peut en général résoudre ces deux équations par rapport aux dérivées p et q, tant que les fonctions ψ et π n'ont pas une forme déterminée, on introduit deux nouvelles variables indépendantes α et β, en posant $u = \alpha$, $u_1 = \beta$, ce qui donne $v = \psi(\alpha)$, $v_1 = \pi(\beta)$. De ces quatre relations on peut maintenant tirer x, y, p, q en fonction de $z, \alpha, \beta, \psi(\alpha), \pi(\beta)$; en remplaçant p, q, dx, dy par leurs valeurs dans la relation $dz = p\,dx + q\,dy$, on aboutit à une équation aux différentielles totales

$$dz = \mathrm{P}\,d\alpha + \mathrm{Q}\,d\beta,$$

où P et Q dépendent de $z, \alpha, \beta, \psi(\alpha), \psi'(\alpha), \pi(\beta), \pi'(\beta)$, qui est

complètement intégrable, quelles que soient les fonctions $\psi(\alpha)$ et $\pi(\beta)$. Cette équation étant intégrée, on aura x, y, z exprimées au moyen de deux paramètres α et β.

476. **Applications diverses. Exemples.** — 1° Les deux systèmes de caractéristiques de l'équation $rt - s^2 = 0$ sont confondus, et les équations différentielles

$$dp = 0, \qquad dq = 0, \qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

admettent trois combinaisons intégrables, car on peut écrire la dernière $d(z - px - qy) = 0$. On a donc deux intégrales intermédiaires

$$q = \varphi(p), \qquad z - px - qy = \psi(p);$$

pour en déduire l'intégrale générale, il suffit de reprendre des calculs déjà effectués (I, n° 214).

2° L'équation $q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$ n'a également qu'un système de caractéristiques, car l'équation (16) devient ici $q^2\lambda^2 + 2pq\lambda + p^2 = 0$ et admet la racine double $-\frac{p}{q}$. Les équations différentielles (15) deviennent dans ce cas

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad p\,dx + q\,dy = 0, \qquad q\,dp - p\,dq = 0;$$

on aperçoit aisément trois combinaisons intégrales

$$dz = 0, \qquad d\left(\frac{q}{p}\right) = 0, \qquad d\left(x + \frac{q}{p}y\right) = 0.$$

L'équation admet donc les deux intégrales intermédiaires $q + p\,\varphi(z) = 0$, $x + \frac{q}{p}y + \psi(z) = 0$ qui s'intègrent sans difficulté. Mais on obtient immédiatement l'intégrale générale de l'équation proposée en éliminant $\frac{q}{p}$ entre les deux intégrales intermédiaires. On est ainsi conduit à l'équation

$$x - y\varphi(z) + \psi(z) = 0,$$

qui représente des surfaces réglées admettant le plan des xy pour plan directeur (II, n° 455).

3° L'équation $(1 + q^2)s - pqt = 0$ exprime que les sections de la surface $z = f(x, y)$ par les plans parallèles au plan $x = 0$ sont des lignes de courbure. Les formules $(17)_1$ et $(17)_2$ nous donnent, pour les équations différentielles des deux systèmes de caractéristiques,

$$(17)'_1 \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad dx = 0, \qquad (1 + q^2)dp - pq\,dq = 0,$$
$$(17)'_2 \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad (1 + q^2)dy + pq\,dx = 0, \qquad dq = 0.$$

Chacun d'eux admet deux combinaisons intégrables; on déduit en effet, des équations $(17)_1$, $dx = 0$, $d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + q^2}}\right) = 0$, et des équations (17), $dq = 0$,

$d(y+qz)=0$. Par suite, l'équation du second ordre admet deux intégrales intermédiaires qu'on peut écrire

$$p=\sqrt{1-q^2}f'(x), \qquad y+qz=\varphi(q),$$

f et φ étant des fonctions arbitraires. On aurait pu obtenir immédiatement la première, en écrivant l'équation du second ordre sous la forme

$$\frac{s}{p}=\frac{qt}{1+q^2}$$

et en observant que les deux membres sont les dérivées, par rapport à y, de $\log p$ et de $\frac{1}{2}\log(1+q^2)$. Cette équation du premier ordre admet l'intégrale complète

$$z=\sqrt{1+a^2}f(x)+ay+b,$$

et l'intégrale générale est représentée par le système des deux équations

$$z=\sqrt{1+a^2}f(x)+ay+\varphi(a), \qquad y+\varphi'(a)+\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}f(x)=0,$$

qui permettent d'exprimer y et z au moyen de x et du paramètre auxiliaire a. Le lecteur vérifiera sans peine que cette solution ne diffère que par les notations de celle qui a été donnée (I, n° 251).

4° L'équation $rt-s^2+a^2=0$, qu'on rencontre dans la théorie mécanique de la chaleur, admet deux systèmes de caractéristiques dont les équations différentielles sont respectivement

$$\text{(I)}\ \begin{cases} dz-p\,dx-q\,dy=0,\\ dp+a\,dy=0,\\ dq-a\,dx=0;\end{cases} \qquad \text{(II)}\ \begin{cases} dz-p\,dx-q\,dy=0,\\ dp-a\,dy=0,\\ dq+a\,dx=0.\end{cases}$$

On aperçoit immédiatement deux combinaisons intégrables pour chacun de ces systèmes, et par suite deux intégrales intermédiaires, que nous écrirons

$$q-ax=\varphi'(p+ay), \qquad q+ax=\psi'(p-ay),$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires. En appliquant la méthode exposée à la fin du paragraphe précédent, posons $p+ay=\alpha$, $p-ay=\beta$; on tire alors des équations précédentes

$$x=\frac{\psi'(\beta)-\varphi'(\alpha)}{2a}, \qquad y=\frac{\alpha-\beta}{2a}, \qquad p=\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad q=\frac{\varphi'(\alpha)+\psi'(\beta)}{2},$$

et en portant ces valeurs de x, y, p, q dans $dz=p\,dx+q\,dy$, il vient

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\alpha+\beta}{4a}(d\psi'-d\varphi')+\frac{\varphi'+\psi'}{4a}(d\alpha-d\beta)\\ &= \frac{\varphi'+\psi'-(\alpha+\beta)\varphi''(\alpha)}{4a}\,d\alpha+\frac{(\alpha+\beta)\psi''(\beta)-\varphi'(\alpha)-\psi'(\beta)}{4a}\,d\beta.\end{aligned}$$

On déduit de là, au moyen d'intégrations par parties,

$$z = \frac{[\varphi'(\alpha) + \psi'(\beta)](\alpha - \beta)}{4a} - \frac{1}{2a}\int \alpha\varphi''(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2a}\int \beta\psi''(\beta)\,d\beta,$$

et enfin

$$z = \frac{(\alpha + \beta)[\psi'(\beta) - \varphi'(\alpha)] + 2\varphi(\alpha) - 2\psi(\beta)}{4a}.$$

On a ainsi les expressions de x, y, z en fonction des deux paramètres variables α et β, et des fonctions arbitraires $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$.

5° Considérons encore l'équation $s = kpz$, qu'on peut écrire

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{2}\,k\,\frac{\partial z^2}{\partial x},$$

et qui admet par conséquent l'intégrale intermédiaire

(26) $$\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{kz^2}{2} = \varphi(y),$$

φ étant une fonction arbitraire. On peut mettre cette fonction φ sous une forme telle que l'intégrale générale de l'équation de Riccati (26) s'obtienne explicitement. Nous savons, en effet, que cette intégrale générale est une fonction rationnelle du premier degré de la constante d'intégration qui est ici une fonction arbitraire de x; elle est donc de la forme

$$z = \theta_1(y) + \frac{\theta_2(y)}{X + \theta_3(y)},$$

θ_1, θ_2, θ_3 étant des fonctions déterminées de y et X une fonction arbitraire de x. Il suffira de choisir les fonctions θ_1, θ_2, θ_3 de façon que le premier membre de l'équation (26) ne renferme pas X pour que z soit l'intégrale générale d'une équation de cette forme (26). On trouve ainsi les conditions

$$\theta_2' - k\theta_1\theta_2 = 0, \qquad 2\theta_2\theta_3' + k\theta_2^2 = 0,$$

qui permettent d'exprimer θ_2 et θ_1 au moyen de θ_3, θ_3', θ_3''. Posons $\theta_3 = Y$, il vient $\theta_2 = -\frac{2}{k}Y'$, puis $\theta_1 = \frac{1}{k}\frac{Y''}{Y'}$, et l'intégrale générale de l'équation $s = kpz$ est par conséquent

(27) $$z = \frac{1}{k}\frac{Y''}{Y'} - \frac{2Y'}{k(X + Y)},$$

X et Y étant deux fonctions arbitraires de x et de y respectivement.

6° L'équation de Liouville $s = e^{kz}$ se ramène à la précédente. Considérons en effet le système de deux équations simultanées

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = e^{ku}.$$

L'élimination de u conduit à l'équation $s = kpz$, tandis que l'élimination de z conduit à l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = e^{ku}$. On en conclut que l'intégrale générale de cette dernière équation est donnée par la formule

$$(28) \qquad e^{ku} = \frac{2X'Y'}{k(X+Y)^2},$$

dont le second membre est la dérivée par rapport à x du second membre de la formule (27).

7° Lorsque l'équation du second ordre n'admet pas d'intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, on ne peut pas trouver l'intégrale générale par cette méthode. Mais si les équations différentielles de l'un des systèmes de caractéristiques admettent *une* combinaison intégrable $dU = 0$, on obtient des intégrales dépendant d'une fonction arbitraire en intégrant l'équation du premier ordre $U = C$. Supposons, par exemple, que dans l'équation linéaire en r, s, t,

$$(29) \qquad Hr + 2Ks + Lt = 0,$$

H, K, L ne dépendent que des variables p, q. Des équations (14) et (15) qui définissent les caractéristiques, on déduit que le long d'une caractéristique on a la relation

$$H\,dp^2 + 2K\,dp\,dq + L\,dq^2 = 0;$$

pour chaque système de caractéristiques, on a une équation différentielle de la forme

$$\lambda_1\,dp + \mu_1\,dq = 0, \qquad \lambda_2\,dp + \mu_2\,dq = 0,$$

λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 ne dépendant que de p et q. Chacun de ces systèmes admet donc une combinaison intégrable $d[u_1(p, q)] = 0$, $d[u_2(p, q)] = 0$, et par suite l'équation (29) admet les intégrales des deux équations du premier ordre

$$u_1(p, q) = C_1, \qquad u_2(p, q) = C_2;$$

ces surfaces intégrales sont développables (II, n° 444).

Dans ses travaux sur le mouvement rectiligne des gaz, Hugoniot [1] (*voir* plus loin, n° 492) a été conduit à chercher une intégrale d'une équation de la forme (29), tangente au plan $z = 0$ tout le long d'une courbe. La théorie des caractéristiques donne aisément la solution de ce problème.

La courbe de contact L est forcément une courbe caractéristique sur la solution $z = 0$, et par suite cette courbe est une intégrale de l'équation différentielle

$$H(0, 0)\,dy^2 - 2K(0, 0)\,dx\,dy + L(0, 0)\,dx^2 = 0,$$

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, t. 33, Cahiers 57 et 58; 1887.

puisqu'on a aussi $p = q = 0$ en tous les points de l'intégrale $z = 0$. Cette courbe est donc une ligne droite D. Cela posé, soit S une surface intégrale tangente au plan des xy tout le long de D; cette surface est engendrée par des caractéristiques du système différent de celui auquel appartient D, issues des différents points de D. Si $du_1 = 0$ est une combinaison intégrable des équations différentielles de ce système, $u_1(p, q)$ est constant tout le long de chacune de ces caractéristiques, et par conséquent est égal à $u_1(0, 0)$ en tous les points de S. Il s'ensuit que la surface S est une intégrale de l'équation du premier ordre $u_1(p, q) = u_1(0, 0)$, et inversement toute surface intégrale de cette équation est une solution du problème, pourvu qu'elle soit tangente au plan des xy. Pour achever de déterminer la question, il faudra se donner une condition de plus, par exemple assujettir la surface cherchée à passer par une courbe qui, naturellement, doit être tangente au plan des xy. Le problème revient alors à déterminer une surface développable passant par une courbe donnée, et admettant pour cône directeur un cône donné. On obtiendra cette surface en menant par chaque tangente à la courbe un plan parallèle à un plan tangent au cône directeur (II, n° 444).

On obtiendrait une autre famille de solutions en partant de l'équation du premier ordre $u_2(p, q) = u_2(0, 0)$.

II. — MÉTHODE DE LAPLACE. CLASSIFICATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

477. **Intégrales intermédiaires d'une équation linéaire.** — Les deux systèmes de caractéristiques de l'équation

$$s + ap + bq + cz + g = 0, \tag{30}$$

où a, b, c, g sont des fonctions de x, y, sont toujours distincts, et leurs équations différentielles sont respectivement

$$(31)_1 \quad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dx = 0, \\ dp + (ap + bq + cz + g)\,dy = 0, \end{cases}$$

$$(31)_2 \quad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dy = 0, \\ dq + (ap + bq + cz + g)\,dx = 0. \end{cases}$$

Chacun de ces systèmes admet une combinaison intégrable $dx = 0$, ou $dy = 0$; pour qu'il y ait une intégrale intermédiaire, il faut et il suffit que l'un d'eux admette une seconde combinaison intégrable. D'après une proposition générale énoncée plus

haut (n° 475) et facile à vérifier dans le cas actuel, pour que la relation $dV = 0$ soit une conséquence des équations (31), par exemple, la fonction V doit satisfaire aux deux conditions

$$\frac{\partial V}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p - \frac{\partial V}{\partial q}(ap + bq + cz + g) = 0.$$

La première montre que V doit être indépendant de p, et par suite il faudra que le coefficient de p et le terme indépendant de p soient nuls séparément dans la seconde relation; ce qui permet de remplacer le système précédent par le système

$$(32) \quad A(V) = \frac{\partial V}{\partial x} - (bq + cz + g)\frac{\partial V}{\partial q} = 0, \qquad B(V) = \frac{\partial V}{\partial z} - a\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

où V est une fonction inconnue de x, y, z, q. Ce système admet déjà la solution $V = y$; pour qu'il admette une autre solution, ne se réduisant pas à une fonction de y, il faut et il suffit qu'il soit un système jacobien (II, n° 451), c'est-à-dire qu'on ait identiquement $A[B(V)] = B[A(V)]$, ou $A(a) = B(bq + cz + g)$. Cette condition se réduit à $\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0$.

Sans qu'il soit nécessaire d'intégrer le système (32), on peut voir directement que cette condition est suffisante pour qu'il existe une intégrale intermédiaire, car l'équation proposée (30) peut toujours s'écrire

$$(33) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c\right)z + g = 0.$$

Lorsque $\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$ est nul, l'équation (33) se ramène à une équation linéaire du premier ordre

$$(34) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + bu + g = 0,$$

en prenant pour inconnue auxiliaire $u = \frac{\partial z}{\partial y} + az$. L'intégrale générale de l'équation (34)

$$u = e^{-\int b\,dx}\left(Y - \int g e^{\int b\,dx}\,dx\right)$$

nous conduit donc à une intégrale intermédiaire de l'équation (30)

$$(35) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} + az = e^{-\int b\,dx}\left(\mathrm{Y} - \int g\, e^{\int b\,dx}\,dx\right),$$

où Y est une fonction arbitraire de y. Cette équation du premier ordre peut à son tour être intégrée comme une équation différentielle ordinaire où la variable indépendante est y, et l'intégrale générale de l'équation (30) est représentée par la formule

$$e^{\int a\,dy} z = \mathrm{X} + \int e^{\int a\,dy - \int b\,dx}\left(\mathrm{Y} - \int g\, e^{\int b\,dx}\,dx\right) dy,$$

X étant une fonction arbitraire de x. On voit que cette intégrale est de la forme

$$(36) \qquad z = \alpha \mathrm{X} + \beta + \int \gamma \mathrm{Y}\, dy,$$

α, β, γ étant des fonctions déterminées de x et de y; l'une des fonctions arbitraires X y figure explicitement, tandis que la seconde fonction arbitraire Y est engagée sous le signe intégral.

En intervertissant le rôle des variables x et y, on verra de même qu'il y a une intégrale intermédiaire lorsque $\frac{\partial b}{\partial y} + ab - c$ est nul. L'intégrale générale est représentée par une formule analogue à la formule (36), qui s'en déduirait en permutant x et y, X et Y.

Les deux expressions $h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$, $k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c$ s'appellent les *invariants* de l'équation (30); on vérifie facilement que ces invariants ne changent pas quand on fait un changement d'inconnue tel que $c = \lambda(x, y) z'$, quelle que soit la fonction $\lambda(x, y)$. Le résultat qui vient d'être établi peut s'énoncer ainsi : *Pour que l'équation* (30) *admette une intégrale intermédiaire, il faut et il suffit que l'un des invariants h ou k soit nul.*

Exemple. — Prenons l'équation $(x - y)s - q = 0$, pour laquelle l'invariant h est nul; elle admet l'intégrale intermédiaire $q = \mathrm{Y}(x - y)$, et par conséquent l'intégrale générale a pour expression

$$z = \mathrm{X} + \int \mathrm{Y}(x - y)\, dy.$$

Pour faire disparaître tout signe de quadrature, il suffit de remplacer la fonction arbitraire Y par la dérivée seconde Y″ d'une fonction arbitraire, ce qui donne, pour l'intégrale générale, une forme entièrement explicite

$$z = X + Y + (x - y)Y'.$$

Remarque. — Il peut se faire que les deux invariants h et k soient nuls simultanément. S'il en est ainsi, on a $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y}$ et a et b sont les dérivées partielles d'une fonction $\lambda(x, y)$, $a = \frac{\partial \lambda}{\partial y}$ $b = \frac{\partial \lambda}{\partial x}$, et en outre on a

$$c = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial y}.$$

En posant $z = e^{-\lambda}u$, on ramène l'équation (30) à une équation dont l'intégration est immédiate $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + g(x, y)\, e^{\lambda} = 0$.

478. Transformations de Laplace. — Si aucun des invariants h et k n'est nul, l'équation (30) n'admet pas d'intégrale intermédiaire. Laplace [1] a fait connaître une méthode de transformation qui permet d'intégrer l'équation dans un nombre illimité de cas nouveaux. Supposons, pour fixer les idées, $h \neq 0$. En posant

$$\frac{\partial z}{\partial y} + az = z_1, \tag{37}$$

nous avons déjà observé que l'équation (30) peut s'écrire

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 + g = hz. \tag{38}$$

Considérons les équations (37) et (38) comme un système de deux équations simultanées à deux inconnues z et z_1. L'élimination de z_1 conduit évidemment à l'équation (30), que nous appellerons désormais l'*équation* (E). Au contraire, en éliminant z, on est

---

(1) *Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles* (*Mémoires de l'Académie*, 1773). Nous n'indiquons que le principe de la méthode, et nous renverrons le lecteur désireux d'approfondir ce sujet aux beaux Chapitres que M. Darboux lui a consacrés (*Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II).

conduit à une équation de même forme (E_1), où l'inconnue est z_1

$$(E_1) \qquad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} + a_1\frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1\frac{\partial z_1}{\partial y} + c_1 z_1 + g_1 = 0,$$

les coefficients a_1, b_1, c_1 et g_1 ayant les valeurs ci-dessous :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a - \dfrac{\partial \log h}{\partial y}, \qquad b_1 = b, \qquad c_1 = c - \dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial b}{\partial y} - b\dfrac{\partial \log h}{\partial y}, \\ g_1 = g\left(a - \dfrac{\partial \log h}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial g}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Il est clair que l'intégration de l'équation (E_1) et celle de l'équation (E) constituent deux problèmes équivalents, car les formules (37) et (38) font correspondre une à une les intégrales des deux équations. Or les invariants h_1 et k_1 de (E_1) ont pour valeurs, comme le prouve un calcul facile,

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_1 = \dfrac{\partial a_1}{\partial x} + a_1 b_1 - c_1 = 2h - k - \dfrac{\partial^2 \log h}{\partial x\,\partial y}, \\ k_1 = \dfrac{\partial b_1}{\partial y} + a_1 b_1 - c_1 = h; \end{array} \right.$$

k_1 ne peut être nul puisqu'on a supposé $h \neq 0$, mais il peut arriver que h_1 soit nul, sans qu'aucun des invariants h et k soit nul. S'il en est ainsi, l'équation (E_1) admet une intégrale intermédiaire et l'intégrale générale est représentée par une formule telle que (36), avec deux fonctions arbitraires X et Y. D'après la formule (38), on en déduit pour l'intégrale générale de (E) une expression de la forme

$$z = A_0 X + A_1 X' + B + \int C Y\, dy,$$

A_0, A_1, B, C étant des fonctions déterminées de x et de y, et X' la dérivée de X.

Tout pareillement, si l'invariant k n'est pas nul, les deux équations simultanées

$$(41) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + bz = z_{-1}, \qquad \frac{\partial z_{-1}}{\partial y} + a z_{-1} + g = kz$$

conduiront, par l'élimination de z_{-1}, à l'équation (E) elle-même,

et, par l'élimination de z, à une nouvelle équation (E_{-1})

$$(E_{-1}) \qquad \frac{\partial^2 z_{-1}}{\partial x\, \partial y} + a_{-1}\frac{\partial z_{-1}}{\partial x} + b_{-1}\frac{\partial z_{-1}}{\partial y} + c_{-1} z_{-1} + g_{-1} = 0,$$

avec les expressions suivantes de a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, g_{-1} :

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{-1} = a, \qquad b_{-1} = b - \frac{\partial \log k}{\partial x}, \qquad c_{-1} = c - \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial x} - a\frac{\partial \log k}{\partial x}, \\ & \qquad g_{-1} = g\left(b - \frac{\partial \log k}{\partial x}\right) + \frac{\partial g}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

Les invariants de (E_{-1}) sont respectivement

$$(43) \qquad h_{-1} = k, \qquad k_{-1} = 2k - h - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x\, \partial y}.$$

Si l'invariant k_{-1}, est nul, on pourra intégrer l'équation (E_{-1}) et par suite l'équation (E).

Lorsque aucun des invariants h_{-1}, k_{-1} n'est égal à zéro, on ne peut intégrer de cette façon l'équation (E); on peut alors appliquer les mêmes transformations aux deux équations (E_1), (E_{-1}), mais il est à remarquer que chacune d'elles ne donnera pas naissance à deux équations nouvelles. Prenons par exemple l'équation (E_1), et appliquons-lui la seconde transformation de Laplace en posant

$$z' = \frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1 z_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x} + b z_1.$$

En se reportant à la formule (38) on voit qu'on aura $z' = hz - g$, de sorte que l'équation en z' obtenue se ramène, par une transformation simple, à l'équation (E) elle-même. La première transformation appliquée à (E_{-1}) conduirait de même à une équation qui ne diffère de (E) que par un changement d'inconnue très simple. Au point de vue de l'intégration, il est clair que ces équations peuvent être considérées comme identiques. Par suite, l'application répétée de la méthode de Laplace conduira seulement à une suite linéaire d'équations

$$\ldots (E_{-2}), \quad (E_{-1}), \quad (E), \quad (E_1), \quad (E_2), \quad \ldots$$

à indices positifs et négatifs, dans laquelle chaque équation (E_i)

où $i > 0$ se déduit de (E_{i-1}) par la première transformation et où chaque équation (E_{-j}) où $j > 0$ se déduit de (E_{1-j}) par la deuxième. La suite des équations à indice positif peut être prolongée tant qu'on n'arrive pas à une équation (E_i) pour laquelle h_i soit nul. Si l'on arrive, au bout de i transformations, à une équation (E_i) pour laquelle $h_i = 0$, cette équation est intégrable, et, en remontant de proche en proche, on en déduira l'intégrale générale des équations (E_{i-1}), (E_{i-2}), ..., jusqu'à l'équation (E). Il en sera de même si l'on arrive à une équation (E_{-j}) pour laquelle l'invariant k_{-j} soit nul, en appliquant j fois la seconde transformation de Laplace.

Exemple. — Appliquons la méthode à l'équation

$$(x - y)s + p - q = 0,$$

qui n'admet pas d'intégrale intermédiaire. Posons pour cela

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{z}{x - y};$$

l'équation s'écrit

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{z_1}{x - y} + \frac{2z}{(x - y)^2} = 0,$$

et l'élimination de z conduit à l'équation en z_1

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} - \frac{\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial z_1}{\partial y}}{x - y} = \frac{2z_1}{(x - y)^2} = 0.$$

Cette nouvelle équation est intégrable, car on peut l'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{z_1}{x - y}\right) - \frac{1}{x - y}\left(\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{z_1}{x - y}\right) = 0,$$

et l'on en déduit qu'elle admet l'intégrale intermédiaire

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{z_1}{x - y} = Y(x - y),$$

Y étant une fonction arbitraire de y. L'intégrale générale est donc

$$z_1 = \frac{2X + \int Y(x - y)^2\, dy}{x - y};$$

pour faire disparaître tout signe de quadrature, il suffit de remplacer Y

par Y″, ce qui donne

$$z_1 = 2\frac{X+Y}{x-y} + 2Y' + (x-y)Y''.$$

On trouve finalement, pour l'intégrale générale de l'équation en z,

$$z = (x-y)(Y'-X') + 2X + 2Y.$$

La méthode de Laplace n'est qu'une application particulière d'une méthode plus générale, due à G. Darboux, qui s'étend à toutes les équations du second ordre à deux variables indépendantes. Malgré tout l'intérêt de cette méthode, les équations qu'elle permet d'intégrer forment une classe très particulière, et les équations du second ordre susceptibles d'une intégration formelle sont exceptionnelles. Aussi, au lieu de chercher l'intégrale générale, on cherche surtout à déterminer les intégrales particulières satisfaisant à des conditions données, suffisantes pour les déterminer. Ces conditions, empruntées le plus souvent à des problèmes de Physique mathématique, sont très différentes, suivant que les caractéristiques sont réelles ou imaginaires. Ceci nous amène à indiquer une classification des équations du second ordre basée sur ce caractère.

479. **Les trois types d'équations linéaires.** — Considérons en particulier une équation de la forme

$$(44)\qquad Ar + 2Bs + Ct + F(x, y, z, p, q) = 0,$$

les coefficients A, B, C ne dépendant que des variables indépendantes x et y. Sur toute surface intégrale, les deux familles de courbes caractéristiques s'obtiennent par l'intégration de l'équation différentielle

$$(45)\qquad A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0,$$

qui est indépendante de l'intégrale considérée. Ces courbes se projettent donc sur le plan des xy suivant les deux familles de courbes qui satisfont à l'équation (45) du premier ordre et du second degré. Inversement, toute courbe de cette espèce est la projection sur le plan des xy d'une infinité de caractéristiques de l'équation (30).

En effet, l'équation (45) se décompose en deux équations du

premier ordre et du premier degré

$$(45)_1 \quad a_1\,dy + b_1\,dx = 0, \qquad (45)_2 \quad a_2\,dy + b_2\,dx = 0,$$

a_1, b_1, a_2, b_2 étant des fonctions de x et de y, dont chacune convient à l'un des systèmes de caractéristiques. Considérons en particulier l'un de ces systèmes défini par les trois équations

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad a_1\,dy + b_1\,dx = 0, \qquad \mathrm{E}\,dp + \mathrm{G}\,dq + \mathrm{H}\,dx = 0,$$

E, G, H étant des fonctions de x, y, z, p, q dont il est inutile d'écrire l'expression. Soit Γ une courbe de l'espace se projetant sur le plan des xy suivant une courbe C_1 le long de laquelle on a

$$a_1\,dy + b_1\,dx = 0;$$

x, y, z étant des fonctions connues d'un paramètre α, la relation $dz = p\,dx + q\,dy$ permet d'exprimer l'une des deux inconnues, p par exemple, en fonction de q et de α. En portant ces valeurs de x, y, z, p dans la dernière équation

$$\mathrm{E}\,dp + \mathrm{G}\,dq + \mathrm{H}\,dx = 0,$$

on arrive à une équation différentielle du premier ordre pour déterminer q. On voit donc que la courbe Γ appartient en général à une infinité de multiplicités caractéristiques de l'équation (44), dépendant d'une constante arbitraire. Nous appellerons souvent, pour abréger, *courbes caractéristiques de l'équation* (44) les deux familles de courbes planes du plan des xy, définies par l'équation différentielle (45); c'est là une locution abrégée dont le sens ne peut présenter aucune ambiguïté.

Lorsque les coefficients A, B, C sont des fonctions réelles des variables réelles x et y, nous sommes conduits à introduire la distinction suivante. Si $B^2 - AC$ est *positif*, les deux familles de caractéristiques sont réelles et distinctes; l'équation (44) est du *type hyperbolique*. Si $B^2 - AC$ est *négatif*, les deux familles de caractéristiques sont imaginaires; l'équation (44) est du *type elliptique*. Enfin, si $B^2 - AC$ est *nul*, il n'y a qu'une famille de caractéristiques qui est réelle; l'équation appartient au *type parabolique*. Il est évident qu'une même équation peut appartenir à des types différents suivant la région du plan considérée.

Les deux familles de caractéristiques étant supposées distinctes,

soient $\xi(x, y) = \text{const.}$, $\eta(x, y) = \text{const.}$, les formules qui représentent l'intégrale générale des équations $(45)_1$ et $(45)_2$ respectivement; $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ vérifient respectivement les deux équations

$$a_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} - b_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \qquad a_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} - b_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

et par conséquent sont des intégrales de l'équation du premier ordre

$$(46) \qquad A \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + C \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Cela posé, imaginons qu'on prenne $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ pour nouvelles variables indépendantes; l'équation (44) se change en une nouvelle équation de même forme

$$(47) \qquad A_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \, \partial \eta} + C_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + F_1\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0.$$

dont les caractéristiques sont les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$A_1 \, d\eta^2 - 2B_1 \, d\xi \, d\eta + C_1 \, d\xi^2 = 0.$$

Or, d'après la définition même des multiplicités caractéristiques (n° **473**), il est clair que les caractéristiques de la nouvelle équation (47) correspondent aux caractéristiques de la première. Ce sont donc les deux familles de droites $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$, et l'on a $A_1 = C_1 = 0$, de sorte que l'équation (47) ne renferme que la dérivée du second ordre $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$. On dit alors que *l'équation est rapportée à ces caractéristiques.*

Lorsque l'équation (44) est du type parabolique, on prendra pour $\xi(x, y)$ une intégrale de l'équation (46), la seconde variable $\eta(x, y)$ étant une fonction quelconque distincte de ξ. La nouvelle équation ne doit admettre qu'un système de caractéristiques, composé des droites $\xi = \text{const.}$ Les deux coefficients A_1 et B_1 doivent donc être nuls, et l'équation (47) ne renferme qu'une dérivée du second ordre $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$. Ces résultats, que la théorie générale des caractéristiques rend intuitifs, sont faciles à vérifier par le calcul. On trouve en effet, d'après les formules générales du changement de variables, que les coefficients A_1, B_1, C_1 ont les valeurs

suivantes, quelles que soient les fonctions $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$:

$$(48)\quad \begin{cases} A_1 = A\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2, \\ B_1 = A\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) + C\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial y}, \\ C_1 = A\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2; \end{cases}$$

les coefficients A_1 et C_1 sont bien nuls quand on prend pour ξ, η deux intégrales distinctes de l'équation (46). Si $B^2 - AC = 0$, l'équation (46) peut s'écrire sous les deux formes équivalentes

$$A\,\frac{\partial f}{\partial x} + B\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad B\,\frac{\partial f}{\partial x} + C\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

et A_1 et B_1 seront nuls, pourvu que ξ soit une intégrale de cette équation.

Lorsque l'équation (44) appartient au type elliptique, la transformation précédente introduit deux variables imaginaires conjuguées $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$. Si l'on ne veut employer que des transformations et des variables réelles, il suffit de prendre, au lieu de ξ, η, les deux variables réelles $X = \xi + \eta$, $Y = \dfrac{\xi - \eta}{i}$, ce qui remplace $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}$ par $\dfrac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial Y^2}$. En définitive, toute équation de la forme (44), dont les coefficients A, B, C sont réels, peut être ramenée, par un choix convenable de variables réelles, à l'une des trois formes canoniques suivantes, dont chacune convient à un type particulier [1] :

$$(\text{H})\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} + f\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right) = 0 \qquad \text{(type hyperbolique);}$$

$$(\text{E})\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + f\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right) = 0 \qquad \text{(type elliptique);}$$

$$(\text{P})\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + f\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right) = 0 \qquad \text{(type parabolique).}$$

---

[1] On peut arriver directement à la forme canonique qui convient au type elliptique sans employer aucun symbole imaginaire. Si l'on prend en effet pour nouvelles variables deux fonctions $\xi(x, y)$ $x(x, y)$ satisfaisant aux deux

Lorsque l'équation (44) est *complètement linéaire*, c'est-à-dire linéaire par rapport à z et à toutes ses dérivées, il en est de même de l'équation transformée (47), quelles que soient les nouvelles variables ξ, η. Les trois formes canoniques sont donc les suivantes :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} + a\frac{\partial z}{\partial\xi} + b\frac{\partial z}{\partial\eta} + cz + g = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + a\frac{\partial z}{\partial\xi} + b\frac{\partial z}{\partial\eta} + cz + g = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + a\frac{\partial z}{\partial\xi} + b\frac{\partial z}{\partial\eta} + cz + g = 0,$$

a, b, c, g étant fonctions des variables ξ, η seulement. La seconde forme se ramène à la première, si l'on introduit des variables complexes.

Exemples : 1° L'équation $rx^2 - ty^2 = 0$ est du type hyperbolique; les caractéristiques se projettent sur le plan des xy suivant les deux familles de courbes $xy = C$, $\frac{y}{x} = C'$. Prenons pour nouvelles variables $\xi = xy$, $= \frac{y}{x}$; on a

$$p = y\frac{\partial z}{\partial\xi} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial\eta}, \qquad q = x\frac{\partial z}{\partial\xi} + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial\eta},$$

$$r = y^2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial z}{\partial\eta},$$

$$t = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\frac{1}{x^2}.$$

L'équation proposée se change en une équation où les deux invariants h et k sont nuls (n° **477**), et dont l'intégration est facile,

$$2\xi\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial z}{\partial\eta} = 0.$$

équations

$$\text{(E)}\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{B}{A}\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}\frac{\partial\eta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{B}{A}\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

on trouve une équation transformée dans laquelle, il est facile de le vérifier, on a $A_1 = C_1$, $B_1 = 0$. Mais l'intégration de ce système revient au fond à celle de l'équation

$$\frac{\partial(\xi + i\eta)}{\partial x} = \left(\frac{-B + i\sqrt{AC-B^2}}{A}\right)\frac{\partial(\xi + i\eta)}{\partial y},$$

qui est équivalente à l'équation (46).

2° L'équation $ry^2+tx^2=0$ appartient au type elliptique; les courbes intégrales de l'équation $y^2dy^2+x^2dx^2=0$ sont imaginaires.

En posant $x^2=\xi$, $y^2=\eta$, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=0.$$

480. Étude du problème de Cauchy dans un cas particulier. — La distinction entre les équations hyperboliques et elliptiques peut s'étendre évidemment aux équations du second ordre de forme quelconque, suivant la nature des caractéristiques. Cette distinction n'intervient pas dans la recherche des intégrales intermédiaires; mais, dans le cas elliptique, tous les raisonnements basés sur la théorie des caractéristiques supposent implicitement qu'il s'agit d'intégrales analytiques. Il est à remarquer d'ailleurs que des formules, presque identiques en apparence, peuvent avoir des interprétations tout à fait différentes, suivant le type de l'équation à laquelle elles se rapportent. Pour bien mettre en évidence ce point essentiel, nous allons étudier le problème de Cauchy pour les deux équations $s=0$, $r+t=0$.

Prenons d'abord l'équation $s=0$. Soit M_1 une multiplicité définie par cinq fonctions *réelles* $x=f_1(\alpha)$, $y=f_2(\alpha)$, $z=f_3(\alpha)$, $p=\varphi_1(\alpha)$, $q=\varphi_2(\alpha)$ de la variable α, satisfaisant à la relation $f_3'(\alpha)=\varphi_1(\alpha)f_1'(\alpha)+\varphi_2(\alpha)f_2'(\alpha)$. L'équation $s=0$ admet deux intégrales intermédiaires $p=\psi(x)$, $q=\pi(y)$ et, pour avoir l'intégrale qui renferme tous les éléments de M_1, nous devons d'abord déterminer les fonctions arbitraires ψ et π par les deux conditions

$$\varphi_1(\alpha)=\psi[f_1(\alpha)],\qquad \varphi_2(\alpha)=\pi[f_2(\alpha)];$$

ces fonctions étant déterminées, l'intégrale cherchée a pour expression

$$z=z_0+\int_{x_0}^{x}\psi(x)\,dx-\int_{y_0}^{y}\pi(y)\,dy,$$

x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées d'un point de la courbe donnée, correspondant à une valeur α_0 du paramètre. Faisons le changement de variables

$$(49)\qquad x=f_1(u),\qquad y=f_2(v);$$

l'expression de z devient, en tenant compte des relations qui déterminent les fonctions ψ et π,

$$(50)\qquad z=z_0+\int_{\alpha_0}^{u}\varphi_1(u)f_1'(u)\,du+\int_{\alpha_0}^{v}\varphi_2(v)f_2'(v)\,dv.$$

Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface cherchée sont ainsi exprimées au moyen de deux paramètres u et v par les formules (49) et (50). En supposant $v=u$, on retrouve bien la courbe donnée.

Proposons-nous le même problème pour l'équation de Laplace $r+t=0$, les données restant les mêmes. En prenant pour nouvelles variables $\xi = x+iy$, $\eta = x-iy$, on a $\frac{\partial z}{\partial \xi} = p_1 = \frac{p-iq}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial \eta} = q_1 = \frac{p+iq}{2}$, et l'équation devient $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Quand à la multiplicité M'_1, elle est remplacée par une nouvelle multiplicité M'_1 définie par les relations

$$\xi = f_1(\alpha) + if_2(\alpha), \qquad \eta = f_1(\alpha) - if_2(\alpha),$$
$$p_1 = \frac{\varphi_1(\alpha) - i\varphi_2(\alpha)}{2}, \qquad q_1 = \frac{\varphi_1(\alpha) + i\varphi_2(\alpha)}{2}, \qquad z = f_3(\alpha);$$

des formules obtenues tout à l'heure on conclut que l'intégrale de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, admettant tous les éléments de M'_1, est représentée par les équations

$$\xi = f_1(u) + if_2(u), \qquad \eta = f_1(v) - if_2(v),$$

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} z = z_0 &+ \frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{u} [\varphi_1(u) - i\varphi_2(u)]\,[f'_1(u) + if'_2(u)]\,du \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{v} [\varphi_1(v) + i\varphi_2(v)]\,[f'_1(v) + if'_2(v)]\,dv. \end{aligned}\right.$$

En revenant aux variables x, y, nous obtenons les formules suivantes pour représenter l'intégrale de l'équation $r+t=0$, qui admet tous les éléments de la multiplicité donnée M_1 :

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{f_1(u) + f_1(v) + i[f_2(u) - f_2(v)]}{2}, \\ y &= \frac{f_1(u) - f_1(v) + i[f_2(u) + f_2(v)]}{2i}, \end{aligned}\right.$$

la formule qui donne z n'étant pas changée. Pour des valeurs réelles des paramètres u et v, x, y et z ont en général des valeurs imaginaires; si l'on attribue à ces paramètres des valeurs imaginaires, les formules (51) et (52) n'ont un sens que si les fonctions données f_1, f_2, φ_1, φ_2 sont des *fonctions analytiques*. Supposons ces fonctions holomorphes dans un certain domaine D du plan de la variable complexe α, contenant un segment ab de l'axe réel, qui correspond à la courbe donnée. Ces fonctions sont représentées, dans le voisinage de $\alpha = \alpha_0$, par des séries entières en $(\alpha - \alpha_0)$ à coefficients réels, et par suite prennent des valeurs imaginaires conjuguées pour des valeurs imaginaires conjuguées de la variable dans le domaine D. Pour que x, y, z soient réels, il suffira d'attribuer aux paramètres u et v des valeurs imaginaires conjuguées, et les formules qui représentent l'intégrale peuvent

s'écrire

$$(53)\quad \begin{cases} x = \mathcal{R}[f_1(u) + if_2(u)], \qquad y = \mathcal{R}\left[\dfrac{f_1(u) + if_2(u)}{i}\right], \\ z = z_0 + \mathcal{R}\left[\displaystyle\int_{\alpha_0}^{u} \{\varphi_1(u) - i\varphi_2(u)\}\{f_1'(u) + if_2'(u)\}\,du\right], \end{cases}$$

$\mathcal{R}(A)$ désignant la partie réelle de A, et la variable complexe u décrivant le domaine D. On voit par là combien les solutions du problème de Cauchy pour les deux équations, qui paraissent identiques au point de vue purement formel, sont en réalité différentes. Tandis que les formules (49) et (50) supposent simplement que les fonctions qui y figurent sont continues et ont des dérivées continues, les formules (51) et (52) n'ont de sens précis que si les fonctions données f_i, φ_i sont des fonctions analytiques, et dans les formules définitives (53), qui représentent la solution, le paramètre variable u doit prendre des valeurs complexes.

Il est aisé de s'assurer que ces conditions ne sont pas introduites par le mode de solution adopté, mais qu'elles tiennent à la nature même du problème. Soient C une courbe plane du plan des xy, et D un domaine renfermant cette courbe. Si l'on se donne les valeurs d'une fonction u et de ses dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ le long de C, ces valeurs étant seulement continues et vérifiant la relation

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

le long de cette courbe, il n'existe pas en général de solution de l'équation de Laplace $\Delta_2 u = 0$, continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres dans D, aussi petit que soit ce domaine, et dont les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ prennent les valeurs données sur la courbe C. En effet, si une telle solution existait, on en déduirait une autre fonction $v(x, y)$, satisfaisant aux mêmes conditions que $u(x, y)$ dans D, et telle qu'on ait $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ (II, n° 261). Les valeurs de $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ étant connues le long de C, cette fonction $v(x, y)$ serait elle-même déterminée le long de C, à une constante additive près; $u + iv$ serait donc une fonction analytique holomorphe dans D de $x + iy$, dont on connaîtrait la valeur tout le long de C. Or, on sait que cette fonction est complètement déterminée si l'on connaît sa valeur le long d'un arc de C, aussi petit qu'il soit. Il s'ensuit que les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et de $\frac{\partial u}{\partial y}$ doivent être complètement déterminées en un point quelconque de C, si l'on connaît les valeurs de ces dérivées sur une portion, aussi petite qu'elle soit, de ce contour. Il est clair que cette condition ne sera pas satisfaite si les fonctions données pour $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont seulement continues. En réalité, ce

n'est pas le problème de Cauchy qui se pose pour l'équation $\Delta_2 u = 0$, mais un problème tout différent, qui sera étudié plus loin (Chap. XXVII).

EXERCICES.

1. Intégrer les équations

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = 0, \qquad \left(s + \frac{p-q}{x-y}\right)^2 = rt,$$

$$rt - s^2 + f'(x)pt = 0, \qquad rt - s^2 = pqs, \qquad qr + (zq - p)s - zpt = 0,$$

$$s = pq + e^z f(x, y), \qquad rxy + s(x^2 + y^2) + txy - py - qx = 0.$$

2. Trouver les surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont des courbes planes dont les plans passent par une droite fixe (*surfaces de Joachimsthal*), et les surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont situées sur des sphères concentriques (*surfaces de Monge*).

3. Déterminer les fonctions $\lambda(x, y)$ telles que l'équation $r = \lambda^2 t$ soit intégrable par la méthode de Monge.

4. Déterminer les équations de Monge-Ampère pour lesquelles les caractéristiques de l'un des systèmes sont des lignes asymptotiques ou des lignes de courbure des surfaces intégrales (Lie).

Déterminer de même les équations pour lesquelles les deux familles de caractéristiques forment un réseau conjugué sur les surfaces intégrales.

5. *Surfaces minima.* — Si l'on écrit l'équation du plan tangent à une surface S sous la forme

$$(1 - \alpha\beta)X + i(1 + \alpha\beta)Y + (\alpha + \beta)Z + \xi(\alpha, \beta) = 0,$$

α et β étant deux paramètres variables, pour que cette surface soit à courbure moyenne nulle, il faut et il suffit qu'on ait (p. 79)

$$(\alpha - \beta)\frac{\partial^2 \xi}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial\xi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\xi}{\partial\beta} = 0.$$

En déduire les équations générales des surfaces à courbure moyenne nulle.

CHAPITRE XXV.

ÉQUATIONS LINÉAIRES A n VARIABLES.

I. — CLASSIFICATION DES ÉQUATIONS A n VARIABLES.

481. **Caractéristiques des équations à n variables.** — La notion de caractéristique s'étend aux équations aux dérivées partielles du second ordre à un nombre quelconque de variables, et aux équations d'ordre supérieur au second. Nous ne traiterons que le cas d'une équation du second ordre à n variables, linéaire par rapport aux dérivées du second ordre

$$(1)\quad \Sigma a_{ik} p_{ik} + F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \qquad p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k},$$

les coefficients a_{ik} ne dépendant que des variables $x_1, \ldots, x_n$. Le problème de Cauchy pour cette équation peut être posé de la façon suivante : *Étant donnée dans l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une hypersurface* S *représentée par l'équation*

$$(2)\qquad \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

trouver une intégrale de l'équation (1), *connaissant les valeurs que prennent cette intégrale et l'une de ses dérivées partielles du premier ordre le long de* S.

Ce problème est en général déterminé. Remarquons d'abord que les valeurs des n dérivées partielles p_i le long de S ne sont pas indépendantes; si l'on connaît z et l'une de ces dérivées en chaque point de S, on peut en déduire les autres dérivées du premier ordre au moyen de l'identité $dz = \Sigma p_i \, dx_i$. En effet, sur l'hypersurface S, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et z peuvent être exprimées par des fonctions connues de $n-1$ paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, et la relation précédente est équivalente à $n-1$ relations distinctes, qui per-

mettent de calculer les valeurs des n dérivées p_i, si l'on connaît l'une d'elles. Supposons par exemple l'équation (2) de S résolue par rapport à x_n; on peut prendre pour paramètres

$$u_1 = x_1, \ldots, u_{n-1} = x_{n-1}.$$

Soit $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ la fonction à laquelle doit se réduire z sur cette multiplicité. Les $n-1$ relations

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = p_i + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

permettent d'exprimer les $n-1$ dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ au moyen de la dérivée p_n, qui peut être choisie arbitrairement le long de S.

Lorsque les fonctions a_{ik}, F, Φ sont des fonctions analytiques de leurs arguments, on peut prendre un nouveau système de variables indépendantes $(x'_1, \ldots, x'_n)$, de telle façon que l'équation de l'hypersurface S devienne $x'_n = 0$ avec ce nouveau système de variables. L'équation (1) est remplacée par une équation de même forme à coefficients analytiques, et le problème proposé est ramené à la recherche d'une intégrale de la nouvelle équation, se réduisant pour $x'_n = 0$ à une fonction donnée $f(x'_1, \ldots, x'_{n-1})$, tandis que $\frac{\partial z}{\partial x'_n}$ se réduit à une autre fonction donnée $\varphi(x'_1, \ldots, x'_{n-1})$ des mêmes variables. Ces fonctions f et φ seront aussi analytiques, si les données du problème primitif s'exprimaient par des conditions analytiques. Si le coefficient de $\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2_n}$ n'est pas nul dans l'équation transformée, on peut appliquer à cette équation le théorème général (II, n° 456), et l'on en conclut, en revenant à la première équation, que le problème de Cauchy admet une solution analytique holomorphe dans le voisinage de l'hypersurface qui porte les données. Si, au contraire, le coefficient a'_{nn} de $\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2_n}$ est nul dans l'équation transformée, on ne peut plus appliquer le théorème général d'existence. Remarquons, sans qu'il soit nécessaire de faire le calcul, que ce coefficient a'_{nn} ne dépend que des coefficients a_{ik} et de la fonction Φ elle-même, mais ne dépend nullement des données sur S. Les hypersurfaces S, pour lesquelles a'_{nn} est nul, sont les *caractéristiques* de l'équation (1). Ces hypersurfaces carac-

téristiques sont définies par une équation aux dérivées partielles du premier ordre que l'on peut former sans effectuer aucun changement de variables. Supposons, en effet, que l'on connaisse les valeurs de z et de ses dérivées partielles p_i en tout point de l'hypersurface (2), ou, ce qui revient au même, que l'on connaisse un système de $2n+1$ fonctions x_i, p_k, z de $n-1$ paramètres, vérifiant l'équation (2) et la relation $dz = \Sigma p_i\, dx_i$. Pour en déduire les valeurs des dérivées du second ordre p_{ik}, en un point quelconque de cette multiplicité, nous avons les relations

$$(3) \qquad dp_i = p_{i1}\, dx_1 + \ldots + p_{in}\, dx_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et l'équation (1) elle-même. Supposons, pour simplifier, qu'on ait pris pour paramètres les $(n-1)$ variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Les relations (3) nous donnent

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = p_{ik} + p_{in}\frac{\partial x_n}{\partial x_k}, \qquad \frac{\partial p_n}{\partial x_i} = p_{ni} + p_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial x_i},$$

et par suite,

$$p_{ik} = p_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_k} + \frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

En portant les valeurs des dérivées p_{ik}, p_{ni}, tirées de ces formules, dans l'équation (1), on obtient une équation du premier degré pour déterminer p_{nn}

$$(4) \qquad \mathrm{A}p_{nn} + \mathrm{B} = 0,$$

où le coefficient A a pour expression

$$(5) \qquad \mathrm{A} = \sum a_{ik}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

à condition de remplacer $\dfrac{\partial x_n}{\partial x_n}$ par (-1).

Si A n'est pas nul pour l'hypersurface considérée, on obtient les valeurs des dérivées p_{ik} en chaque point de S, et, en passant aux dérivées d'ordre plus élevé, on vérifie, de proche en proche, que toutes ces dérivées peuvent être calculées sans ambiguïté. Nous sommes dans le cas général où le problème de Cauchy admet une solution et une seule.

Il n'en est plus de même si l'hypersurface S satisfait à la rela-

tion $A = 0$, qu'on peut écrire, sous forme plus symétrique,

$$(6) \qquad \sum a_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

en supposant cette multiplicité définie par l'équation (2). L'hypersurface S est alors une caractéristique de l'équation (1), et l'on ne peut plus appliquer les raisonnements du cas général. Lorsqu'on a à la fois $A = 0$, $B = 0$, la valeur de la dérivée p_{nn} est indéterminée, et le problème de Cauchy présente une indétermination. On a démontré que cette indétermination était variable, lorsque les fonctions a_{ik}, F, Φ, et les données sont analytiques ([1]).

Supposons les variables réelles, ainsi que les fonctions a_{ik}, F; pour qu'il existe des caractéristiques *réelles*, il est nécessaire que l'équation du premier ordre (6) admette des intégrales réelles. Or le premier membre est une forme quadrique par rapport aux dérivées de A, et par suite peut s'écrire sous forme d'une somme de n carrés de fonctions linéaires de ces dérivées multipliés par des facteurs constants, lorsque le discriminant A de la forme $\Sigma a_{ik} u_i u_k$ n'est pas nul. Ceci conduit à une classification des équations (1) basée sur la nature des caractéristiques.

Si le discriminant Δ de la forme quadratique n'est pas nul, et si tous les coefficients des carrés sont du même signe, l'équation (6) n'admet pas d'intégrale réelle, sauf $f = C$, et par conséquent il n'y a pas de caractéristiques réelles pour l'équation (1). On dit qu'elle appartient au type *elliptique*.

Si le discriminant Δ n'est pas nul, sans que tous les coefficients des carrés aient le même signe, l'équation (6) a des intégrales réelles, et il existe des caractéristiques réelles pour l'équation (1), qui est dite du type *hyperbolique*.

Si le discriminant Δ est nul, l'équation (6) est décomposable en une somme de $n - p$ carrés ($p > 0$), et l'équation (1) appartient au type *parabolique*. Une équation de cette espèce peut avoir des caractéristiques réelles, ou ne pas en avoir, suivant les cas. Si par exemple $n = 3$, l'équation $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2$ admet des intégrales

([1]) La proposition n'a pas encore été démontrée d'une façon absolument générale pour une équation non analytique, mais elle se vérifie dans tous les cas qui ont été traités.

réelles, tandis que l'équation

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+b\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=0$$

n'admet d'intégrales réelles que si les deux équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}+b\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

forment un système jacobien. Toute équation qui admet des caractéristiques réelles est donc du type hyperbolique ou du type parabolique.

482. Propagation par ondes. — Les équations à caractéristiques réelles interviennent, à l'exclusion des équations du type elliptique, dans tous les phénomènes où il y a propagation par *ondes*. Il est aisé de s'en rendre compte *a priori*. Considérons d'abord un ébranlement se propageant le long d'une ligne droite indéfinie prise pour axe des x. Supposons, par exemple, qu'on ait un cylindre indéfini, de section très petite, rempli d'un gaz dont l'état à chaque instant est le même en tous les points de chaque tranche perpendiculaire aux génératrices. Cet état est caractérisé par un nombre variable z, qui dépend de l'abscisse x de la tranche considérée et de l'époque t. Dans les problèmes les plus usuels, z est une intégrale d'une équation du second ordre linéaire par rapport aux dérivées du second ordre

$$H\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2K\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t}+L\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+M=0, \tag{7}$$

qui admet la solution $z=0$, correspondant à l'état de repos.

Nous supposons que, si l'on vient à produire un ébranlement en une portion du cylindre, cet ébranlement se propage par ondes, c'est-à-dire qu'une tranche d'abscisse x, située en dehors de la portion ébranlée au début reste en repos jusqu'à un certain moment $t=\varphi(x)$ à partir duquel elle entre en vibration. Considérons x et t comme les coordonnées rectangulaires d'un point; soient C la courbe qui a pour équation $t=\varphi(x)$, et $z=f(x, t)$ l'intégrale de l'équation (7) qui convient au phénomène étudié. La courbe C décompose le plan des xt en deux régions; dans la région située au-dessous de C, on a $t\overline{\gtrless}\varphi(x)$ et $z=0$; au contraire,

dans la région située au-dessus de C, z est différent de zéro. Le long de la courbe C, nous admettrons que z et ses dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ sont nulles, ce qui revient à supposer que z et ses dérivées partielles varient d'une manière continue quand on passe de la partie non encore ébranlée à la partie ébranlée. La surface intégrale $z=f(x, t)$ est donc tangente au plan $z=0$ tout le long de la courbe C, qui est par conséquent une caractéristique sur cette intégrale particulière (n° 473); en d'autres termes, *l'équation $t=\varphi(x)$, qui correspond au front de l'onde, est celle d'une courbe caractéristique sur le plan $z=0$.*

Ces courbes caractéristiques sont les courbes intégrales de l'équation différentielle $H_0\,dt^2 - 2K_0\,dt\,dx + L_0\,dx^2 = 0$, H_0, K_0, L_0 désignant ce que deviennent les coefficients H, K, L quand on y a remplacé z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ par zéro. En particulier, lorsque H, K, L ne renferment pas x et t, H_0, K_0, L_0 sont des constantes, et les deux systèmes de caractéristiques se composent de droites parallèles. L'équation du front de l'onde $t=\varphi(x)$ est de la forme $t=ax+b$, et l'on en conclut que l'ébranlement se propage avec une vitesse constante $\frac{1}{a}$.

Considérons encore l'équation de la propagation du son dans l'espace. Les composantes de la vitesse d'une molécule gazeuse placée, à l'instant t, au point de coordonnées (x, y, z) sont les dérivées partielles d'une fonction $u(x, y, z, t)$, qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{8}$$

a étant un coefficient constant.

Si, pour $t=0$, on produit un ébranlement limité à une région de l'espace, la molécule placée en un point (x, y, z) en dehors de cette région reste en repos jusqu'à l'instant $t=\varphi(x, y, z)$ à partir duquel u cesse d'être nul. L'équation $\varphi(x, y, z)=t$, où t a une valeur déterminée, représente la surface de l'espace (x, y, z) qui, à l'instant t, sépare la région non encore ébranlée de la région déjà ébranlée. Si nous admettons que u et ses dérivées partielles varient d'une manière continue quand on passe d'une région à

l'autre, l'équation $\varphi(x, y, z) - t = 0$ représente, dans l'espace à quatre dimensions (x, y, z, t), une hypersurface caractéristique de l'équation (8), puisqu'il doit exister une intégrale de cette équation qui est tangente à l'intégrale particulière $u = 0$ tout le long de cette hypersurface. La relation (6) qui définit les hypersurfaces caractéristiques de l'équation (8) devient dans le cas actuel, en supposant l'équation de cette hypersurface résolue par rapport à t,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{a^2}; \tag{9}$$

d'après un résultat connu [1] (*voir* t. II, p. 640), l'équation

$$\varphi(x, y, z) = C$$

représente alors une famille de surfaces parallèles, et par suite *les positions successives du front de l'onde forment une famille de surfaces parallèles.*

On peut énoncer un résultat plus précis. Pour $t = 0$, l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$ doit représenter la surface Σ_0 qui sépare la région de l'espace déjà en vibration de la région au repos à l'instant $t = 0$. On obtient l'intégrale de l'équation (9) satisfaisant à cette condition en prenant l'enveloppe de l'intégrale complète

$$at = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$

lorsque le point (α, β, γ) décrit la surface Σ_0. Soit $t = F(x, y, z)$ l'équation de cette enveloppe; d'après la théorie de la variation des constantes (II, n° 452), $F(x, y, z)$ est une intégrale de l'équation (9), et il est clair que, pour $t = 0$, l'enveloppe se réduit à la surface Σ_0 elle-même. On obtient donc la position du front de

---

[1] On peut aussi vérifier ce résultat en montrant que les trajectoires orthogonales de la famille de surfaces $\varphi(x, y, z) = C$ sont des droites. Si u, v, w sont les cosinus directeurs de la normale à la surface de cette famille qui passe en un point (x, y, z), on a, d'après l'équation (9), $u = a\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v = a\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $w = a\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, et il suffit de montrer que u, v, w ne changent pas quand on passe d'un point m de l'espace au point infiniment voisin m' sur la direction (u, v, w) issue de ce point. Or on a, à un facteur près,

$$du = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] = 0.$$

l'onde au temps t en prenant l'enveloppe des sphères de rayon at dont le centre décrit la surface Σ_0; il est évident que la portion de cette enveloppe, qui est extérieure à Σ_0, convient seule à la question. Tous ces résultats, qui ont été déduits uniquement de la théorie des caractéristiques, seront vérifiés plus loin (n° **484**).

483. Généralités sur les équations complètement linéaires. — Un grand nombre de problèmes de Physique mathématique conduisent à des équations aux dérivées partielles, qui sont *linéaires* et homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées; l'intégrale cherchée doit en outre satisfaire à des conditions qui peuvent être de nature très diverse. De la forme linéaire de ces équations il résulte que, si l'on connaît p intégrales particulières, toute combinaison linéaire à coefficients constants de ces p intégrales est aussi une intégrale. Si l'on connaît une intégrale dépendant d'un ou plusieurs paramètres arbitraires, on peut en déduire de nouvelles intégrales par des différentiations ou des quadratures. Soit par exemple $\varphi(x, y, z, \ldots; a)$ une intégrale dépendant d'un paramètre a, ne figurant pas dans les coefficients de l'équation proposée. On vérifie immédiatement par différentiation que $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ est aussi une intégrale, ce qui s'explique puisque cette dérivée peut être considérée comme la limite d'une combinaison linéaire des deux intégrales

$$\varphi(x, y, z, \ldots; a+h), \quad \varphi(x, y, z, \ldots; a).$$

Le raisonnement est général; si une intégrale dépend d'un certain nombre de paramètres $a, b, c, \ldots, l$, ne figurant pas dans les coefficients de l'équation, toutes les dérivées partielles d'ordre quelconque de l'intégrale par rapport à ces paramètres sont de nouvelles intégrales, si toutefois ces dérivées existent. Il peut arriver aussi que les dérivées de l'intégrale par rapport à l'une des variables indépendantes soient encore des intégrales; c'est ce qui aura lieu par exemple si l'une des variables ne figure pas dans les coefficients de l'équation et si l'on prend les dérivées par rapport à cette variable. En particulier, dans le cas d'une équation linéaire à coefficients *constants*, toutes les dérivées partielles d'une intégrale sont aussi des intégrales en admettant, bien entendu, que ces

dérivées existent et ont elles-mêmes des dérivées d'un ordre égal à l'ordre de l'équation proposée.

D'une intégrale dépendant de *paramètres arbitraires* on peut aussi déduire, par des quadratures, des intégrales dépendant de *fonctions arbitraires*. Supposons, par exemple, que d'une équation linéaire donnée à quatre variables indépendantes x, y, z, t, on connaisse une intégrale $u = \varphi(x, y, z, t; a, b, c)$ dépendant de trois paramètres arbitraires a, b, c. Si l'on multiplie cette solution particulière par une fonction arbitraire $f(a, b, c)$ de ces paramètres, l'intégrale du produit $f(a, b, c), \varphi(x, y, z, t; a, b, c)$, étendue à un domaine *fixe* à une, deux ou trois dimensions de l'espace (a, b, c), sera aussi une solution de l'équation aux dérivées partielles proposée, quelle que soit la fonction $f(a, b, c)$. Cela résulte immédiatement des formules habituelles de différentiation sous le signe intégral, mais on peut simplement observer avec Fourier qu'une intégrale de cette espèce n'est au fond que la somme d'une infinité de solutions particulières. Quand on connaît plusieurs intégrales particulières distinctes dépendant de paramètres arbitraires, on peut former de cette façon d'autres intégrales dépendant de fonctions arbitraires. En exprimant que les intégrales ainsi obtenues satisfont à des conditions voulues, on est conduit en général à des *équations intégrales* pour déterminer les fonctions arbitraires.

Il arrive aussi, pour certaines intégrales particulières dépendant de paramètres arbitraires, qu'on puisse en déduire de nouvelles intégrales par des quadratures étendues à des domaines qui sont eux-mêmes variables avec x, y, z, t. Ce sont précisément ces intégrales qui jouent en général le rôle le plus important [1].

Si l'on connaît une infinité d'intégrales, linéairement distinctes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, il est évident que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} C_i \varphi_i$, où les coefficients C_i sont constants, est aussi une intégrale, pourvu que cette série, et celles qu'on en déduit par dérivation jusqu'à

[1] M. J. Le Roux a étudié ces intégrales, qu'il appelle *principales*, dans plusieurs Mémoires (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XII, 1895; *Journal de Mathématiques*, 5e série, t. IV, 1898; t. VI, 1900; t. IX, 1903). On verra un peu plus loin un exemple intéressant (n° 484).

l'ordre de l'équation, soient uniformément convergentes. Il peut même se faire que toutes ces conditions ne soient pas nécessaires. De toute intégrale dépendant d'un ou plusieurs paramètres arbitraires on peut évidemment déduire, et d'une infinité de manières, une infinité d'intégrales particulières linéairement distinctes en attribuant à ces paramètres une suite de valeurs particulières et, par conséquent, former une infinité d'intégrales représentées par des séries. On choisit en général les valeurs particulières des paramètres de façon à satisfaire à certaines conditions aux limites. Supposons par exemple qu'une intégrale $\varphi(x, y, z; \alpha)$, dépendant d'un paramètre α, soit nulle le long de certaines multiplicités pour une suite infinie de valeurs de ce paramètre, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$. Toute série $\Sigma C_n \varphi(x, y, z; \alpha_n)$ satisfait formellement à l'équation proposée et s'annule le long des mêmes multiplicités. Si l'on peut disposer des coefficients C_n de façon que cette intégrale vérifie les autres conditions imposées à la solution cherchée, le problème sera résolu. Il est clair que, dans chaque cas particulier, les questions de convergence seront à examiner.

Le plus souvent, des intégrales particulières renfermant des paramètres arbitraires sont suggérées par la nature même du problème, ou par la forme analytique des coefficients. Par exemple, étant donnée une équation *à coefficients constants*, l'analogie avec les équations différentielles linéaires de même espèce conduit à chercher des intégrales particulières s'exprimant au moyen de l'exponentielle. En écrivant que $e^{\alpha x+\beta y}$ est une intégrale d'une équation de cette espèce à deux variables, on obtient *une* équation de condition entre les constantes α et β, d'où l'on déduit une ou plusieurs intégrales dépendant d'un paramètre arbitraire.

Tout ce qui précède s'applique aux trois types d'équations linéaires, elliptique, hyperbolique ou parabolique. Ces trois types se présentent en Physique mathématique; la propagation du son, par exemple, est régie par une équation du type hyperbolique; et la propagation de la chaleur par une équation du type parabolique. La distribution de l'électricité sur un ou plusieurs conducteurs, ou la distribution des températures à l'intérieur d'un corps en équilibre de température, conduisent à des équations du type elliptique. Il est à remarquer que les problèmes auxquels on est conduit sont différents suivant le type de l'équation qui régit le

phénomène; mais, dans chaque cas, le problème est bien posé. c'est-à-dire que les données sont précisément celles qui déterminent complètement la solution pour le type correspondant d'équation.

Pour les équations du type hyperbolique ou du type parabolique, le problème à résoudre est le *Problème de Cauchy* [1], ou un *Problème mixte*, qu'on obtient en combinant le problème de Cauchy avec certaines conditions aux limites, dont la signification sera précisée dans chaque cas particulier. Pour une équation du type elliptique, le problème est tout différent; il s'agit de trouver une intégrale régulière à l'intérieur d'une variété *fermée* S_{n-1} à $(n-1)$ dimensions, connaissant la valeur de cette intégrale en tout point de S_{n-1}, ou une relation entre l'intégrale et quelques-unes de ses dérivées premières le long de cette variété. Le type le plus célèbre de ce genre de questions est le *Problème de Dirichlet*, que nous étudierons en détail. Remarquons une fois pour toutes que, dans ces différents problèmes, les données ne sont pas forcément analytiques, de sorte que, même pour le problème de Cauchy, le théorème général d'existence (II, n° 456) est bien loin de donner la solution de toutes les questions qu'on peut se proposer. Dans les cas où il s'applique, il ne fait connaître la solution que dans le voisinage de la multiplicité qui porte les données; ce qui est insuffisant pour l'objet qu'on se propose.

II. — APPLICATIONS A QUELQUES EXEMPLES.

Avant d'étudier d'une façon systématique les équations des différents types, nous donnerons quelques exemples de solutions synthétiques, qui offrent une application des généralités précédentes.

484. Équation du son. — Le problème de Cauchy pour l'équa-

---

[1] La donnée de l'intégrale seule, le long d'une caractéristique, doit être considérée comme équivalente aux données de Cauchy. Le problème de Cauchy et le problème mixte se présentent en général de cette façon pour une équation du type *parabolique*. Pour toutes ces généralités, on lira avec intérêt un article de M. Hadamard dans le *Bulletin de la Société de Physique* (1906).

tion de la propagation du son (n° 482)

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

consiste à trouver une intégrale $u(x, y, z, t)$ se réduisant pour $t = 0$ à une fonction donnée $f(x, y, z)$, tandis que $\frac{\partial u}{\partial t}$ se réduit à une autre fonction donnée $\varphi(x, y, z)$. Ces deux fonctions f et φ sont supposées continues, ainsi que leurs dérivées partielles, dans tout l'espace, et nulles en dehors d'une certaine région R, qui est le siège de l'ébranlement initial. Le problème a d'abord été résolu par Poisson et Cauchy; la méthode suivante, due à M. Boussinesq, permet une discussion facile de toutes les circonstances du phénomène.

La fonction $u = \frac{1}{r}$, où r est la distance d'un point variable (x, y, z) à un point fixe (α, β, γ), est une intégrale de l'équation (10) dépendant de trois paramètres α, β, γ. L'intégrale double

$$(11) \qquad u(x, y, z, t) = \int\int \frac{\mu(\alpha, \beta, \gamma)\,d\sigma}{r},$$

où $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ est une fonction arbitraire de α, β, γ, étendue à la surface de la sphère Σ de rayon at, décrite du point (x, y, z) comme centre, est aussi une intégrale comme nous allons le vérifier; c'est à cette intégrale que M. Boussinesq a donné le nom de *potentiel sphérique* (*voir* Chap. XXVIII). Remarquons que l'intégrale particulière $\frac{1}{r}$ ne dépend pas de t; le champ d'intégration dépend seul de t dans la formule (11), de sorte que $\frac{1}{r}$ peut être considérée comme une intégrale *principale*, au sens de M. Le Roux (p. 97) (¹).

(¹) La méthode de M. Boussinesq peut être rattachée à un théorème général de Weierstrass sur les équations linéaires à coefficients constants (*voir* VOLTERRA, *Leçons professées à Stockholm*, 1906, p. 58). Soit $\theta(x, y, z)$ une fonction homogène et du premier degré de x, y, z, telle que l'équation $\theta(x, y, z) = t$ représente une surface fermée Σ_t, renfermant l'origine, qui n'est rencontrée qu'en un point par une demi-droite issue de l'origine. Considérons une intégrale

$$I = \int\int\int \varphi(u, v, w) f(x + u, y + v, z + w)\, du\, dv\, dw$$

étendue au domaine compris entre les deux surfaces Σ_{t_0}, Σ_t, t_0 étant une con-

Pour calculer les dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, il est commode de faire le changement de variables

$$\alpha = x + at\xi, \qquad \beta = y + at\eta, \qquad \gamma = z + at\zeta;$$

lorsque le point α, β, γ décrit la sphère Σ, le point ξ, η, ζ décrit la sphère S de rayon *un*, ayant pour centre l'origine, et l'on a, entre les éléments d'aires correspondants ds et $d\sigma$ des deux sphères, la relation $d\sigma = a^2 t^2 ds = r^2 ds$. La formule (11) devient

$$(12) \qquad u(x, y, z, t) = \int\int \mu(x + at\xi, y + at\eta, z + at\zeta) at\, ds,$$

la nouvelle intégrale étant étendue à la surface de la sphère S. Le champ d'intégration étant indépendant de x, y, z, on a immédiatement

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \int\int_{(S)} \Delta_2 \mu(x + at\xi, y + at\eta, z + at\zeta) at\, ds,$$

ou, en revenant au champ d'intégration primitif,

$$(13) \qquad \Delta_2 u = \int\int_{(\Sigma)} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \gamma^2} \right) d\sigma,$$

l'intégrale double étant étendue à la surface de la sphère Σ.

---

stante quelconque. La dérivée $\frac{\partial I}{\partial t} = F(x, y, z, t)$ est une fonction des quatre variables x, y, z, t, qui est une intégrale de l'équation linéaire à coefficients constants

$$(E) \qquad \Sigma A_{h_1 h_2 h_3 h_4} \frac{\partial^n V}{\partial x^{h_1} \partial y^{h_2} \partial z^{h_3} \partial t^{h_4}} = 0,$$

quelle que soit la fonction arbitraire f, pourvu que l'équation

$$(E') \qquad \Sigma(-1)^{n-h_4} A_{h_1 h_2 h_3 h_4} \frac{\partial^n V}{\partial x^{h_1} \partial y^{h_2} \partial z^{h_3} \partial t^{h_4}} = 0$$

admette l'intégrale $\varphi(x, y, z)\, \Phi\, [t - \theta(x, y, z)]$, Φ étant une fonction arbitraire. Dans le cas de l'équation (10), les deux équations (E), (E′) sont identiques et admettent l'intégrale $\frac{1}{r}\, \Phi(at - r)$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On peut donc prendre dans ce cas $\varphi = \frac{1}{r}$, $\theta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; les surfaces Σ_t sont des sphères, et l'on voit facilement que $\frac{\partial I}{\partial t}$ est identique à l'intégrale de surface de M. Boussinesq.

La méthode de Kirchhoff repose aussi sur l'emploi des intégrales $\frac{1}{r}\Phi(at - r)$.

L'expression de $\frac{\partial u}{\partial t}$, déduite de la formule (12), se compose de deux termes et peut s'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + at\int\int_{S}\left[a\xi\frac{\partial\mu}{\partial x} + a\eta\frac{\partial\mu}{\partial y} + a\zeta\frac{\partial\mu}{\partial z}\right]ds,$$

ou, en revenant à la sphère Σ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{1}{t}\int\int_{\Sigma}\left[\frac{\alpha - x}{at}\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} + \frac{\beta - y}{at}\frac{\partial\mu}{\partial\beta} + \frac{\gamma - z}{at}\frac{\partial\mu}{\partial\gamma}\right]d\sigma.$$

Mais $\frac{\alpha - x}{at}$, $\frac{\beta - y}{at}$, $\frac{\gamma - z}{at}$ sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à Σ, et l'intégrale double du second membre est identique à l'intégrale de surface

$$J = \int\int \frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\,d\beta\,d\gamma + \frac{\partial\mu}{\partial\beta}\,d\gamma\,d\alpha + \frac{\partial\mu}{\partial\gamma}\,d\alpha\,d\beta,$$

prise suivant le côté extérieur de Σ, ou encore, d'après la formule de Green, à l'intégrale triple (I, n° **144**).

$$(14) \qquad J = \int\int\int\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2\mu}{\partial\gamma^2}\right)dv,$$

étendue à l'intérieur de Σ. De la formule qui donne $\frac{\partial u}{\partial t}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{1}{t}J,$$

on tire, en différentiant de nouveau par rapport à t,

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{u}{t} + \frac{1}{t}J\right) - \frac{1}{t^2}J + \frac{1}{t}\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{t}\frac{\partial J}{\partial t},$$

ce qu'on peut écrire $\frac{a^2}{r}\frac{\partial J}{\partial r}$, r étant le rayon de Σ. Il serait facile de calculer $\frac{\partial J}{\partial r}$ en remplaçant les coordonnées rectangulaires α, β, γ par des coordonnées polaires (ρ, θ, ψ) dans l'intégrale triple (14), mais on peut aussi observer que, quand r augmente de dr, l'accroissement ΔJ est représenté par une intégrale triple étendue à la portion de l'espace comprise entre les deux sphères concentriques de rayon r et $r + dr$. La partie principale de cet accroissement est évidemment égale au produit de dr par l'intégrale double

de $\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\gamma^2}\right)$ étendue à la surface de la sphère de rayon r. On a donc

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{r}\frac{\partial J}{\partial r}=\frac{a^2}{r}\int\int_{(\Sigma)}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\gamma^2}\right)d\sigma;$$

en comparant avec la formule (13), on voit que $u(x, y, z, t)$ est bien une intégrale de l'équation (10), quelle que soit la fonction $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ pourvu que les dérivées qui figurent dans le calcul soient continues. La formule (12) montre immédiatement que $u(x, y, z, 0)=0$, tandis que la limite de $\frac{u}{t}$, lorsque t tend vers zéro, est égale à $4\pi a\mu(x, y, z)$. L'intégrale (11) satisfait donc aux conditions initiales

$$u(x, y, z, 0)=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=4\pi a\mu(x, y, z) \qquad (\text{pour } t=0).$$

D'autre part, $u_1(x, y, z, t)=\frac{\partial u}{\partial t}$ est aussi une intégrale de l'équation (10) (n° 483) et la formule (16) met en évidence que $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ est nul pour $t=0$. Cette nouvelle intégrale satisfait donc aux conditions initiales

$$u_1(x, y, z, 0)=4\pi a\mu(x, y, z), \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t}=0 \qquad (\text{pour } t=0).$$

Cela étant, posons

$$(17)\qquad \begin{cases} F(x, y, z, t)=\dfrac{1}{4\pi a}\displaystyle\int\int_{(\Sigma)}\frac{f(\alpha, \beta, \gamma)}{r}d\sigma, \\ \Phi(x, y, z, t)=\dfrac{1}{4\pi a}\displaystyle\int\int_{(\Sigma)}\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{r}d\sigma; \end{cases}$$

il est clair que la fonction

$$(18)\qquad u(x, y, z, t)=\frac{\partial F}{\partial t}+\Phi(x, y, z, t)$$

donne la solution du problème de Cauchy pour l'équation (10), car il résulte des formules précédentes qu'elle se réduit à $f(x, y, z)$ pour $t=0$, tandis que $\frac{\partial u}{\partial t}$ est égal à $\varphi(x, y, z)$. D'après la formule qui donne $\frac{\partial F}{\partial t}$, on voit que cette fonction u s'exprime par une inté-

grale double étendue à la surface de la sphère de rayon at et de centre (x, y, z), et par conséquent la valeur de u au temps t en un point (x, y, z) ne dépend que des valeurs de f et de φ sur la portion de sphère de rayon at située dans la région R où s'est produit l'ébranlement initial.

Il est facile, d'après cela, de se rendre compte des différentes circonstances du phénomène. Supposons que la région R soit limitée par une surface fermée S; soient M un point de l'espace extérieur à R, d et D la plus courte et la plus grande distance de ce point à un point de S.

Tant que t est inférieur à $\frac{d}{a}$, la sphère de rayon at et de centre M n'atteint pas la région R, $u(x, y, z, t)$ est nul, et la molécule placée en M reste au repos jusqu'à l'instant $t_1 = \frac{d}{a}$ où elle entre en vibration. Mais, à partir du moment où t dépasse la valeur $\frac{D}{a}$, la surface de la sphère de rayon at et de centre M n'a plus aucun point commun avec la région R, et la molécule placée en M retombe au repos.

Le lieu des points qui sont atteints par la vibration au temps t est la surface parallèle à S obtenue en portant sur la direction de la normale extérieure une longueur at; les différentes positions du front de l'onde sont donc des surfaces parallèles à S (n° 482), et a représente la vitesse de propagation. Par le point M passent deux fronts d'onde, le front d'onde avant qu'on vient de définir, et un front d'onde arrière, lieu des points obtenus en portant sur la normale à S une longueur égale à D.

Lorsque la région R est illimitée, il y a bien toujours un front d'onde avant pour un point M situé à l'extérieur de R, mais il n'y a pas, en général, de front d'onde arrière, car $u(x, y, z, t)$ reste différent de zéro (ou d'une constante) dès que t a dépassé la valeur $\frac{d}{a}$

485. **Ondes cylindriques.** — Si les fonctions données $f(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ ne dépendent pas de z, c'est-à-dire si l'état initial est le même tout le long d'une parallèle à l'axe Oz, il est clair que l'intégrale (18) est elle-même indépendante de z. En effet, lorsque z varie, x, y, t restant constants, la sphère Σ ne fait que se déplacer parallèlement à Oz, mais les intégrales doubles étendues à la

surface de cette sphère ne changent pas de valeur. L'état est donc le même à chaque instant le long d'une parallèle à Oz, et nous pouvons nous borner à étudier ce qui se passe dans le plan des xy. La formule (18) représente alors l'intégrale de l'équation

$$(19) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

qui se réduit à $f(x, y)$, tandis que $\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x, y)$, pour $t = 0$. Les intégrales doubles (17) sont étendues à la surface de la sphère Σ de rayon $r = at$, ayant pour centre le point de coordonnées $(x, y, 0)$. On peut remplacer ces intégrales par des intégrales doubles étendues au grand cercle de cette sphère situé dans le plan des xy, en observant que l'élément d'aire $d\sigma$ a pour expression

$$d\sigma = \frac{r\, d\alpha\, d\beta}{\sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2}}$$

et que chaque élément du grand cercle est la projection de deux éléments symétriques de la sphère. La formule (18) devient alors

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} u(x, y, t) = {} & \frac{1}{2\pi a} \int\!\!\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}{\sqrt{a^2 t^2 - (x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2}} \\ & + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int\!\!\int_{\Gamma} \frac{f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}{\sqrt{a^2 t^2 - (x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2}} \right], \end{aligned} \right.$$

les deux intégrales doubles étant étendues au cercle Γ de rayon at décrit du point (x, y) pour centre.

Supposons que les fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ soient nulles en dehors de la région R' limitée par une courbe fermée C, ce qui correspond au cas où la région R, siège de l'ébranlement initial, est l'intérieur d'un cylindre de génératrices parallèles à Oz, cet ébranlement étant le même en tous les points d'une parallèle aux génératrices. Si le point (x, y) est en dehors de la région R', $u(x, y, t)$ sera nul tant que at sera inférieur à la plus courte distance d de ce point à C, mais dès que t dépasse $\frac{d}{a}$, le cercle Γ contient toujours une portion au moins de R' et $u(x, y, t)$ ne redevient pas nul (ou constant) en général. Il y a donc toujours un front d'onde avant, dont les positions successives sont des surfaces cylin-

driques parallèles, mais *il n'y a pas de front d'onde à l'arrière*. En d'autres termes, il y a *diffusion* infinie du son, en arrière du front de l'onde. Une oreille, placée en un point de l'espace, recevra indéfiniment une impression à partir du moment où le front l'aura atteinte, mais cette impression ira en s'atténuant avec le temps. En effet, lorsque t augmente indéfiniment, on voit aisément que les deux intégrales doubles qui figurent dans la formule (20) tendent vers zéro, et l'on peut démontrer en toute rigueur qu'il en est de même des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Ondes planes. — Prenons encore le cas plus particulier où les deux fonctions $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ ne dépendent que de x. Physiquement, cette hypothèse correspond au cas où R est la région comprise entre deux plans P_1 et P_2 normaux à Ox, l'ébranlement initial étant le même en tous les points d'un plan parallèle à ceux-là. On reconnaît, comme plus haut, que la fonction $u(x, y, z, t)$ est elle-même indépendante de y et de z, et la formule (18) représente l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{21}$$

telle que, pour $t = 0$, u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ se réduisent à $f(x)$ et à $\varphi(x)$. Les deux intégrales doubles qui figurent dans cette formule sont étendues à la surface de la sphère de rayon $r = at$, ayant pour centre le point $(x, 0, 0)$. En remarquant que l'aire de la zone comprise entre deux plans normaux à Ox, d'abscisses α et $\alpha + d\alpha$, a pour expression $2\pi at\, d\alpha$, on voit immédiatement que ces intégrales doubles se ramènent à des intégrales simples, et la formule (18) devient

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a}\left[\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\alpha)\,d\alpha + \frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at} f(\alpha)\,d\alpha\right] \\ &= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\alpha)\,d\alpha + \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas que nous étudions, les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont nulles en dehors d'un intervalle (x_0, x_1). Supposons $x_0 < x_1 < x$. Tant que t est inférieur à $\frac{x - x_1}{a}$, les deux fonctions $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ sont nulles dans l'intervalle d'intégration et l'on a $u = 0$. Lorsque t est supérieur à $\frac{x - x_0}{a}$, on peut remplacer les limites d'intégration par x_0 et x_1, *et $u(x, t)$ reste constant*. Comme

l'impression perçue par l'oreille ne dépend que des dérivées de u, on voit qu'il y a un front d'onde à l'avant et un front d'onde à l'arrière. Ces résultats seront vérifiés plus loin (nº 492) par une étude directe de l'équation (21).

486. Propagation de la chaleur dans un milieu indéfini. — Analytiquement, le problème se pose ainsi (¹) : Trouver une intégrale de l'équation

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},$$

régulière pour tout système de valeurs de x, y, z, et pour $t > 0$, se réduisant à une fonction donnée $f(x, y, z)$ pour $t = 0$. Pour qu'un produit de la forme XYZT, où X, Y, Z, T ne dépendent respectivement que de x, y, z, t, soit une intégrale de l'équation (23), il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = \frac{1}{a^2}\frac{T'}{T},$$

et par suite chacun des rapports qui figurent dans cette relation doit se réduire à une constante. Si l'on veut que les variables x, y, z figurent sous des signes trigonométriques, on doit prendre pour les rapports tels que $\frac{X''}{X}$ des valeurs négatives et l'on obtient ainsi une intégrale particulière

$$(24) \qquad v = e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)a^2 t}\cos\alpha(x-\lambda)\cos\beta(y-\mu)\cos\gamma(z-\nu),$$

dépendant de *six* constantes arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$. L'expression

$$(25) \qquad w = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

(¹) C'est en réalité un cas particulier du problème de Cauchy (note de la page 99), puisque l'hypersurface $t = 0$ de l'espace (x, y, z, t) est une multiplicité caractéristique. Au point de vue physique, ce problème correspond au problème suivant. L'espace étant supposé rempli d'un fluide homogène dont on connaît la température en chaque point au temps $t = 0$, trouver la température à un instant quelconque. On peut encore supposer qu'on a introduit, dans l'espace à 0°, un corps chaud jouissant des mêmes propriétés que le fluide extérieur, au point de vue calorifique. Le problème serait tout autre si l'on plongeait dans une enceinte à 0° un corps chauffé de nature différente qu'on laisse ensuite se refroidir librement, en maintenant la température de l'enceinte à 0°. Nous traitons deux cas particuliers aux nºˢ 487 et 488.

sera aussi une intégrale particulière de (23); or, w est le produit de trois intégrales simples telles que

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-\lambda)\,d\alpha. \tag{26}$$

La valeur de cette intégrale se déduit aisément d'une formule antérieure (t. I, p. 286) qu'on peut écrire

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\cos 2by\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-b^2},$$

en y changeant y en $\alpha a\sqrt{t}$ (α étant la nouvelle variable d'intégration), b en $\dfrac{x-\lambda}{2a\sqrt{t}}$. On obtient ainsi

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha(x-\lambda)\,d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\,e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}},$$

et deux formules toutes pareilles donnant les valeurs des intégrales analogues à (26), ce qui donne, en définitive,

$$w = \pi^{\frac{3}{2}}\,\frac{e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2}{4a^2 t}}}{(2a\sqrt{t})^3}. \tag{27}$$

La nouvelle intégrale w ne dépend plus que de trois constantes arbitraires λ, μ, ν. L'expression

$$u = \frac{1}{\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} wf(\lambda,\mu,\nu)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \tag{28}$$

est encore une intégrale. Pour prouver que c'est l'intégrale demandée, faisons le changement de variables

$$\lambda = x+2a\sqrt{t}\,\xi,\qquad \mu = y+2a\sqrt{t}\,\eta,\qquad \nu = z+2a\sqrt{t}\,\zeta;$$

la formule (28) devient, en remplaçant w par sa valeur,

$$\left\{\begin{aligned} u = \pi^{-\frac{3}{2}}&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2-\eta^2-\zeta^2}\\ &\times f(x+2a\sqrt{t}\,\xi,\ y+2a\sqrt{t}\,\eta,\ z+2a\sqrt{t}\,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.\end{aligned}\right. \tag{29}$$

Pour $t=0$, cette intégrale se réduit à

$$\pi^{-\frac{3}{2}}f(x,y,z)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2}\,d\zeta,$$

c'est-à-dire à $f(x, y, z)$, puisque chacune des intégrales simples est égale à $\sqrt{\pi}$ (I, p. 340).

Supposons que la fonction $f(x, y, z)$ soit nulle, sauf dans une région bornée R de l'espace où elle est *positive*. Cette hypothèse correspond au cas où l'on aurait introduit, dans l'espace à 0°, un corps, occupant la région R, à une température supérieure à 0°. On peut alors, dans la formule (28), prendre pour champ d'intégration la région R elle-même puisque $f(\lambda, \mu, \nu)$ est nul en dehors de cette région. Cette formule nous montre que, aussi petit que soit t, u a une valeur positive en chaque point de l'espace. Il en résulte que la propagation de la chaleur, à partir du corps chaud, dans l'espace à 0°, se fait d'une manière instantanée, c'est-à-dire qu'à l'instant même qui suit l'introduction du corps chaud, la température d'un point quelconque de l'espace commence à monter. Il n'y a donc pas d'onde calorifique, ce qu'on pouvait prévoir *a priori*, puisque l'équation (23) est du type parabolique et n'admet pas d'autres caractéristiques réelles que les hypersurfaces $t = C$.

La formule (28) montre également que tout le corps chaud intervient dans le calcul de la température au point (x, y, z) à un instant quelconque, puisque le second membre est une intégrale triple étendue à la position de l'espace occupée par ce corps. Dès lors, un observateur, placé en ce point, éprouve à l'instant t une sensation calorifique qui dépend de l'état initial de *tout le corps chaud;* nous avons vu, au contraire, dans l'étude de la propagation du son, que la sensation auditive au temps t ne dépend que de l'état initial des points situés sur une sphère de rayon at ayant pour centre le point (x, y, z). D'après M. Boussinesq, ce fait analytique explique pourquoi la vue et l'ouïe nous procurent sur le monde extérieur des connaissances assez nettes, tandis que les phénomènes calorifiques n'apportent que des impressions confuses et indistinctes. Cela tient à ce que les phénomènes optiques ou acoustiques sont régis par des équations dont la solution comporte des intégrales doubles, tandis que les phénomènes calorifiques sont régis par des équations dont la solution comporte des intégrales triples.

487. **Problème de l'armille.** — On appelle *armille* un fil de très faible section, formant un circuit fermé. On se donne la distribution initiale de la température dans l'armille, et l'on demande quelle sera cette distribution quand on aura laissé l'armille se refroidir librement pendant un temps quelconque. L'équation du problème est la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + au = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \tag{30}$$

a et k sont des constantes positives, t désigne le temps, x la longueur du fil comptée suivant son axe à partir d'une certaine origine et u la température au temps t de la tranche d'abscisse x. Nous supposerons qu'on a choisi l'unité de longueur de façon que la longueur totale du fil soit égale à 2π. En posant $u = ve^{-at}$, l'équation (30) se réduit à

$$(31)\qquad \frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Il s'agit de trouver une intégrale de cette équation, définie pour toutes les valeurs positives de t, et se réduisant pour $t = 0$ à une fonction donnée $f(x)$, qui admet nécessairement la période 2π. Il est clair que la fonction v doit admettre la même période.

Pour résoudre ce problème, Fourier remarque d'abord que l'équation (31) admet une infinité de solutions simples, qu'on obtient en faisant le produit d'une fonction de t par une fonction périodique de x de période 2π. Toutes ces solutions sont de la forme $e^{-kn^2t}(\text{A}\cos nx + \text{B}\sin nx)$, n étant un nombre entier quelconque, A et B des constantes arbitraires. Au moyen de ces solutions simples, on peut former l'intégrale demandée, dans le cas très général où la fonction $f(x)$ est développable en série de Fourier

$$(32)\qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx);$$

il est clair, en effet, que la fonction représentée par la série

$$(33)\qquad v = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^2kt}(a_n\cos nx + b_n\sin x)$$

satisfait *formellement* à l'équation (31), et, pour $t = 0$, cette série se réduit au développement de $f(x)$.

Le raisonnement manque évidemment de rigueur, mais il est facile d'y suppléer. Observons d'abord que $|a_n|$ et $|b_n|$ ont une borne supérieure M; la série (33) et les séries obtenues pour $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ sont uniformément convergentes pour toute valeur de t supérieure à un nombre positif τ; il suffit, pour le voir, de comparer le terme général au terme de même rang de la série convergente $2\text{M}\Sigma n^2e^{-n^2k\tau}$. La relation (31) est donc vérifiée pour toute valeur de $t > \tau$, et par suite pour toute valeur positive de t, puisque τ est un nombre positif arbitraire. Il reste à prouver que, lorsque t tend vers zéro, x restant constant, la somme de la série (33) a pour limite la somme de la série (32), qui est supposée convergente. Or, si l'on pose $q = e^{-kt}$, la série (33) est une série entière en q

$$(33)'\qquad v = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}q^{n^2}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

dont tous les exposants sont des carrés parfaits. Lorsque t tend vers zéro par valeurs positives, q tend vers l'unité et, d'après le théorème d'Abel, la somme de la série (33)′ a pour limite la somme de cette série où l'on a fait $q = 1$, c'est-à-dire la série (32).

Il est à remarquer que la relation (31) n'est pas nécessairement vérifiée pour $t = 0$; c'est ce qui a lieu, par exemple, si la fonction donnée $f(x)$ n'a pas de dérivée seconde [1].

Remarque. — Chaque terme de la série (33)′ peut être développé en série entière ordonnée suivant les puissances de x. En remplaçant chaque terme par son développement, v est représentée par la somme d'une série double dont chaque terme est une puissance de x. Cette série double est *absolument convergente* pour toute valeur positive de t. En effet, soit M une limite supérieure des valeurs absolues $|a_n|$ et $|b_n|$. La somme des modules des termes renfermés dans la $n^{ième}$ ligne du Tableau est évidemment inférieure à $Mq^{n^2}e^{n\rho}$, ρ étant égal à $|x|$. Or la série dont le terme général est $q^{n^2}e^{n\rho}$ est convergente, quel que soit ρ, lorsqu'on a $q < 1$. Il suit de là que, *pour toute valeur positive de t*, la fonction $v = F(x, t)$, qui représente l'état calorifique de l'armille à l'instant t, est *une fonction entière de x*. Une fonction continue arbitrairement choisie de x ne peut donc pas représenter l'état calorifique de l'armille à une époque consécutive à celle où on la laisse se refroidir librement.

488. **Refroidissement de la sphère.** — Supposons qu'une sphère de rayon R soit plongée dans une enceinte à 0°, et que la température initiale d'un point quelconque de cette sphère soit fonction seulement de la distance r au centre; par raison de symétrie, il en sera de même à un instant quelconque. La température u d'un point de la sphère au temps t est une fonction des variables r et t, qui satisfait à l'équation

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}. \tag{34}$$

Cette fonction est définie pour toute valeur positive de t, et pour toute valeur de r comprise entre 0 et R, et doit se réduire à une fonction connue $f(r)$, définie de 0 à R, lorsque t devient nul. En outre, si l'on admet la loi de déperdition de Newton, cette fonction u doit satisfaire à une condition à la surface, qui est la suivante : pour $r = R$, on doit avoir $\frac{\partial u}{\partial r} + hu = 0$, h étant une constante positive, et cela quel que soit t.

---

[1] Quelle que soit la fonction continue $f(x)$, il résulte d'un théorème de Weierstrass que la somme de la série (33), où a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier provenant de $f(x)$, a pour limite $f(x)$ lorsque t tend vers zéro par valeurs positives (*voir* É. PICARD, *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. I, p. 283).

L'équation (34) se simplifie si l'on pose $u = \frac{v}{r}$ et devient

$$(35) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial t},$$

tandis que la condition relative à la surface devient

$$(36) \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1 - hR}{R} v \qquad (\text{pour } r = R)$$

et la nouvelle condition initiale est $v = rf(r)$ pour $t = 0$.

L'équation (35) est identique à l'équation (31)' du problème de l'armille, mais l'intégrale cherchée doit satisfaire à une condition aux limites tout à fait différente. Pour qu'une solution de la forme

$$v = e^{-\mu^2 kt}(A\cos\mu r + B\sin\mu r)$$

convienne au nouveau problème, il faut d'abord que $\frac{v}{r} = u$ conserve une valeur finie pour $r = 0$, et par suite que A soit nul. Pour que cette intégrale vérifie la condition (36), il faut en outre que μ soit racine de l'équation transcendante

$$(37) \qquad \operatorname{tang}(\mu R) = \frac{\mu R}{1 - hR}.$$

On démontre aisément que cette équation admet une infinité de racines positives $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$. Si l'on pose en effet $\mu R = x$, on est ramené à rechercher les points d'intersection de la courbe $y = \operatorname{tang} x$ avec la droite $(1 - hR)y = x$. Si, par exemple, $1 - hR$ est positif, l'équation (37) a une racine et une seule entre $\frac{(2n-1)\pi}{2R}$ et $\frac{(2n+1)\pi}{2R}$; cette racine est supérieure à $\frac{n\pi}{R}$, et la différence de deux racines consécutives est supérieure à $\frac{\pi}{2R}$. Cela étant, supposons que la fonction $rf(r)$ soit développable, dans l'intervalle (0, R), en une série de la forme

$$(38) \quad rf(r) = A\sin(\mu_1 r) + A_2\sin(\mu_2 r) + \ldots + A_n\sin(\mu_n r) + \ldots,$$

les coefficients A_n étant constants. La série

$$(39) \qquad v = A_1 e^{-\mu_1^2 kt}\sin(\mu_1 r) + A_2 e^{-\mu_2^2 kt}\sin(\mu_2 r) + \ldots$$

donne la solution du problème. En effet, cette série est uniformément convergente pour $t \geqq 0$, et si l'on pose $e^{-kt} = q$, on peut répéter pour la série $\Sigma A_n q^{\mu^2}\sin(\mu_n r)$ les raisonnements par lesquels on établit le théorème d'Abel (I, n° 182), et l'on en conclut que v a pour limite $rf(r)$ lorsque t tend

vers zéro. Pour démontrer que les séries déduites de v en différentiant terme à terme sont uniformément convergentes, on n'a qu'à reprendre les calculs du problème de l'armille. La seule différence consiste en ce que la suite des nombres entiers est remplacée par la suite des nombres croissants $\mu_1, \mu_2, \ldots$ dans laquelle $\mu_n - \mu_{n-1}$ est comprise entre $\frac{\pi}{2R}$ et $\frac{3\pi}{2R}$. La possibilité du développement de $rf(r)$ en une série de la forme (38), lorsque cette fonction satisfait aux conditions de Dirichlet, a été établie rigoureusement par Cauchy [1] (voir *Exercices*, 2).

COMPLÉMENTS ET EXERCICES.

1. *Problème traité par Fourier.* — On considère le solide indéfini compris entre deux plans parallèles B et C, et un plan A qui leur est normal. On suppose chaque point M du plan A maintenu à une température constante qui est une fonction donnée $\varphi(x)$ de la seule distance x de ce point au plan B, et tous les points des faces B et C maintenus à 0°. Il s'établit à la fin un équilibre de température. Trouver la température finale $u(x, y)$ en un point P dont les distances aux plans B et A sont x et y.

La fonction $u(x, y)$ doit satisfaire à l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, se réduire à $\varphi(x)$ pour $y = 0$; être nulle, quel que soit y, pour $x = 0$, et pour $x = l$, et être très petite pour y très grand. On part de la solution simple $e^{-\frac{m\pi y}{l}} \sin \frac{m\pi x}{l}$ qui satisfait aux dernières conditions, et l'on développe $\varphi(x)$ en série de sinus des multiples de $\frac{\pi x}{l}$.

2. Soient μ, μ' deux racines distinctes de l'équation (37). Démontrer qu'on a

$$\int_0^R \sin(\mu r) \sin(\mu' r)\, dr = 0.$$

Il en résulte qu'on peut déterminer les coefficients de la série (38) de la même façon que les coefficients d'une série de Fourier, en supposant cette série uniformément convergente.

---

[1] *Œuvres complètes*, 1re série, t. VII. *Voir* aussi : É. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 179-195. — H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur* [*Leçons rédigées* par Rouyer et Baire, Chap. XI et suivants.]

CHAPITRE XXVI.

ÉQUATIONS LINÉAIRES DU TYPE HYPERBOLIQUE.

I. — ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS A L'ÉQUATION. $s = f(x, y)$.

489. Détermination d'une inégrale par les données de Cauchy. — Nous commencerons par étudier en détail un certain nombre de problèmes relatifs à l'équation élémentaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y); \tag{1}$$

une intégrale est dite *régulière* dans un domaine, si elle est continue et admet des dérivées partielles du premier ordre continues dans ce domaine. La fonction $f(x, y)$ est elle-même supposée continue [1]. Proposons-nous d'abord de déterminer une intégrale, connaissant les valeurs qu'elle prend sur deux caractéristiques de systèmes différents ou, d'une façon plus précise, cherchons une intégrale se réduisant, pour $y = y_0$, à une fonction donnée $\varphi(x)$ et, pour $x = x_0$, à une autre fonction connue $\psi(y)$, ces deux fonctions satisfaisant à la condition $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$. Si les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont déterminées respectivement dans les intervalles $(x_0, x_0 + \alpha)$ et $(y_0, y_0 + \beta)$, l'intégrale cherchée est elle-même déterminée à l'intérieur du rectangle limité par les droites $x = x_0$, $x = x_0 + \alpha$, $y = y_0$, $y = y_0 + \beta$ et nous pourrions écrire immédiatement son expression, en observant que l'intégrale

---

[1] On suppose, pour simplifier, les axes Ox et Oy rectangulaires, mais il est clair que les résultats sont indépendants de cette hypothèse, si l'on écrit les intégrales doubles, qui figurent dans les formules, en mettant en évidence les limites des intégrations successives à effectuer.

double $\int_{x_0}^{x} d\xi \int_{y_0}^{y} f(\xi, \eta)\, d\eta$ est une intégrale de l'équation (1) qui est nulle pour $y = y_0$, quel que soit x, et pour $x = x_0$, quel que soit y. Mais nous traiterons le problème par un procédé uniforme, s'appliquant à tous les problèmes qui vont suivre.

Supposons, pour fixer les idées, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et soit ABCD le rectangle dont les sommets ont pour coordonnées (x_0, y_0), $(x_0 + \alpha, y_0)$, $(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$, $(x_0, y_0 + \beta)$. D'un point M pris à l'intérieur ou sur le contour de ce rectangle abaissons les perpendiculaires MP et MQ sur les côtés AB et AD. Toute intégrale $z(x, y)$ de l'équation (1) satisfait aussi à la relation

$$(2) \qquad \iint \frac{\partial^2 z(\xi, \eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}\, d\xi\, d\eta = \iint f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

les deux intégrales doubles étant étendues à l'aire du rectangle APMQ. Or, le premier membre a pour valeur (I, n° 122) $z(x, y) + z(x_0, y_0) - z(x_0, y) - z(x, y_0)$; pour l'intégrale cherchée, $z(x, y_0)$ $z(y, x_0)$ sont précisément les fonctions données $\varphi(x)$ et $\psi(y)$, et cette intégrale a pour expression

$$(3) \qquad z(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} d\xi \int_{y_0} f(\xi, \eta)\, d\eta.$$

Il est évident que la fonction ainsi obtenue satisfait aux conditions imposées; pour qu'elle soit régulière dans le rectangle ABCD, il faut, en outre, que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ aient des dérivées continues.

Si les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont continues, ainsi que $\varphi'(x)$ et $\psi'(y)$, sauf pour un nombre *fini* de valeurs de x comprises entre x_0 et $x_0 + \alpha$, et pour un nombre fini de valeurs de y entre y_0 et $y_0 + \beta$, $z(x, y)$ est régulière dans le rectangle ABCD, sauf le long d'un nombre fini de segments de caractéristiques. On voit, par là, que toute discontinuité de l'intégrale ou de ses dérivées en un point de frontière du domaine se manifeste dans tout le domaine. Si les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ n'ont pas de dérivée, $z(x, y)$ n'est pas à proprement parler une intégrale de l'équation (1), à moins d'adopter pour la dérivée $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ la définition généralisée (I, n° 22).

Considérons maintenant un arc de courbe AB (*fig.* 84$''$) qui n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à chacun des

axes. Le problème de Cauchy peut être posé ainsi : *Déterminer une intégrale de l'équation* (1), *connaissant les valeurs des dérivées partielles* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *en un point quelconque de l'arc* AB, *et la valeur de l'intégrale elle-même en un point de cet arc.*

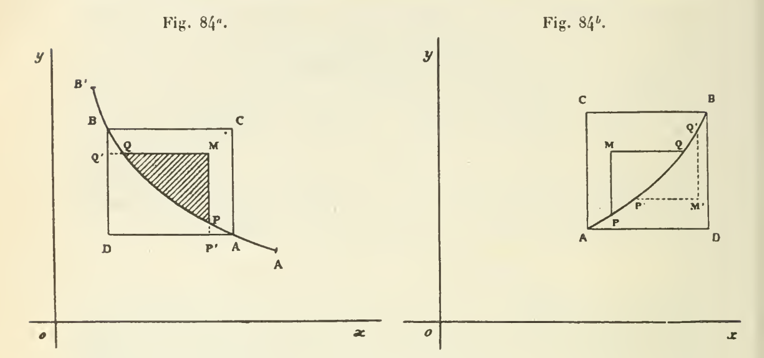


Fig. 84^a. Fig. 84^b.

D'après les hypothèses faites sur l'arc AB, on peut supposer que les deux dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ sont des fonctions données de x et y respectivement le long de AB, $\frac{\partial z}{\partial x} = \pi(x)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \chi(y)$. Supposons de plus, pour fixer les idées, que l'on connaisse la valeur z_0 de l'intégrale au point A de coordonnées (x_0, y_0); la valeur de cette intégrale en un point quelconque de l'arc AB de coordonnées (x, y) est donnée par la formule

$$(4) \qquad z(x, y) = z_0 + \int_{x_0}^{x} \pi(\xi)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} \chi(\eta)\, d\eta.$$

On peut donc dire qu'on suppose connues les valeurs de l'intégrale et de ses deux dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ en un point quelconque de l'arc AB, ces trois fonctions étant liées par la relation (4). L'intégrale satisfaisant à ces conditions est déterminée dans tout le rectangle ABCD, y compris les côtés. Soit, en effet, M un point quelconque de ce rectangle (*fig.* 84^a). Les parallèles aux axes menées par M rencontrent l'arc AB aux points Q et P respec-

tivement et toute intégrale de (1) satisfait à la relation

$$(5) \qquad \iint \frac{\partial^2 z(\xi, \eta)}{\partial \xi \, \partial \eta} d\xi \, d\eta = \iint f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta,$$

les deux intégrales doubles étant étendues à l'aire du triangle mixtiligne PMQ. En appliquant la formule de Green à l'intégrale double du premier membre, on peut la remplacer par l'intégrale curviligne $\int \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta$, prise le long du contour dans le sens direct, intégrale qui se réduit évidemment à $z'_M - z_P + \int_{(QP)} \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta$; nous désignons pour abréger par z_M la valeur $z(x, y)$ au point M de coordonnées (x, y). Pour l'intégrale cherchée, $\frac{\partial z}{\partial \eta} = \chi(\eta)$ le long de AB. Cette intégrale a donc pour expression

$$z_M = z_P - \int_{(QP)} \chi(\eta) \, d\eta + \iint_{(PMQ)} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta,$$

ce qu'on peut encore écrire, en tenant compte de la relation (4),

$$(6) \quad z(x, y) = z_0 + \int_{x_0}^{x} \pi(\xi) \, d\xi + \int_{y_0}^{y} \chi(\eta) \, d\eta + \iint_{(PMQ)} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta.$$

On vérifie que cette fonction $z(x, y)$ est une intégrale de l'équation (1) satisfaisant aux conditions de Cauchy, en observant que l'intégrale double du second membre est une intégrale particulière de (1) qui est nulle, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre pour tout point de l'arc AB (I, n° 122, p. 311). On peut encore écrire la formule (1) sous les formes équivalentes

$$(6)' \qquad z_M = z_P + \int_{(PQ)} \chi(\eta) \, d\eta + \iint_{(PMQ)} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta,$$

$$(6)'' \qquad z_M = z_Q + \int_{QP} \pi(\xi) \, d\xi + \iint_{(PMQ)} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta,$$

où n'interviennent que les valeurs de l'intégrale et de l'une de ses dérivées le long de l'arc AB. On vérifiera sans peine que ces formules s'appliquent aussi dans le cas où l'arc AB a la disposition de la figure 84^b, à condition de changer le signe de l'intégrale double.

L'intégrale (6) sera régulière dans tout le rectangle, pourvu que les fonc-

tions $\pi(x)$ et $\chi(y)$ soient continues dans ce domaine. Si ces fonctions ont un nombre fini de points de discontinuité, les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ seront discontinues le long de certains segments de caractéristiques. De même, si l'on se donne la valeur de l'intégrale $z = \Phi$ en un point quelconque de AB, et la dérivée partielle $\frac{\partial z}{\partial x} = \pi(x)$, pour que la fonction $z(x, y)$ représentée par (6)″ soit régulière, il faut que la différence $\Phi - \int_{x_0}^{x} \pi(\xi)\, d\xi$ soit une fonction de y admettant une dérivée continue le long de l'arc AB.

Les formules qui résolvent le problème donnent lieu à quelques remarques importantes :

1° Il est évident sur ces formules que la valeur de l'intégrale au point M ne dépend que des valeurs que prennent la fonction et ses dérivées du premier ordre le long de l'arc PQ, et par suite la valeur de $z(x, y)$ en un point infiniment voisin de l'arc AB ne dépend que des valeurs de z et de ses dérivées sur la portion de l'arc AB *infiniment voisine* du point M. Ces formules (6), (6′), (6)″ ne font connaître z qu'à l'intérieur du rectangle ABCD, mais les données de Cauchy le long de AB ne déterminent une intégrale que dans ce domaine. Il existe en effet une infinité d'intégrales de (1) régulières dans un domaine $\mathcal{D}$ contenant le rectangle ABCD et qui coïncident avec l'intégrale précédente dans ce rectangle. Pour bien saisir ce point essentiel, prolongeons l'arc AB dans les deux sens, de façon à obtenir un arc A′B′ satisfaisant aux mêmes conditions que AB, et donnons-nous le long de A′B′ deux fonctions continues de x et de y respectivement qui coïncident avec $\pi(x)$ et $\chi(y)$ dans la portion AB. L'intégrale de (1), qui prend la valeur z_0 au point A, et dont les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont égales à ces fonctions le long de A′B′, est régulière dans le nouveau rectangle A′B′C′D′, et elle coïncide avec l'intégrale (6) à l'intérieur et sur les côtés du rectangle ABCD. Si la première intégrale admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n, on peut toujours choisir les nouvelles données de façon à conserver la continuité de ces dérivées quand on sort du rectangle ABCD.

2° Considérons en particulier l'équation $s = 0$ et l'intégrale $Z(x, y)$ de cette équation qui, le long de l'arc AB, se réduit à une fonction continue Φ du paramètre qui fixe la position d'un point

sur cet arc, tandis que $\frac{\partial z}{\partial x}$ est égale le long de AB à une fonction continue $\Pi(x)$. Cette intégrale est représentée par la formule (6)'', où l'on suppose $f = 0$, et $\pi(\xi)$ remplacée par $\Pi(\xi)$. Supposons que, le long de AB, les deux fonctions Φ et $\Pi(x)$ puissent être développées en séries

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_i + \ldots,$$
$$\Pi(x) = \pi_1(x) + \pi_2(x) + \ldots + \pi_i(x) + \ldots,$$

la seconde étant *uniformément convergente*. La formule qui donne $Z(x, y)$ peut alors s'écrire

$$(7) \qquad Z(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[(\varphi_i)_Q + \int_{(QP)} \pi_i(\xi)\, d\xi \right] = \sum_{i=1}^{+\infty} z_i(x, y),$$

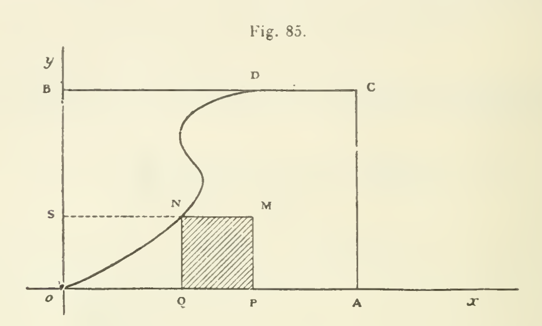
où $z_i(x, y)$ est l'intégrale qui se réduit à φ_i, tandis que $\frac{\partial z_i}{\partial x}$ est égale à $\pi_i(x)$, le long de AB. Cette remarque s'étend aussi aux problèmes que nous allons traiter dans les paragraphes suivants.

3° Le premier problème traité peut être considéré comme un cas limite du problème de Cauchy. En effet, quand on se donne la fonction $\varphi(x)$ à laquelle se réduit une intégrale $z(x, y)$ pour $y = y_0$, on connaît par là même la dérivées $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x)$ le long de cette caractéristique. La dérivée $\frac{\partial z}{\partial y}$ dépend encore d'une constante arbitraire, mais si l'on connaît en outre la fonction $\psi(y)$ à laquelle se réduit $z(x, y)$ pour $x = x_0$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ est connu pour $x = x_0$, $y = y_0$, et par conséquent sa valeur est déterminée en tous les points de la caractéristique $y = y_0$ (n° 474). Nous allons traiter d'autres problèmes où l'on se donne la valeur de l'intégrale sur certains arcs de courbe, qui ne sont pas des caractéristiques, avec les données de Cauchy sur d'autres portions de courbes.

490. **Problèmes mixtes.** — Soient OABC le rectangle limité par les droites $x = 0$, $x = a > 0$, $y = 0$, $y = b > 0$, et OD un arc de courbe issu de l'origine et situé dans ce rectangle, tel que la parallèle à Ox menée par un point quelconque M de ce rectangle, rencontre OD en un point N et en un seul. Cet arc OD est représenté

par une équation $x = \pi(y)$, la fonction $\pi(y)$ étant continue dans l'intervalle $(0, b)$. Proposons-nous de trouver une intégrale $z(x, y)$ de (1) se réduisant à une fonction $\varphi(x)$ pour $y = 0$, et à une autre fonction $\psi(y)$ lorsque le point M vient sur l'arc OD, les deux fonctions φ et ψ vérifiant la condition $\varphi(0) = \psi(0)$. Si les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont déterminées dans les intervalles $(0, a)$

Fig. 85.



et $(0, b)$ respectivement, l'intégrale cherchée est déterminée dans le rectangle OACB. Nous avons en effet, pour une intégrale quelconque de l'équation (1),

$$(8) \qquad \int\int_{(R)} \frac{\partial^2 z(\xi, \eta)}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\xi\,d\eta = \int\int_{(R)} f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

les deux intégrales doubles étant étendues à l'aire du rectangle MNQP. Mais l'intégrale double du premier membre est égale à $z_M + z_Q - z_N - z_P$, et z_Q, z_N, z_P sont connus d'après les conditions auxquelles satisfait l'intégrale considérée $z(x, y)$; nous avons donc, pour la valeur de cette intégrale au point M de coordonnées (x, y), l'expression suivante :

$$(9) \qquad z(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi[\pi(y)] + \int\int_{(R)} f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

et l'on voit aisément que le signe de l'intégrale double doit être changé lorsque le point M est situé entre l'arc OD et l'axe Oy. Inversement la fonction $z(x, y)$ représentée par cette formule satisfait à toutes les conditions voulues. D'une part, il est évident

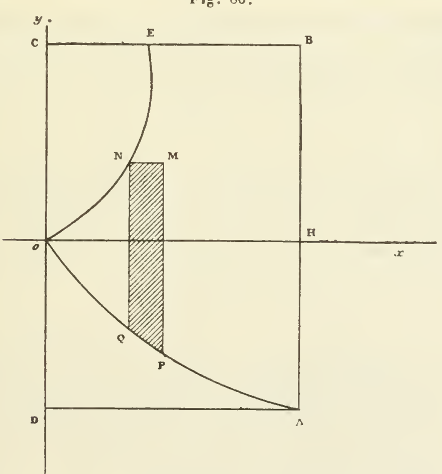
qu'elle se réduit à $\varphi(x)$ lorsque le point M vient sur OA et à $\psi(y)$ lorsque M vient sur l'arc OD. D'autre part, c'est une intégrale de (1), car l'intégrale double qui est au second membre est la différence de deux intégrales doubles dont l'une est étendue au rectangle OPMS et l'autre au rectangle OQNS, et cette dernière intégrale ne dépend que de y. Cette intégrale $z(x, y)$ est régulière dans le rectangle OACB pourvu que les fonctions φ, ψ, π aient des dérivées continues dans les intervalles correspondants. Nous remarquerons qu'à l'origine les dérivées partielles p_0 et q_0 vérifient la relation

$$(10) \qquad q_0 + p_0 \pi'(0) = \psi'(0),$$

quelle que soit la fonction $\varphi(x)$.

Supposons en second lieu que l'on connaisse la valeur de l'intégrale et de ses dérivées le long d'un arc OA situé au-dessous de Ox

Fig. 86.



et la valeur de l'intégrale seulement le long d'un arc OE situé au-dessus de Ox (*fig.* 86).

L'arc OA n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à chacun des axes dans le rectangle ODAH, tandis que l'arc OE est

rencontré en un point et en un seul par toute parallèle à Ox dans le rectangle OHBC. Sur l'arc OA on a les données de Cauchy, et par suite l'intégrale est déterminée dans tout le rectangle ODAH et en particulier sur OH. Connaissant les valeurs de l'intégrale sur OH et sur OE, nous sommes ramenés au problème précédent, en supposant, bien entendu, que les valeurs données pour l'intégrale tendent vers la même limite au point O, sur les deux arcs OA et OE. Mais il y a lieu de présenter une remarque essentielle. Appelons $z_1(x, y)$ l'intégrale qui est déterminée dans le rectangle ODAH par les données de Cauchy, le long de OA, et $z_2(x, y)$ l'intégrale déterminée dans le rectangle OHBC, qui coïncide avec $z_1(x, y)$ le long de OH, et qui se réduit à une fonction connue $z = \psi(y)$ le long de l'arc OE, qui a pour équation $x = \pi(y)$. Ces deux intégrales sont égales en tous les points de OH, et par suite il en est de même de leurs dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, $\frac{\partial z_2}{\partial x}$, mais rien ne prouve qu'il en sera de même des dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial y}$, $\frac{\partial z_2}{\partial y}$ et cela n'aura pas lieu si les données sont quelconques. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que ces dérivées soient égales à l'origine (n° 473, p. 59). Appelons

$$(p_1)_0, \quad (q_1)_0, \quad (p_2)_0, \quad (q_2)_0$$

les valeurs des dérivées de z_1 et de z_2 à l'origine; $(p_1)_0$ et $(q_1)_0$ sont connues d'après les conditions de Cauchy relatives à l'arc OA. On a de plus $(p_2)_0 = (p_1)_0$; pour qu'on ait aussi $(q_2)_0 = (q_1)_0$, il faut et il suffit, d'après la remarque faite tout à l'heure, qu'on ait

$$(q_1)_0 + (p_1)_0 \pi'(0) = \psi'(0).$$

Lorsque cette condition est satisfaite, l'intégrale qui coïncide avec $z_1(x, y)$ dans le rectangle ODAH et avec $z_2(x, y)$ dans le rectangle OHBC est régulière dans tout le rectangle ABCD. Sa valeur en un point du rectangle ODAH est fournie par la formule (6). On peut obtenir directement sa valeur en un point du rectangle OHBC en partant de la relation

$$\iint \frac{\partial^2 z(\xi, \eta)}{\partial\xi\, \partial\eta}\, d\xi\, d\eta = \iint f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

les deux intégrales doubles étant étendues au quadrilatère mixti-

ligne MNQP, et en appliquant la formule de Green au premier membre. On trouve ainsi

$$(11) \qquad z_M = z_P + z_N - z_Q + \int_{(PQ)} \chi(\eta)\, d\eta + \iint_{(MNQP)} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

en supposant que, le long de OA, la dérivée $\frac{\partial z}{\partial y}$ se réduit à $\chi(y)$. L'intégrale double qui est au second membre doit être changée de signe lorsque le point M est entre l'arc OE et OC.

On pourrait imaginer bien d'autres combinaisons pour déterminer une intégrale, par exemple supposer connues les données de Cauchy le long d'un arc AB, et les valeurs de l'intégrale le long de deux arcs de courbe AC, BD issus des points A et B. Le problème des cordes vibrantes (n° 493) nous offrira un exemple de ce genre.

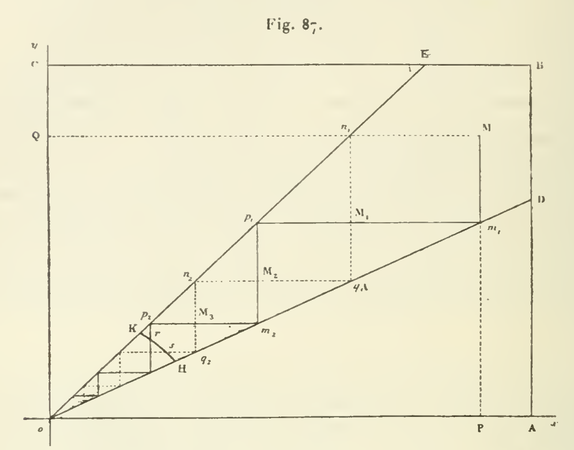
491. **Détermination d'une intégrale par ses valeurs le long de deux courbes.**— Le dernier problème traité ne serait pas déterminé si l'on se donnait seulement les valeurs de l'intégrale le long de deux arcs OA et OE, puisqu'on peut encore choisir arbitrairement la fonction à laquelle se réduit l'une des dérivées partielles de z le long de OA. Mais il n'en est plus de même quand les deux arcs sont situés dans le même angle des caractéristiques. Considérons, dans le rectangle OABC, deux arcs de courbe issus de l'origine OD, OE, dont l'arc inférieur OD n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à Oy, tandis que l'arc OE n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à Ox. Soient $y = \pi(x)$, $x = \chi(y)$ les équations de ces deux arcs de courbe, qu'on a représentés par des portions de droite, pour la commodité du dessin (*fig.* 87). Il existe une intégrale de l'équation (1) et une seule se réduisant à une fonction donnée $\varphi(x)$ le long de OD, et à une autre fonction donnée $\psi(y)$ le long de OE; nous pouvons évidemment supposer que ces deux fonctions sont nulles à l'origine.

Nous traiterons d'abord le cas où $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont nulles identiquement. A partir d'un point quelconque M du rectangle OABC, on trace deux lignes brisées. L'une L, figurée en traits pleins, s'obtient en menant par M la parallèle Mm_1 à Oy jusqu'à sa rencontre en m_1 avec OD, puis la parallèle $m_1 p_1$ à Ox, la parallèle $p_1 m_2$ à Oy, et ainsi de suite alternativement. La seconde ligne brisée L′, marquée en pointillé, s'obtient par une construction analogue, en commençant par la parallèle Mn_1 à Ox. Il est clair que ces deux lignes brisées ont un nombre infini de côtés et se rapprochent de plus en plus de l'origine.

Cela posé, soient I et I′ les intégrales doubles $\iint f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ étendues

respectivement aux portions du plan comprises, d'une part, entre Ox, la ligne L et l'ordonnée MP, d'autre part, entre Oy, la ligne L' et la droite MQ. Il est clair que ces intégrales ne dépendent respectivement que de x et de y

Fig. 87.



et que les deux lignes L et L' sont confondues lorsque le point M vient sur l'une des lignes OD, OE. La fonction

$$z(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - \mathrm{I} - \mathrm{I}'$$

est donc une intégrale de l'équation $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x,y)$, qui devient nulle lorsque le point M vient sur OD ou sur OE.

Pour traiter le cas où les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont quelconques, désignons par $F(x, y)$ l'intégrale double $\int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, qui est une fonction régulière dans le rectangle OABC. Si $Z(x, y)$ est une autre intégrale régulière de l'équation (1), on a $\dfrac{\partial^2 (Z - F)}{\partial x\, \partial y} = 0$, et par conséquent, en considérant successivement tous les rectangles $M n_1$, $M_1 m_1$, $M_1 p_1 M_2 q_1$, $M_2 n_2 M_3 m_2$, ..., on peut écrire la série d'égalités (I, nº 122) :

$$(12) \quad \begin{cases} Z_M + Z_{M_1} - Z_{m_1} - Z_{n_1} = F_M + F_{M_1} - F_{n_1} - F_{m_1}, \\ Z_{M_1} + Z_{M_2} - Z_{p_1} - Z_{q_1} = F_{M_1} + F_{M_2} - F_{p_1} - F_{q_1}, \\ Z_{M_2} + Z_{M_3} - Z_{m_2} - Z_{n_2} = F_{M_2} + F_{M_3} - F_{m_2} - F_{n_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Dans cette suite d'égalités tout est connu, sauf Z_{M_1}, Z_M, ... Pour éliminer ces inconnues, il suffit d'ajouter les égalités précédentes après les avoir multipliées par $+1$ et -1 alternativement. On obtient ainsi Z_M exprimé par une série, et l'on démontre qu'inversement cette série est convergente et représente une fonction régulière dans le rectangle OABC, satisfaisant aux conditions du problême [1].

Remarque. — Coupons les deux arcs OD, OE par un arc tel que HK (*fig.* 87). Une intégrale serait déterminée dans un domaine facile à définir si l'on connaissait les données de Cauchy le long de KH et les valeurs de l'intégrale le long de HD et de KE. Dans le cas de la figure, la valeur de l'intégrale en M s'obtiendrait en ajoutant aux trois égalités (12) la formule obtenue par l'application du théorème de Green à l'intégrale double

$$\int\int \frac{\partial^2(Z-F)}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\xi\,b\eta,$$

étendue à l'aire du pentagone mixtiligne $M_3 p_2 r s q_3$, et en éliminant les inconnues Z_{M_1}, Z_{M_2}, Z_{M_3}.

492. **Mouvement rectiligne d'un gaz.** — Considérons un tuyau cylindrique rempli de gaz, fermé à une extrémité O, et indéfini dans l'autre sens ; si l'on imprime à la tranche qui est en O un certain mouvement au moyen de la paroi, ou d'un piston mobile, il en résulte pour la colonne d'air contenue dans le cylindre certaines modifications qu'on étudie en Acoustique. Soient MN une tranche de gaz située à la distance x de O, z son déplacement à l'instant t : z est une fonction de x et de t, et des considérations physiques prouvent que z satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \tag{13}$$

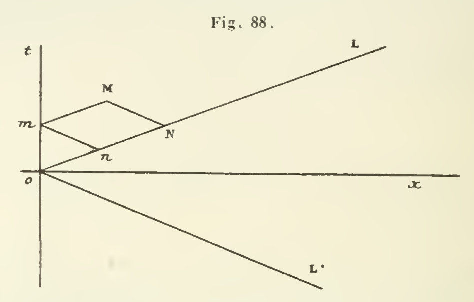
a étant une constante. Cette équation se ramène à la forme $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0$, en prenant pour nouvelles variables $\xi = x + at$, $\eta = x - at$, pourvu qu'on suppose continues les dérivées partielles du second ordre de z (I, n° 63), et par suite les caractéristiques sont représentées, dans le plan des xt, par les deux familles de droites $x \pm at = C$.

L'intégrale cherchée doit satisfaire aux conditions suivantes : à l'instant origine $t = 0$, la paroi et la colonne d'air sont au repos, c'est-à-dire qu'on

(1) E. Goursat, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. VI, 1904, p. 117.

à $z = 0$, $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ pour $t = 0$, $x \geqq 0$; ce sont les données de Cauchy le long de la partie positive de l'axe Ox; 2° on imprime à la tranche initiale un mouvement dont la loi est connue, c'est-à-dire que pour $x = 0$, $t \geqq 0$, z doit se réduire à une fonction $f(t)$ qui est nulle ainsi que sa dérivée pour $t = 0$. Le problème à résoudre est donc un *problème mixte* et la solution résulte aisément de la théorie générale du n° 490. Menons par l'origine les deux caractéristiques $x = \pm at$ (*fig.* 88). Puisque z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ sont nuls le long de Ox, z est nul aussi dans tout l'angle des caractéristiques LOL′ et en particulier le

Fig. 88.



long de OL. Pour avoir la valeur de z en un point $M(x, t)$ situé au-dessus de OL, menons la parallèle Mm à OL, et les parallèles MN, mn à la seconde caractéristique. D'après ce qu'on a vu plus haut, on doit avoir

$$Z_M + Z_n = Z_N + Z_m;$$

et par suite $Z_M = Z_m$. Or, l'ordonnée du point m est $t - \frac{x}{a}$, et par suite

$$Z_M = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

En résumé, l'intégrale cherchée a pour expression

$$z = 0 \qquad \left(\text{pour } t \leqq \frac{x}{a}\right), \qquad z = f\left(t - \frac{x}{a}\right) \qquad \left(\text{pour } t \geqq \frac{x}{a}\right).$$

On voit que la tranche, à une distance x de la tranche initiale, reste en repos tant qu'on a $t \leqq \frac{x}{a}$; la constante a représente donc la vitesse de propagation de l'onde. Si l'on cesse d'agir sur la tranche initiale au bout d'un temps T, la fonction $f(t)$ reste constante pour $t \geqq T$; la tranche d'abscisse x qui entre en mouvement à l'instant $\frac{x}{a}$ revient au repos à partir de l'instant $\frac{x}{a} + T$. L'intégrale ne dépendant que de $t - \frac{x}{a}$, on voit que l'onde se propage tout

entière sans changement intérieur; on dit qu'une pareille onde est *régulière* (¹).

Considérons en second lieu un cylindre indéfini dans les deux sens. Nous supposerons que l'ébranlement initial a été produit en une portion limitée du tuyau; analytiquement, cela revient à dire que pour $t = 0$, z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ doivent se réduire à des fonctions données $f(x)$ et $\varphi(x)$ qui sont nulles en dehors d'un intervalle $(0, l)$. C'est le problème de Cauchy lui-même, les données étant portées par l'axe des x tout entier, et nous pouvons prévoir sans aucun calcul la nature de la solution. Par l'origine et par le point A d'abscisse l sur Ox, menons les caractéristiques; ces droites divisent le plan en un certain nombre de régions (*fig.* 89). Soient MP, MQ les deux caractéristiques qui passent en un point M; nous avons vu que la valeur de l'intégrale en M s'exprime par une intégrale prise le long de PQ, qui ne dépend que des données $f(x)$ et $\varphi(x)$. Ces fonctions étant nulles à droite de A et à gauche de O,

---

(¹) En réalité, l'équation (13) ne convient qu'aux *petits mouvements* des gaz. L'équation exacte est

$$(13)' \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = [\psi'(p)]^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \psi(p) = -\frac{1}{k}(1+p)^{\frac{1-m}{2}},$$

k et m étant deux constantes dont la seconde m est supérieure à l'nnité. On passe de (13)' à l'équation simplifiée du texte en supposant que les variations de $\psi'(p)$ pendant le mouvemenf sont infiniment petites, et en remplaçant $\psi'(p)$ par une constante a. Mais on peut aussi résoudre le problème proposé pour l'équation (13)', c'est-à-dire trouver une intégrale $z(x, t)$ de cette équation, continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre $p = \frac{\partial x}{\partial z}$, $q = \frac{\partial z}{\partial t}$, pour $x \geqq 0$, $t \geqq 0$, s'annulant pour $t = 0$, quel que soit x, et se réduisant, pour $x = 0$, à une fonction $f(t)$, qui est nulle, ainsi que $f'(t)$ pour $t = 0$. D'après la signification physique de ce problème, un point de la partie positive de Ox reste en repos jusqu'à un certain moment $t = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction positive et croissante, c'est-à-dire qu'il y a une propagation par ondes. La surface qui représente l'intégrale cherchée se confond donc avec le plan $z = 0$ dans la région comprise entre l'axe Ox et la courbe $t = \varphi(x)$. Au-dessus de cette courbe C, la solution cherchée est représentée par une surface tangente au plan des xy le long de C, et nous sommes ramenés au problème d'Hugoniot (p. 72).

On a vu plus haut que cette surface intégrale S est une développable tangente au plan des xy suivant la courbe C, qui est une caractéristique pour la solution $z = 0$. Dans le cas actuel, les caractéristiques situées sur le plan des xy sont les deux systèmes de droites $t = t_0 \pm \frac{x}{\psi'(0)}$. Comme la courbe C doit passer par l'origine et être située dans l'angle $x O t$, si la tranche initiale entre en vibration à l'instant $t = 0$, cette courbe C se confond forcément avec la droite D, $x = t\psi'(0)$, et nous voyons déjà que l'onde se propage avec une vitesse constante $\psi'(0)$.

l'intégrale cherchée est nulle dans les régions (I) et (I)', elle est égale à une constante K dans la région (II), et à la même constante changée de signe — K dans la région (II)'. Dans une des régions marquées par des hachures horizontales seulement, elle conserve une valeur constante quand M se déplace parallèlement à la caractéristique OB; c'est donc une fonction de $x - at$; de même, dans une des régions marquées par des hachures verticales seulement, c'est une fonction de $x + at$. Enfin, dans le parallélogramme OCAB, elle dépend à la fois de $x + at$, et de $x - at$.

Il est facile de vérifier ces conclusions par le calcul. L'intégrale générale de l'équation (13) est $z = F(x + at) + \Phi(x - at)$, les fonctions F et Φ n'étant déterminées qu'à une constante près. Ces fonctions doivent satisfaire

---

Pour achever de déterminer la surface S, nous remarquons qu'elle doit vérifier une des deux équations $\psi(p) \pm q = \psi(0)$, car les équations différentielles des deux systèmes de caractéristiques de l'équation (13)' admettent les deux combinaisons intégrales

$$d[q + \psi(p)] = 0, \qquad d[q - \psi(p)] = 0.$$

La première convient aux caractéristiques du système auquel n'appartient pas la droite D, et par suite, nous devons prendre le signe + devant q. Cette équation du premier ordre s'écrit encore

$$(e) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \left(1 + k\frac{\partial z}{\partial t}\right)^{\frac{2}{1-m}} - 1,$$

et l'on est ramené à chercher une intégrale de cette équation du premier ordre passant par la courbe plane Γ du plan des zt, représentée par l'équation $z = f(t)$. Or, l'équation (e) admet l'intégrale complète formée de plans (II, n° 444),

$$z = \left((1 + ka)^{\frac{2}{1-m}} - 1\right)x + at + b,$$

et l'intégrale cherchée est l'enveloppe de ce plan quand on établit entre a et b une relation telle qu'il renferme une tangente à Γ (II, n° 446). L'équation du plan P passant par la tangente à L au point de coordonnées $[0, \lambda, f(\lambda)]$ est, comme on le voit aisément,

$$z = f(\lambda) + f'(\lambda)(t - \lambda) + \left\{[1 + kf'(\lambda)]^{\frac{2}{1-m}} - 1\right\}x.$$

Entre la droite D et l'axe Ot, la fonction cherchée $z(x, t)$ est donc représentée sur la surface développable, enveloppe du plan P, dépendant du paramètre variable λ.

Si une portion de l'arête de rebroussement de cette surface projette dans l'angle xOt, les dérivées secondes r, s, t deviennent infinies en ces points. Cette discontinuité correspond au *phénomène de Riemann-Hugoniot*. (Pour l'étude complète du mouvement rectiligne d'un gaz, *voir* HADAMARD. *Leçons sur la propagation des ondes*, Chap. IV.)

aux conditions initiales

$$F(x) + \Phi(x) = f(x), \qquad F'(x) - \Phi'(x) = \frac{1}{a}\varphi(x);$$

on peut supposer $F(0) = \Phi(0)$ et par suite poser

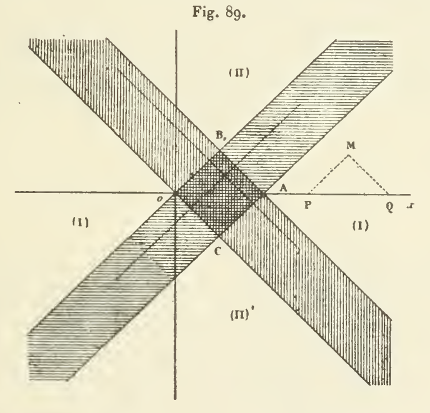
$$F(x) - \Phi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \varphi(x)\,dx = \psi(x);$$

l'intégrale cherchée a donc pour expression [*cf.* n° 485, formule (22)]

$$(14) \quad z = \frac{1}{2}[f(x+at) + \psi(x+at)] + \frac{1}{2}[f(x-at) - \psi(x-at)].$$

Rappelons que $f(x)$ est nul en dehors de l'intervalle $(0, l)$, que $\psi(x)$ est nul pour $x \leqq 0$, et conserve une valeur constante H pour $x \geqq l$. En appliquant

Fig. 89.



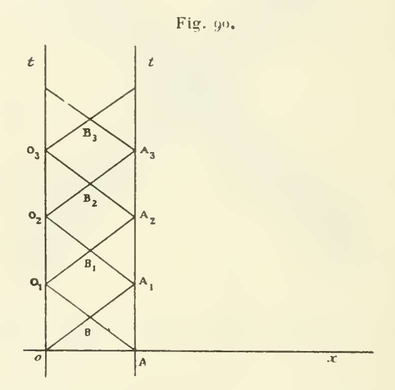
la formule (14) à chacune des régions du plan successivement, il est aisé de retrouver les conclusions précédentes. Donnons, par exemple, à x une valeur constante $x_1 > l$. Lorsque t varie de 0 à $\frac{x_1 - l}{a}$, $f(x_1 + at)$ et $f(x_1 - at)$ sont nuls, $\psi(x_1 + at)$ et $\psi(x_1 - at)$ ont la même valeur constante H ; on a donc $z = 0$. Quand t varie de $\frac{x_1 - l}{a}$ à $\frac{x_1}{a}$, $f(x_1 + at) = 0$, $\psi(x_1 + at) = H$, et z a pour expression $\frac{H}{2} + \frac{1}{2}[f(x_1 - at) - \psi(x_1 - at)]$. Enfin pour $t \geqq \frac{x_1}{a}$, $f(x_1 + at)$, $f(x_1 - at)$ et $\psi(x_1 - at)$ sont nuls, et $z = \frac{H}{2}$. L'onde atteint la tranche d'abscisse x_1 à l'instant $\frac{x_1 - l}{a}$, et cette tranche revient au repos, avec

un déplacement constant $\frac{H}{2}$, à l'instant $\frac{x_1}{a}$. On verrait de même qu'il existe une onde régulière qui se propage vers la gauche. Tout se passe, en définitive, comme si l'ébranlement initial provenait de la superposition de deux ondes régulières qui se séparent pour se propager l'une vers la droite, l'autre vers la gauche, avec la vitesse a.

On peut aussi retrouver la formule (22) (Chap. XXV) en faisant le changement de variables $x + at = \xi$, $x - at = \eta$, et appliquant la formule générale (6) à l'équation transformée (voir *Exercices* 2).

493. **Cordes vibrantes.** — Une corde élastique OA de longueur l étant fixée à ses deux extrémités, si on l'écarte de sa position d'équilibre, le déplacement z normal à la corde d'un point d'abscisse x, à l'instant t, est une fonction des variables x et t qui vérifie aussi l'équation (13). Cette fonction inconnue z doit satisfaire à d'autres conditions : 1° les *conditions initiales*, qui expriment que, à l'instant initial $t = 0$, on connaît, pour chaque valeur de x, z et $\frac{\partial z}{\partial t}$, soit $z = f(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t} = \varphi(x)$, ces fonctions étant nulles pour $x = 0$ et pour $x = l$; 2° les *conditions aux limites* qui expriment que les extrémités de

Fig. 90.



la corde sont fixes, c'est-à-dire que z est nul, quel que soit t, pour $x = 0$ et pour $x = l$; nous rencontrons de nouveau un problème mixte. Par le point A d'abscisse l sur Ox menons la caractéristique $x + at = l$, et la parallèle At' à Ot, et par l'origine la caractéristique $x - at = 0$ (*fig.* 90). Les données sont celles de Cauchy sur OA, et l'on doit avoir $z = 0$ sur les droites Ot et At'.

Les données de Cauchy déterminent l'intégrale dans le triangle OAB. Connaissant les valeurs de l'intégrale suivant OO_1 et OB, elle est déterminée dans le triangle OBO_1; de même, l'intégrale est déterminée dans le triangle

ABA_1 par ses valeurs le long de AB et de AA_1 [1]. Connaissant les valeurs de l'intégrale le long de BO_1 et de BA_1, elle est déterminée dans le parallélogramme $O_1BA_1B_1$; en continuant ainsi, on voit de proche en proche qu'elle est déterminée dans toute la région comprise entre les parallèles Ot, At' au-dessus de Ox.

Soit $z = F(x+at) + \Phi(x-at)$ l'intégrale cherchée ; d'après les conditions initiales, on doit avoir

$$F(x) + \Phi(x) = f(x), \qquad F'(x) - \Phi'(x) = \frac{\varphi(x)}{a}.$$

On en déduit, comme tout à l'heure,

$$F(x) = \frac{f(x) + \psi(x)}{2}, \qquad \Phi(x) = \frac{f(x) - \psi(x)}{2},$$

en posant $\psi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \varphi(x)\,dx$. Ces formules ne définissent les deux fonctions $F(u)$, $\Phi(u)$ que pour les valeurs de u comprises entre o et l. Pour que la solution ait un sens, il faut que $F(u)$ soit définie pour toutes les valeurs positives de l'argument, et $\Phi(u)$ pour toutes les valeurs négatives. Les conditions aux limites donnent les relations

$$F(at) + \Phi(-at) = 0, \qquad F(l+at) + \Phi(l-at) = 0,$$

quel que soit t, ce qu'on peut écrire, en remplaçant at par u,

$$F(u) + \Phi(-u) = 0, \qquad F(l+u) + \Phi(l-u) = 0, \qquad u > 0.$$

De la première on tire $\Phi(-u) = -F(u)$, ce qui montre que la fonction Φ sera déterminée pour toutes les valeurs négatives de u, si $F(u)$ est connu pour les valeurs positives de u. Lorsque u varie de o à l, $l-u$ diminue de l à o, $\Phi(l-u)$ est connue ; il en est donc de même de $F(l+u)$, et par suite $F(u)$ est déterminée de o à $2l$. D'autre part, en remplaçant u par $u+l$ dans la seconde des relations précédentes, il vient

$$F(2l+u) + \Phi(-u) = 0,$$

et par suite

$$F(2l+u) = F(u).$$

La fonction $F(u)$ admettant la période $2l$ est donc déterminée pour toute valeur positive de u, et par conséquent il en est de même de $\Phi(u)$ pour $u < 0$.

Méthode de Bernoulli. — Cherchons d'abord des intégrales particulières

---

[1] Ces intégrales se raccordent le long de AB et de OB, car il résulte des données que $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial t}$ sont nuls aux points O et A (*voir* n° 490).

de l'équation (13) de la forme $U(x)V(t)$, la fonction $U(x)$ étant nulle pour $x = 0$ et pour $x = l$. On doit avoir

$$\frac{U''(x)}{U(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{V''(t)}{V(t)},$$

et par suite la valeur commune de ces rapports doit se réduire à une constante K. Pour que l'équation $U''(x) = KU(x)$ admette une intégrale particulière s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = l$, K doit être de la forme $-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$, n étant un nombre entier, et l'on obtient ainsi une infinité d'intégrales de (13) de la forme voulue

$$z = \sin\frac{n\pi x}{l}\left(C\cos\frac{an\pi t}{l} + C'\sin\frac{an\pi t}{l}\right),$$

dont chacune définit un mouvement vibratoire de période $\frac{2l}{na}$. Pour $t = 0$, cette intégrale se réduit à $C\sin\frac{n\pi x}{l}$, tandis que $\frac{\partial z}{\partial t}$ est égale à

$$\frac{an\pi}{l}C'\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Cela étant, supposons que les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ soient développables en séries de sinus dans l'intervalle $(0, l)$ (I, n° 204),

$$(15)\qquad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Il est clair que la série

$$(16)\qquad z = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{an\pi t}{l} + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \frac{l}{an\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{an\pi t}{l}$$

satisfait formellement à l'équation (13), et qu'elle se réduit à $f(x)$, tandis que la série obtenue en dérivant terme à terme par rapport à t se réduit à $\varphi(x)$, pour $t = 0$. C'est la solution de Bernoulli. Elle manque évidemment de rigueur, mais il est possible de la justifier, moyennant quelques hypothèses d'un caractère très général. Nous pouvons en effet représenter la solution cherchée, à l'intérieur du triangle OAB, par la formule (22) (Chap. XXV, p. 106); il en résulte que si la série $\varphi(x)$ est uniformément convergente, l'intégrale cherchée est représentée dans ce triangle par la somme de la série Σz_n obtenue en prenant pour termes les intégrales qui correspondent aux conditions initiales

$$z_n = A_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad \frac{\partial z_n}{\partial t} = B_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (\text{pour } t = 0);$$

elle est donc représentée par la série (16) de Bernoulli. D'après la façon

dont l'on déduit les valeurs de l'intégrale en un point quelconque des valeurs qu'elle prend dans le triangle OAB, il est évident que la formule est valable dans tout le domaine. Or, d'après une proposition générale sur les séries de Fourier, les séries (15) sont uniformément convergentes, si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$, satisfaisant aux conditions de Dirichlet, sont continues [1]. (*Cf.* n° 489. *Remarque* I.)

II. — APPROXIMATIONS SUCCESSIVES. MÉTHODE DE RIEMANN.

494. Détermination d'une intégrale par ses valeurs le long de deux caractéristiques. — Nous allons reprendre, pour une équation linéaire de forme générale du type hyperbolique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial x}{\partial z} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + f(x, y), \tag{17}$$

les problèmes déjà résolus pour l'équation élémentaire $s = f(x, y)$; les fonctions $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$ sont supposées continues. Proposons-nous d'abord de trouver une intégrale se réduisant pour $y = y_0$ à une fonction donnée $\varphi(x)$ et, pour $x = x_0$, à une autre fonction $\psi(x)$, satisfaisant à la condition $\psi(y_0) = \varphi(x_0)$. On peut évidemment supposer $x_0 = y_0 = 0$; nous admettrons de plus, pour préciser, que $\varphi(x)$ est déterminée dans un intervalle $(0, \alpha)$ et $\psi(y)$ dans un intervalle $(0, \beta)$, α et β étant deux nombres positifs, et nous chercherons à déterminer l'intégrale dans le rectangle R limité par les droites $x = 0$, $x = \alpha$, $y = 0$, $y = \beta$. La méthode que nous allons suivre est due à M. Picard [2]. Écrivons l'équation (17) sous la forme un peu plus générale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \lambda\left[a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y)z\right] + f(x, y), \tag{18}$$

λ étant un paramètre que l'on fera ensuite égal à l'unité dans le résultat, et cherchons d'abord une série entière en λ,

$$z = z_0(x, y) + \lambda z_1(x, y) + \ldots + \lambda^n z_n(x, y) + \ldots \tag{19}$$

satisfaisant formellement à l'équation (18) et aux conditions ini-

---

(1) *Voir*, par exemple, le *Traité d'Analyse* de M. Picard (t. I, 2e édition, p. 256).

(2) *Journal de Mathématiques* (1890). Note I du Tome IV des *Leçons sur la Théorie des surfaces* de M. Darboux.

tiales. Pour $\lambda = 0$, l'équation (18) se réduit à l'équation déjà étudiée $s = f(x, y)$, et par suite nous prendrons pour premier terme de la série (19) la fonction

$$z_0(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta,$$

qui se réduit à $\varphi(x)$ pour $y = 0$ et à $\psi(y)$ pour $x = 0$; les autres coefficients $z_1, z_2, \ldots$ doivent tous être nuls pour $x = 0$, quel que soit y, et pour $y = 0$, quel que soit x. En égalant les deux coefficients de λ dans les deux membres de l'équation (18), après la substitution, il vient

$$z_1(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial z_0}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z_0}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z_0 \right] d\eta,$$

et d'une façon générale $z_n(x, y)$ se déduit de $z_{n-1}(x, y)$ par la formule de récurrence

$$(20) \quad z_n(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z_{n-1} \right] d\eta.$$

Le résultat obtenu de cette façon ne diffère pas de celui qu'on obtiendrait par l'application de la méthode des approximations successives, la première valeur approchée étant $z_0(x, y)$. La seconde valeur approchée serait évidemment $z_0 + \lambda z_1$, la troisième $z_0 + \lambda z_1 + \lambda^2 z_2$, et, d'une façon générale, la $n^{ième}$ valeur approchée serait précisément la somme des n premiers termes de la série (19). Si les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont continues et ont une dérivée continue dans les intervalles $(0, \alpha)$ et $(0, \beta)$, toutes les fonctions $z_n(x, y)$ seront régulières dans le rectangle R.

Pour démontrer la convergence de la série (19), nous nous appuierons sur la remarque suivante : soient $z(x, y)$ une fonction régulière dans R, et $Z(x, y)$ l'intégrale double

$$Z(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z \right] d\eta;$$

si l'on remplace les coefficients a, b, c par d'autres coefficients positifs A, B, C, constants ou variables, mais supérieurs aux va-

leurs absolues des coefficients a, b, c; si l'on remplace de même $z(x, y)$ par une autre fonction $u(x, y)$, telle que u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ soient des fonctions dominantes dans R pour z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, il est clair que $Z(x, y)$ sera remplacée par une autre fonction $U(x, y)$, qui sera positive ainsi que ses dérivées dans R, et qu'on aura, en tout point de ce domaine,

$$|Z| < U, \quad \left|\frac{\partial Z}{\partial x}\right| < \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \left|\frac{\partial Z}{\partial y}\right| < \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Cela étant, supposons qu'on ait, en tout point de R,

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} |z_{n-1}(x, y)| < H\frac{(x+y)^n}{n!}, \quad \left|\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right| < H\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ \left|\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right| < H\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-)!}, \end{array} \right.$$

H étant un nombre positif. Soit M une limite supérieure des valeurs absolues des coefficients a, b, c dans R; d'après la remarque précédente, nous aurons

$$|z_n(x, y)| < \int_0^x \int_0^y MH\left[2\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x+y)^n}{n!}\right] dx\, dy,$$

et *a fortiori*

$$|z_n(x, y)| < H\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left[2M + \frac{M(x+y)}{n+2}\right],$$

et l'on voit de même que $\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right|$ sont inférieurs à

$$H\frac{(x+y)^n}{n!}\left[2M + \frac{M(x+y)}{n+1}\right].$$

Par suite les inégalités (21) entraînent les suivantes

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} |z_n(x, y)| < HK\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < HK\frac{(x+y)^n}{n!}, \\ \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < HK\frac{(x+y)^n}{n!}, \end{array} \right.$$

K étant un nombre positif qui ne dépend que de M et des dimen-

sions du rectangle R. Si L est une limite supérieure de

$$|z_0|, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right|,$$

on a d'abord

$$|z_1(x, y)| < 3\,\mathrm{ML}\,xy, \quad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < 3\,\mathrm{ML}\,y, \quad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < 3\,\mathrm{ML}\,x,$$

et *a fortiori*

$$|z_1(x, y)| < 3\,\mathrm{ML}\frac{(x+y)^2}{1.2}, \quad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < 3\,\mathrm{ML}\,(x+y), \quad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < 3\,\mathrm{ML}(x+y).$$

On en conclut, en raisonnant de proche en proche, les inégalités

$$|z_n(x, y)| < 3\,\mathrm{MLK}^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < 3\,\mathrm{MLK}^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!}, \quad \ldots,$$

qui prouvent que la série (19) et les deux séries obtenues par dérivation sont uniformément convergentes dans le domaine R. Soit $z(x, y)$ la somme de la série (19), qui est une fonction régulière dans R. Pour prouver que c'est bien une intégrale de l'équation (18), il suffit d'observer que, d'après la façon dont on a déterminé les coefficients successifs $z_n(x, y)$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ + \lambda \int_0^x d\xi \int_0^y \left[a(\xi, \eta)\frac{\partial \mathrm{S}_{n-1}}{\partial \xi} + \ldots + c(\xi, \eta)\mathrm{S}_{n-1} \right] d\eta, \end{aligned}$$

$\mathrm{S}_n(x, p)$ étant la somme des n premiers termes de la série (19). Lorsque n augmente indéfiniment, S_{n-1}, $\frac{\partial \mathrm{S}_{n-1}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathrm{S}_{n-1}}{\partial y}$ tendent uniformément vers $z(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, et il vient à la limite

$$\begin{aligned} (22) \quad z(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ + \lambda \int_0^x d\xi \int_0^y \left[a(\xi, \eta)\frac{\partial z}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial z}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z \right] d\eta. \end{aligned}$$

La fonction $z(x, y)$ est donc bien une intégrale de (18) et il est clair qu'elle satisfait aussi aux conditions initiales.

C'est la seule intégrale régulière dans R *satisfaisant à ces*

conditions. Soit en effet $Z(x, y)$ une intégrale satisfaisant à ces conditions; posons

$$Z - S_n = U_n(x, y),$$

S_n ayant toujours la même signification. En comparant l'expression de S_n écrite plus haut avec la formule

$$Z(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$+ \lambda \int_0^x \int_0^y \left[a(\xi, \eta)\frac{\partial Z}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial Z}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) Z\right] d\xi\, d\eta,$$

il vient

$$U_n(x, y) = \lambda \int_0^x d\xi \int_0^y \left[\quad a(\xi, \eta)\frac{\partial U_{n-1}}{\partial \xi} \right.$$
$$\left. + b(\xi, \eta)\frac{\partial U_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) U_{n-1}(\xi, \eta)\right] d\eta.$$

Il résulte du calcul que nous venons de faire que $U_n(x, y)$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, quelle que soit la fonction $U_0(x, y)$ dont on part pour définir la suite de fonctions U_1, U_2, ..., U_n, ... L'intégrale $Z(x, y)$ est donc la limite de $S_n(x, y)$, c'est-à-dire est identique à $z(x, y)$.

Si les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(y)$ ou leurs dérivées $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$ présentent un nombre fini de discontinuités dans les intervalles $(0, \alpha)$ et $(0, \beta)$, tout en restant bornées, les fonctions z_1, z_2, ... sont encore régulières dans le domaine R, et l'intégrale $z(x, y)$ représentée par la série (19) est elle-même régulière dans R, sauf le long d'un nombre fini de segments de caractéristiques (*Cf.* n° 489).

495. La fonction de Riemann. — Le problème qui vient d'être traité peut toujours se ramener au cas particulier où les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont nulles identiquement, en prenant pour inconnue $z - \varphi(x) - \psi(y) + \varphi(0)$ à la place de z. Cette transformation modifie seulement l'expression de $f(x, y)$ sans changer les coefficients a, b, c. Le premier terme $z_0(x, y)$ de la série (19) est alors égal à l'intégrale double

$$z_0(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta.$$

D'une façon générale, supposons que z_{n-1} soit de la forme

$$(23) \qquad z_{n-1}(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta) g_{n-1}(x, y; \xi, \eta)\, d\eta,$$

$g_{n-1}(x, y; \xi, \eta)$ étant une fonction continue des deux couples de variables (x, y), (ξ, η) qui admet des dérivées partielles continues par rapport à x et à y. Nous allons montrer que $z_n(x, y)$ peut être mis sous une forme analogue. Pour appliquer la formule de récurrence (20), calculons d'abord $z_{n-1}(\xi, \eta)$, $\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}$. Par hypothèse, nous avons, en remplaçant dans (23), x, y, ξ, η par ξ, η, u, v,

$$z_{n-1}(\xi, \eta) = \int_0^\xi du \int_0^\eta f(u, v) g_{n-1}(\xi, \eta; u, v)\, dv$$

et, par suite,

$$\frac{\partial z_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \int_0^\xi \int_0^\eta f(u, v) \frac{\partial g_{n-1}}{\partial \xi}\, du\, dv$$
$$+ \int_0^\eta f(\xi, v) g_{n-1}(\xi, \eta; \xi, v)\, dv,$$

$$\frac{\partial z_{n-1}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \int_0^\xi \int_0^\eta f(r, v) \frac{\partial g_{n-1}}{\partial \eta}\, du\, dv$$
$$+ \int_0^\xi f(u, \eta) g_{n-1}(\xi, \eta; u, \eta)\, du.$$

L'expression de $z_n(x, y)$ se composera de trois termes

$$(24) \quad z_n(x, y) = \left[\int_0^x d\xi \int_0^y d\eta \int_0^\xi\right] du \int_0^\eta f(u, v) \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial g_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial g_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) g_n \right.$$
$$+ \int_0^x d\xi \int_0^y d\eta \int_0^\eta a(\xi, \eta) f(\xi, v) g_{n-1}(\xi, \eta; \xi, v)\, dv$$
$$+ \int_0^x d\xi \int_0^y d\eta \int_0^\xi b(\xi, \eta) f(u, \eta) g_{n-1}(\xi, \eta; u, \eta)\, du.$$

Intervertissons l'ordre des deux premières intégrations dans la première intégrale triple du second membre, en appliquant la formule de Dirichlet (I, n° 121); elle peut encore s'écrire

$$\int_0^x d\xi \int_0^y dv \int_v^y a(\xi, \eta) f(\xi, v) g_{n-1}(\xi, \eta; \xi, v)\, d\eta,$$

ou, en permutant les lettres η et v,

$$(25)\quad \int_0^x d\xi \int_0^y d\eta \int_0^\eta a(\xi, v) f(\xi, \eta) g_{n-1}(\xi, v; \xi, \eta)\, dv$$
$$= \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta \left[\int_\eta^y a(\xi, v) g_{n-1}(\xi, v; \xi, \eta)\, dv \right].$$

La seconde intégrale triple de la formule (24) peut de même s'écrire

$$\int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\eta \left[\int_\xi^x b(u, \eta) g_{n-1}(u, \eta; \xi, \eta)\, du \right].$$

Quant à l'intégrale quadruple qui forme le premier terme de $z_n(x, y)$, elle est étendue à un domaine de l'espace à quatre dimensions qui est défini par les inégalités

$$0 \leqq u \leqq \xi \leqq x, \qquad 0 \leqq v \leqq \eta \leqq y.$$

Si l'on intègre d'abord par rapport aux variables ξ, η, les limites seront u et x pour ξ, v et y pour η, et les limites seront ensuite o et x pour u, o et y pour v. Cette intégrale quadruple peut donc s'écrire sous la forme équivalente

$$\int_0^x du \int_0^y dv \int_u^x d\xi \int_v^y f(u, v) \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial g_{n-1}(\xi, \eta; u, v)}{\partial \xi} + \ldots \right] d\eta,$$

ou encore en permutant les deux couples de variables (u, v) et (ξ, η),

$$\int_0^x d\xi \int_0^y d\eta f(\xi, \eta) \left\{ \int_\xi^x du \int_\eta^y \left[a(u, v) \frac{\partial g_{n-1}(u, v; \xi, \eta)}{\partial u} + \ldots \right] dv \right\}.$$

On voit donc qu'après toutes ces transformations l'expression de $z_n(x, y)$ prend la forme

$$(26)\qquad z_n(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta) g_n(x, y; \xi, \eta)\, d\eta$$

en posant

$$(27)\quad g_n(x, y; \xi, \eta) = \int_\xi^x du \int_\eta^y \left[a(u, v) \frac{\partial g_{n-1}(u, v; \xi, \eta)}{\partial u} + \ldots \right] dv$$
$$+ \int_\xi^x b(u, \eta) g_{n-1}(u, \eta; \xi, \eta)\, du$$
$$+ \int_\eta^y a(\xi, v) g_{n-1}(\xi, v; \xi, \eta)\, dv.$$

En partant de $g_0 = 1$, on calculera de proche en proche par cette formule $g_1(x, y; \xi, \eta)$, $g_2(x, y; \xi, \eta)$, ... Le résultat obtenu peut s'énoncer ainsi : *L'intégrale de l'équation* (18), *qui est nulle pour* $x = 0$, *quel que soit* y, *et pour* $y = 0$, *quel que soit* x, *est représentée, dans le rectangle* R, *par l'intégrale double*

$$(28) \qquad z(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta; \lambda) d\eta,$$

$G(x, y; \xi, \eta; \lambda)$ *désignant la somme de la série*

$$(29) \quad G(x, y; \xi, \eta; \lambda) = 1 + \lambda g_1(x, y; \xi, \eta) + \ldots + \lambda^n g_n(x, y; \xi, \eta) + \ldots.$$

Cette fonction G a été introduite par Riemann d'une façon toute différente qui sera exposée plus loin.

On pourrait étudier directement cette série (29) comme la série (19), mais il est facile de déduire ses propriétés de ce qui précède. Observons d'abord qu'elle satisfait formellement à l'équation homogène

$$(30) \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial x \, \partial y} = \lambda \left(a \frac{\partial G}{\partial x} + b \frac{\partial G}{\partial y} + c G \right);$$

on peut écrire en effet, d'après la formule de récurrence (27), en admettant que la série (29) est uniformément convergente, ainsi que celles qu'on en déduit en différentiant par rapport à x et par rapport à y,

$$G(x, y; \xi, \eta; \lambda) = \lambda \int_\xi^x du \int_\eta^y \left[a(u, v) \frac{\partial F(u, v; \xi, \eta; \lambda)}{\partial u} + \ldots \right] dv$$
$$+ X(x; \xi, \eta, \lambda) + Y(y; \xi, \eta, \lambda).$$

On a donc aussi

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \, \partial y} = \lambda \left[a(x, y) \frac{\partial G}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial G}{\partial y} + c(x, y) G \right].$$

D'autre part, pour $x = \xi$, elle se réduit à la série

$$(31) \qquad 1 + g_1(\xi, y; \xi, \eta)\lambda + \ldots + g_n(\xi, y; \xi, \eta)\lambda^n + \ldots$$

et la relation de récurrence (27) devient ici

$$g_n(\xi, y; \xi, \eta) = \int_\eta^y a(\xi, v) g_{n-1}(\xi, v; \xi, \eta) \, dv.$$

La série (31) est précisément la série qu'on obtiendrait en développant, suivant les puissances de λ, l'intégrale de l'équation linéaire

$$\frac{dw}{dy} = \lambda a(\xi, y) w,$$

qui se réduit à *un* pour $y = \eta$, intégrale qui a pour expression $e^{\lambda \int_\eta^y a(\xi, \eta) dv}$. On verrait de même que, pour $y = \eta$, G se réduit à $e^{\lambda \int_\xi^x b(u, \eta) du}$. Nous avons démontré, au paragraphe précédent, qu'il existe une intégrale de l'équation (30) qui se réduit à $e^{\lambda \int_\eta^y a(\xi, v) dv}$ pour $x = \xi$ et à $e^{\lambda \int_\xi^x b(u, \eta) du}$ pour $y = \eta$. Cette intégrale est représentée par une série uniformément convergente dont tous les termes, d'après la façon même dont on les obtient, sont des fonctions holomorphes de λ. Elle est donc elle-même une fonction entière du paramètre λ, et son développement suivant les puissances de λ coïncide forcément avec la série (29). En résumé, *la fonction* $G(x, y; \xi, \eta, \lambda)$ *est une intégrale de l'équation* (30) *qui satisfait aux conditions aux limites ci-dessous :*

$$(32) \quad G = e^{\lambda \int_\xi^x b(u, \eta) du} \quad (\text{pour } y = \eta), \qquad G = e^{\lambda \int_\eta^y a(\xi, v) dv} \quad (\text{pour } x = \xi).$$

496. **Première solution du problème de Cauchy.** — Reprenons de même le problème de Cauchy pour l'équation générale (18), et proposons-nous de développer, suivant les puissances du paramètre λ, l'intégrale satisfaisant aux mêmes conditions qu'au n° 484. Nous prendrons pour premier terme de la série l'intégrale $z_0(x, y)$ de l'équation $s = f(x, y)$ satisfaisant aux conditions données, et nous déterminerons les coefficients successifs $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$, ..., au moyen de la loi de récurrence

$$(33) \quad z_n(x, y) = \pm \iint_{(PMQ)} \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z_{n-1}(\xi, \eta) \right] d\xi \, d\eta,$$

où l'on prend le signe + ou le signe — devant l'intégrale, suivant que l'arc AB qui porte les données a la disposition (84^a) ou (84^b).

Le domaine d'intégration, qui est le triangle mixtiligne PMQ, est choisi de telle façon que $z_n(x, y)$ soit nul, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, le long de l'arc AB. Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans le cas de la figure 84^a, et supposons le point M au-dessus de l'arc AB. Il suffit d'un artifice très simple pour ramener la formule (33) à une formule de récurrence de la forme (20). Imaginons, en effet, trois fonctions $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$, nulles dans le triangle mixtiligne ABD, au-dessous de AB, et égales respectivement aux coefficients $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, au-dessus de AB. Il est clair que si l'on a $u_{n-1}(x, y) = z_{n-1}(x, y)$, l'intégrale double

$$(33)' \quad u_n(x, y) = \iint_{(\mathrm{P'MQ'D})} \left[\alpha(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + \beta(\xi, \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + \gamma(\xi, \eta)\, u_{n-1}(\xi, \eta)\right] d\xi\, d\eta,$$

étendue à l'aire du rectangle P'MQ'D, sera nulle si le point M est au-dessous de l'arc AB et égale à $z_n(x, y)$ si le point M est au-dessus de AB. Malgré la discontinuité des fonctions $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$ le long de AB, cette fonction est continue, ainsi que ses dérivées partielles $\frac{\partial u_n}{x}$, $\frac{\partial u_n}{y}$ dans le rectangle R. Cela étant, imaginons qu'on veuille développer, suivant les puissances de λ, l'intégrale de l'équation auxiliaire

$$(34) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \lambda\left[\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x, y)\, u\right] + f(x, y),$$

qui prend les mêmes valeurs que $z_0(x, y)$ le long des côtés AD et BD de R

$$(35) \quad u(x, y) = u_0(x, y) + \lambda u_1(x, y) + \ldots + \lambda^n u_n(x, y) + \ldots .$$

On a évidemment $u_0(x, y) = z_0(x, y)$, et les coefficients u_1, u_2, ... s'obtiennent de proche en proche au moyen de la formule (33)'. Malgré la discontinuité des coefficients α, β, γ le long de l'arc AB, les raisonnements du n° 494 s'appliquent sans modification, et cette série est uniformément convergente, ainsi que celles qu'on en déduit en dérivant terme à terme par rapport à x ou à y. Si le point $M(x, y)$ est au-dessous de l'arc AB, on a évidemment $u_n(x, y) = 0$, $n \geqq 1$, et la série (35) se réduit à son pre-

mier terme $u_0(x, y)$. Mais si le point M est au-dessus de AB, on voit de proche en proche, en vertu de la remarque précédente, qu'on a $u_1(x, y) = z_1(x, y), \ldots, u_n(x, y) = z_n(x, y)$, et la série (35) représente précisément, dans le triangle mixtiligne ACB, une intégrale $z(x, y)$ de l'équation (18) telle que

$$\delta = z(x, y) - z_0(x, y),$$

soit nulle, ainsi que $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, $\frac{\partial \delta}{\partial y}$ le long de AB. La série obtenue par la méthode des approximations successives représente donc une intégrale satisfaisant aux conditions de Cauchy au-dessus de AB, et l'on verrait de la même façon que cette série est aussi uniformément convergente au-dessous de AB. Le raisonnement s'achève comme plus haut.

Dans le cas particulier où l'intégrale cherchée doit être nulle, ainsi que ses deux dérivées partielles, le long de AB, le premier terme de la série a pour expression

$$z_0(x, y) = \int\int_{(\text{PMQ})} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

et, par une suite de transformations d'intégrales multiples, tout à fait analogues à celles qui ont été effectuées au n° 495, on démontre de proche en proche que $z_n(x, y)$ peut se mettre sous la forme

$$z_n(x, y) = \int\int_{(\text{PMQ})} f(\xi, \eta) g_n(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

les fonctions $g_1(x, y; \xi, \eta)$, $g_2(x, y; \xi, \eta)$, ... se déduisant de

$$g_0(x, y; \xi, \eta) = 1,$$

au moyen de la formule de récurrence (27). La valeur de l'intégrale satisfaisant à ces conditions est donc représentée, en un point $M(x, y)$ du rectangle R, par l'intégrale double

$$(36) \qquad z(x, y) = \int\int_{(\text{PMQ})} f(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta; \lambda)\, d\xi\, d\eta.$$

G étant la fonction de Riemann définie plus haut ; dans le cas de la figure 84^b, l'intégrale double doit être précédée du signe —.

Supposons, en second lieu, que les données de Cauchy le long de AB soient arbitraires. Soit $\zeta(x, y)$ une fonction quelconque

satisfaisant à ces conditions, par exemple l'intégrale de l'équation $s = 0$. En posant $z = \zeta + u$, on est conduit à l'équation

$$(37)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \lambda\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu\right) + f(x, y) + \lambda\left(a\frac{\partial \zeta}{\partial x} + b\frac{\partial \zeta}{\partial y} + c\zeta\right) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y},$$

et la fonction $u(x, y)$ doit être nulle, ainsi que $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, le long de AB. Les coefficients a, b, c n'ayant pas changé, la fonction de Riemann G est la même pour les deux équations (18) et (37). L'intégrale cherchée a donc pour expression

$$(38)\quad z(x,y) = \zeta(x,y) + \iint_{(\mathrm{PMQ})} f(\xi, \eta)\,\mathrm{G}(x, y; \xi, \eta; \lambda)\,d\xi\,d\eta + \iint_{(\mathrm{PMQ})} \left\{\lambda\left[a(\xi,\eta)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)\zeta\right] - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi\,\partial \eta}\right\}\mathrm{G}\,d\xi\,d\eta.$$

On aurait de même l'intégrale prenant les mêmes valeurs qu'une fonction donnée $\zeta(x, y)$ le long de AD et de BD en prenant comme champ d'intégration de l'intégrale double le rectangle MQ'DP'.

On peut arriver très aisément à la formule (36) par une méthode synthétique. On a vu (II, n° 401) que l'intégrale d'une équation différentielle linéaire avec second membre $F(y) = f(x)$, qui est nulle ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées pour $x = x_0$, est représentée par une intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha) f(\alpha)\,d\alpha,$$

$\varphi(x, \alpha)$ étant une fonction déterminée de x et de α. Par analogie, cherchons à déterminer *a priori* une fonction $\varphi(x, y; \xi, \eta)$ telle que l'intégrale double

$$(39)\qquad z(x, y) = \iint_{(\mathrm{PMQ})} f(\xi, \eta)\,\varphi(x, y; \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

étendue à l'aire du triangle PMQ, soit une intégrale de l'équation (18); nous supposerons pour le calcul que la fonction φ est continue et admet des dérivées continues $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}$. La dérivée $\frac{\partial z}{\partial x}$ se composera de deux termes, dont l'un s'obtient par la formule habituelle de différentiation sous le signe intégral, et dont l'autre provient de la variation du champ d'intégration. Pour calculer ce dernier terme, observons que, lorsqu'on donne à x un accrois-

sement $\Delta x > 0$, le champ d'intégration est augmenté d'une bande de largeur Δx, ayant pour hauteur MP (*fig.* 84) et la partie principale de la valeur de l'intégrale double étendue à cette bande est évidemment

$$\Delta x \int_{(PM)} f(x, \eta)\, \varphi(x, y;\, x, \eta)\, d\eta.$$

On a donc

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int\int_{(PMQ)} f(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\xi\, d\eta + \int_{(PM)} f(x, \eta)\, \varphi(x, y;\, x, \eta)\, d\eta,$$

formule que l'on pourrait aussi établir par un calcul élémentaire, en mettant en évidence les limites variables dans l'intégrale double (39). On trouve de même

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int\int_{(PMQ)} f(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, d\xi\, d\eta + \int_{(QM)} f(\xi, y)\, \varphi(x, y;\, \xi, y)\, d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \int\int_{(PMQ)} f(\xi, \eta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}\, d\xi\, d\eta + \int_{(PM)} f(x, \eta) \frac{\partial}{\partial y}[\varphi(x, y;\, x, \eta)]\, d\eta$$
$$+ \int_{(QM)} f(\xi, y) \frac{\partial}{\partial x}[\varphi(x, y;\, \xi, y)]\, d\xi + \varphi(x, y;\, x, y) f(x, y).$$

Pour que la fonction $z(x, y)$, représentée par la formule (39) soit une intégrale de l'équation (18), quelle que soit la fonction $f(x, y)$, il faut et il suffit que, après la substitution, les termes sous les différents signes d'intégration soient identiques, ainsi que les termes en dehors de tout signe $\int$, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = \lambda \left[a(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c(x, y) \varphi \right],$$
$$\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(x, y;\, x, \eta)] = \lambda\, a(x, y)\, \varphi(x, y;\, x, \eta),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}[\varphi(x, y;\, \xi, y)] = \lambda\, b(x, y)\, \varphi(x, y;\, \xi, y),$$
$$\varphi(x, y;\, x, y) = 1.$$

Ces conditions sont identiques à celles qui déterminent la fonction

$$G(x, y;\, \xi, \eta;\, \lambda).$$

En effet, la première exprime que $\varphi(x, y;\, \xi, \eta)$ est une intégrale de l'équation homogène (30). Quant aux trois dernières, on en déduit qu'on a

$$\varphi(x, y;\, x, \eta) = e^{\lambda \int_{\eta}^{y} a(x, v)\, dv}, \qquad \varphi(x, y;\, \xi, y) = e^{\lambda \int_{\xi}^{x} b(u, y)\, du}.$$

Il suffit de remplacer x par ξ dans la première de ces relations et y par η dans la seconde pour retrouver les conditions (32).

497. Équation adjointe. — Riemann a résolu le même problème par une méthode toute différente, qui repose sur la théorie de l'équation adjointe ([1]). Étant donnée une équation linéaire et homogène du second ordre,

$$(40)\qquad \mathcal{F}(z) = \mathrm{A}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \mathrm{D}\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{E}\frac{\partial z}{\partial y} + \mathrm{F}z,$$

si l'on multiplie chaque terme par une même fonction $u(x, y)$ et qu'on intégre par parties autant de fois que possible, on obtient une suite d'identités

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}u\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{A}u\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial(\mathrm{A}u)}{\partial x}z\right] + z\frac{\partial^2(\mathrm{A}u)}{\partial x^2},\\
\mathrm{B}u\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{B}u\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[z\frac{\partial(\mathrm{B}u)}{\partial y}\right] + z\frac{\partial^2(\mathrm{B}u)}{\partial x\,\partial y},\\
\mathrm{C}u\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{C}u\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial(\mathrm{C}u)}{\partial y}z\right] + z\frac{\partial^2(\mathrm{C}u)}{\partial y^2},\\
\mathrm{D}u\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{D}uz) - z\frac{\partial(\mathrm{D}u)}{\partial x},\\
\mathrm{E}u\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{E}uz) - z\frac{\partial(\mathrm{E}u)}{\partial y},\\
\mathrm{F}uz &= z(\mathrm{F}(u),
\end{aligned}$$

et l'on en déduit la relation suivante, qui a lieu pour toutes les formes possibles des fonctions u et z,

$$(41)\qquad u\,\mathcal{F}(z) - z\,\mathcal{G}(u) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y}.$$

On a posé

$$(42)\quad \mathcal{G}(u) = \frac{\partial^2(\mathrm{A}u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\mathrm{B}u)}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2(\mathrm{C}u)}{\partial y^2} - \frac{\partial(\mathrm{D}u)}{\partial x} - \frac{\partial(\mathrm{E}u)}{\partial y} + \mathrm{F}u,$$

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \mathrm{A}u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial(\mathrm{A}u)}{\partial x} - z\frac{\partial(\mathrm{B}u)}{\partial y} + \mathrm{D}uz,\\
\mathrm{K} &= \mathrm{B}u\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{C}u\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial(\mathrm{C}u)}{\partial y} + \mathrm{E}uz.
\end{aligned}\right.$$

L'équation $\mathcal{G}(u) = 0$ est l'équation *adjointe* de l'équation (40).

([1]) *Göttingen Abhandlungen*, t. VIII, 1860; *Œuvres*, p. 145. *Voir* aussi le Chapitre IV du Tome II de la *Théorie des surfaces* de G. Darboux (voir *Exercice* 5). La méthode que Riemann n'avait appliquée qu'à une équation particulière a été étendue par G. Darboux à l'équation générale de la forme (18).

On pourrait vérifier par un calcul direct qu'il y a réciprocité entre ces deux équations, ce qui est aussi une conséquence de l'identité (41) (*cf.* II, n° **404**). Remarquons que, dans cette identité, on peut remplacer H par $H + \frac{\partial\theta}{\partial y}$, et K par $K - \frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\theta(x, y)$ étant une fonction arbitraire [1].

L'intégrale double $\int\int[u\mathcal{F}(z) - z\mathcal{G}(u)]\,dx\,dy$, étendue à un domaine où les fonctions z et u sont continues, ainsi que leurs dérivées jusqu'au second ordre, peut, d'après l'identité (41), être remplacée par l'intégrale curviligne

$$(44) \qquad \int_{(\Gamma)} H\,dy - K\,dx,$$

prise dans le sens direct le long du contour Γ qui limite ce domaine. En particulier, si z et u sont respectivement des intégrales de l'équation (40) et de son adjointe, régulières dans un domaine quelconque, l'intégrale curviligne (44), prise le long du contour de ce domaine, est toujours nulle.

498. Méthode de Riemann. — Appliquons ce résultat à une équation linéaire du type hyperbolique, que nous écrirons main-

---

(1) On peut étendre la définition de l'équation adjointe à une équation linéaire à un nombre de variables. Pour l'équation à n variables,

$$\mathcal{F}(z) = \sum a_{ik}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + cz = 0,$$

l'équation adjointe est

$$\mathcal{G}(u) = \sum \frac{\partial^2(a_{ik}u)}{\partial x_i\,\partial x_k} - \sum \frac{\partial(b_i u)}{\partial x_i} + cu = 0$$

et l'on a l'identité

$$u\mathcal{F}(z) - z\mathcal{G}(u) = \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial M_n}{\partial x_n},$$

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ étant des fonctions bilinéaires par rapport à z, u et à leurs dérivées du premier ordre, dont on aurait l'expression au moyen des identités

$$U\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} - V\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(U\frac{\partial V}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(V\frac{\partial U}{\partial x_i}\right),$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x_i} + V\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial(UV)}{\partial x_i}.$$

On verra des exemples dans la suite (n°s 501, 528, 534).

tenant

$$(45)\qquad \mathcal{F}(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

on a, dans ce cas particulier,

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{G}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\;\; y} - a\frac{\partial a}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)u = 0,\\ &\qquad \mathrm{H} = auz - z\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \mathrm{K} = buz + u\frac{\partial z}{\partial x}.\end{aligned}\right.$$

Soient $z(x, y)$ l'intégrale de l'équation (45) (¹) satisfaisant aux conditions de Cauchy le long d'un arc AB (*fig.* 84[a]) et $u(x, y)$ une intégrale quelconque de l'équation adjointe régulière dans le rectangle ACBD. En remplaçant sous le signe $\int$ les lettres x et y par les lettres ξ, η, nous avons, d'après la proposition générale,

$$(47)\qquad \int_{(\mathrm{QP})} \mathrm{H}\,d\eta - \mathrm{K}\,d\xi + \int_{(\mathrm{PM})} \mathrm{H}\,d\eta - \int_{(\mathrm{MQ})} \mathrm{K}\,d\xi = 0,$$

la même substitution ayant été faite dans H et K; le point M est un point du rectangle ACBD, de coordonnées x, y. Par hypothèse, on connaît la valeur de l'intégrale cherchée $z(\xi, \eta)$ et de ses dérivées partielles le long de l'arc AB, $u(\xi, \eta)$ est une solution déterminée de l'équation adjointe. Par conséquent, la première intégrale curviligne, prise le long de l'arc QP, est une fonction connue des coordonées x et y du point M. Il semble au contraire que les intégrales curvilignes le long de PM et le long de MQ ne peuvent être calculées sans connaître les valeurs de z le long de ces droites. L'artifice de Riemann consiste précisément à choisir la fonction u de façon à éliminer ces intégrales. Nous avons

$$\int_{\mathrm{MQ}} \mathrm{K}\,d\xi = \int_{\mathrm{MQ}} \left(buz + u\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)d\xi,$$

ce qu'une intégration par parties immédiate permet d'écrire

$$\int_{\mathrm{MQ}} \mathrm{C}\,d\xi = (uz)_{\mathrm{M}}^{\mathrm{Q}} + \int_{\mathrm{MQ}} z\left(bu - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)d\xi,$$

(¹) On suppose, pour simplifier, $f(x, y) = 0$. Si f n'était pas nul, il y aurait un terme de plus, facile à rétablir dans l'expression de l'intégrale.

et la formule générale (47) nous donne

$$(48)\qquad (uz)_M = (uz)_Q + \int_{MQ} z\left(bu - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) d\xi - \int_{PM} z\left(au - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) d\eta + \int_{PQ} H\, d\eta - K\, d\xi.$$

Pour faire disparaître les intégrales où figurent les valeurs inconnues de z le long de PM et de MQ, il suffira de prendre pour $u(\xi, \eta)$ une intégrale de l'équation adjointe (où x et y ont été remplacées par ξ, η), satisfaisant aux conditions suivantes

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, y) = b(\xi, y)\, u(\xi, y), \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} u(x, \eta) = a(x, \eta)\, u(x, \eta).$$

Or $u(\xi, y)$ et $u(x, \eta)$ représentent respectivement les fonctions de ξ et de η auxquelles se réduit cette intégrale le long de MQ et de MP. En désignant par u_M la valeur de cette intégrale lorsque le point (ξ, η) est venu en M, il faut et il suffit qu'on ait

$$u(\xi, y) = u_M e^{\int_x^\xi b(t, y)\, dt}, \qquad u(x, \eta) = u_M e^{\int_y^\eta a(x, v)\, dv},$$

pour que les intégrales le long de MP et de MQ disparaissent dans la formule (48). En supposant $u_M = 1$, nous désignerons par $u(x, y; \xi, \eta)$ la fonction des deux couples de variables (x, y), (ξ, η) ainsi déterminée. Considérée comme fonction des variables (ξ, η), c'est une solution de l'équation adjointe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} - a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} - b(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + \left[c(\xi, \eta) - \frac{\partial a}{\partial \xi} - \frac{\partial b}{\partial \eta}\right] u(\xi, \eta) = 0;$$

pour $\xi = x$, elle se réduit à $e^{\int_y^\eta a(x, v)\, dv}$ et, pour $\eta = y$, elle se réduit à $e^{\int_x^\xi b(t, y)\, dt}$; elle est donc égale à un, pour $\xi = x$, $\eta = y$. Si nous supposons qu'on ait déterminé cette intégrale de l'équation adjointe, la formule (48) nous donne la valeur au point (x, y) de l'intégrale qui satisfait aux conditions de Cauchy le long de l'arc AB

$$(49)\qquad z_M = (uz)_Q + \int_{(QP)} u\, z(b\, d\xi - a\, d\eta) + \int_{(QP)} u \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + z \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta.$$

Dans cette formule ne figurent que les valeurs de z et de $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ le

long de AB. En tenant compte de l'identité

$$(uz)_Q - (uz)_P = \int_{(PQ)} \frac{\partial(uz)}{\partial\xi} d\xi + \frac{\partial(uz)}{\partial\eta} d\eta,$$

on peut remplacer la formule (49) par l'une ou l'autre des formules

$$(49) \qquad z_M = (uz)_P + \int_{PQ} uz(a\,d\eta - b\,d\xi) + \int_{PQ} u\frac{\partial z}{\partial\eta} d\eta + z\frac{\partial u}{\partial\xi} d\xi,$$

$$(49)'' \qquad z_M = \frac{(uz)_P + (uz)_Q}{2} + \int_{PQ} uz(a\,d\eta - b\,d\xi)$$
$$- \frac{1}{2}\int_{(PQ)} u\left(\frac{\partial z}{\partial\eta} d\eta - \frac{\partial z}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{2}\int_{PQ} z\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} d\xi - \frac{\partial u}{\partial\eta} d\eta\right),$$

dont la dernière est la plus symétrique, mais dépend des valeurs de z et de ses deux dérivées le long de AB.

Dans toutes ces formules, le point (x, y) est considéré comme fixe, et les variables d'intégration sont ξ, η, de sorte que les variables x et y ne figurent sous le signe $\int$ que dans u et ses dérivées. On peut répéter sur ces formules toutes les remarques qui ont été faites à propos de l'équation $s = 0$ (n° 489); la fonction de Riemann $u(x, y; \xi, \eta)$ se réduit à l'unité dans ce cas particulier.

Ces formules s'appliquent encore lorsque l'arc AB vient coïncider avec la ligne brisée ADB; les points P et Q viennent alors en P' et Q' et la formule (49'), par exemple, donne

$$z_M = (uz)_{P'} - \int_{(P'D)} \left(z\frac{\partial u}{\partial\xi} - buz\right) d\xi + \int_{(DQ')} u\left(\frac{\partial z}{\partial\eta} + az\right) d\eta,$$

ce qu'on peut encore écrire, en intégrant par partie $z\dfrac{\partial u}{\partial\xi}$.

$$(50) \qquad z_M = (uz)_D - \int_{(P'D)} u\left(\frac{\partial z}{\partial\xi} + bz\right) d\xi + \int_{(DQ')} u\left(\frac{\partial z}{\partial\eta} + az\right) d\eta.$$

Pour calculer z_M, il suffit, conformément à la théorie générale, de connaître les valeurs de z le long de la ligne brisée ADB. En effet, $z(x, y)$ étant une fonction connue de x le long de AD, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ est connue le long de AD, et, pour la même raison, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ est une fonction connue de y le long de DB.

Soient x_1, y_1, les coordonnées du point D; désignons par

$$z(x, y : x_1, y_1)$$

l'intégrale de l'équation $\mathcal{F}(z) = 0$ qui satisfait aux conditions suivantes

$$z(x, y_1; x_1, y_1) = e^{-\int_{x_1}^{x} b(t, y_1)\, dt}, \qquad z(x_1, y : x_1, y_1) = e^{-\int_{y_1}^{y} a(x_1, v)\, dv}.$$

Cette intégrale est égale à un au point D et, quand on remplace x, y par ξ, η, elle satisfait aux deux relations

$$bz + \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0, \qquad az + \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$$

le long de AD et de BD respectivement. Si l'on a pris pour z cette intégrale, la formule (50) se réduit à $z_M = u_D$, c'est-à-dire qu'on a

$$(51) \qquad z(x, y; x_1, y_1) = u(x, y; x_1, y_1).$$

Remplaçons x_1, y_1 par ξ, η respectivement, nous voyons que la fonction $u(x, y; \xi, \eta)$, considérée comme fonction de x, y, est une intégrale de l'équation proposée qui satisfait à des conditions tout à fait pareilles à celles qui la déterminent quand on la considère comme fonction de (ξ, η), puisque a et b doivent être remplacés par $-a$ et $-b$ quand on passe d'une équation à son adjointe. La connaissance de cette fonction $u(x, y; \xi, \eta)$ permettra donc aussi de résoudre le problème de Cauchy pour l'équation adjointe, et l'on peut dire que *l'intégration d'une équation linéaire et l'intégration de l'équation adjointe sont deux problèmes équivalents*.

Les dernières conditions qui déterminent $u(x, y; \xi, \eta)$ sont identiques à celles qui déterminent la fonction $G(x, y; \xi, \eta)$ quand on suppose $\lambda = -1$. Il est facile, d'après cela, de vérifier l'identité des deux solutions. La formule (38) s'écrit en effet, en supposant $f(x, y)$ nul, et remplaçant G par $-u$,

$$(38)' \qquad z(x, y) = \zeta(x, y) + \iint_{(PMQ)} \mathcal{F}[\zeta(\xi, \eta)]\, u(x, y : \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Cela étant, il suffit d'appliquer à cette intégrale double la formule générale (44) qui la ramène à une intégrale curviligne, et les transformations qui viennent d'être effectuées conduisent précisément à la solution de Riemann. Les valeurs de ζ, $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, le long de l'arc AB, sont en effet égales par hypothèse aux valeurs de l'intégrale cherchée et de ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ le long

du même arc. On peut remarquer seulement que la solution du problème de Cauchy donnée par la formule (38) sous forme d'intégrale double ne suppose pas l'existence de l'équation adjointe, c'est-à-dire l'existence des dérivées $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}$.

499. **Équations à coefficients constants.** — Toute équation linéaire du type hyperbolique à coefficients constants admet pour caractéristiques deux familles de droites (n° 482); si on la rapporte à ses caractéristiques, les coefficients a, b, c qui figurent dans la forme réduite (45) peuvent aussi être supposés constants (I, n° 63). Si l'on pose ensuite $z = ue^{-bx-ay}$, on la ramène à une équation ne renfermant pas de dérivées du premier ordre, et où le coefficient de u est encore constant. Toute équation de l'espèce considérée peut donc être ramenée à la forme simple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + cz = 0, \tag{52}$$

c étant un coefficient constant. Si c n'est pas nul, le changement de x en kx permet encore de donner à ce coefficient une valeur arbitraire, ± 1 par exemple. L'équation (52) est, après l'équation élémentaire $s = 0$, un des types les plus simples auxquels s'applique la méthode de Riemann. On sait en effet trouver la fonction $u(x, y; \xi, \eta)$ pour cette équation, car il suffit de trouver une intégrale se réduisant à l'unité pour $x = \xi$, quel que soit y, et pour $y = \eta$, quel que soit x. Posons $v = (x - \xi)(y - \eta)$ et cherchons une intégrale particulière de (52) ne dépendant que de v, $z = \varphi(v)$; nous sommes conduits à l'équation du second ordre

$$v\varphi''(v) + \varphi'(v) + c\varphi(v) = 0,$$

qui est une des formes de l'équation de Bessel (II, n° 414).

On a vu que cette équation admet pour intégrale une fonction entière de v se réduisant à *un* pour $v = 0$, et cette intégrale a pour expression $J(-cv)$ où $J(t)$ est la série entière

$$J(t) = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{(1.2)^2} + \ldots + \frac{t^n}{(n!)^2} + \ldots.$$

On peut donc toujours résoudre le problème de Cauchy pour une équation du type hyperbolique à coefficients constants.

Considérons par exemple *l'équation des télégraphistes* [1] qui s'écrit, avec un choix convenable d'unités,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2\frac{\partial V}{\partial t} = 0; \tag{53}$$

---

[1] La méthode exposée ici est due à M. E. Picard (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 22, 1894, p. 2-8).

V désigne le potentiel au temps t en un point d'abscisse x sur un fil rectiligne indéfini, dirigé suivant Ox, qui transmet une perturbation électrique. Les caractéristiques sont ici les deux familles de droites $x \pm t = C$; en prenant les deux nouvelles variables $x' = \frac{x-t}{\sqrt{2}}$, $y' = \frac{x+t}{\sqrt{2}}$ et posant en même temps $V = z e^{-t}$, l'équation (53) devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} + \frac{1}{2} z = 0. \tag{54}$$

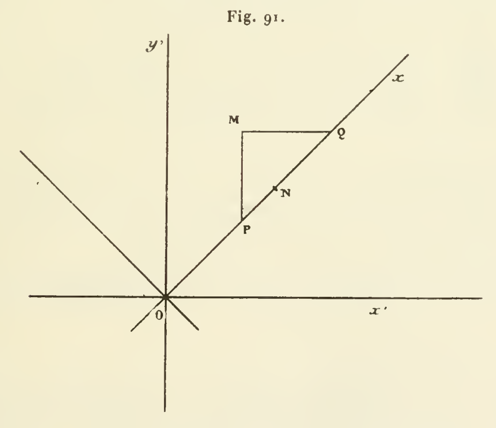
On suppose qu'une perturbation électrique initiale a été produite sur le fil entre les deux points $x = 0$ et $x = a (a > 0)$, et l'on demande la valeur de V au temps t au point d'abscisse x. Analytiquement, le problème à résoudre est le suivant : On connaît les valeurs au temps $t = 0$ de z et de $\frac{\partial z}{\partial t}$,

$$z = f(x), \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = g(x),$$

ces fonctions étant nulles en dehors de l'intervalle $(0, a)$; en déduire $z(x, t)$ quels que soient x et $t (t > 0)$.

C'est précisément le problème de Cauchy, et la courbe qui porte les données

Fig. 91.



est la droite $t = 0$ dans le système d'axes (Ox, Ot), et la droite $y' = x'$ dans le système d'axes (Ox', Oy'). Les valeurs de z et de ses dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x'}$, $\frac{\partial z}{\partial y'}$ le long de cette droite résultent des données.

Soit M un point de coordonnées (x, t), t étant positif, dans le système

(Ox, Ot). La valeur de l'intégrale cherchée au point M est donnée par la formule générale (49)' qui devient ici

(55) $$z_M = \frac{(uz)_P + (uz)_Q}{2} - \frac{1}{2}\int_{(PQ)} u\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta - \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi\right) - z\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}d\eta - \frac{\partial u}{\partial \xi}d\xi\right),$$

la fonction u de Riemann étant égale à $J\left(-\frac{v}{2}\right)$, où $v = (x' - \xi)(y' - \eta)$; nous la désignerons par $\varphi(v)$. Soit N un point du segment PQ de coordonnées $(\lambda, 0)$ dans le système (Ox, Ot); ses coordonées dans le système (Ox', Oy') sont $\xi = \eta = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$, et λ varie de $x - t$ à $x + t$ le long du segment PQ. Pour appliquer la formule (55), il est nécessaire de connaître u, z, $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ en tout point N de PQ.

On a d'abord

$$v = \left(x' - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\left(y' - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{x + t - \lambda}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x - t - \lambda}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(x-\lambda)^2 - t^2}{2},$$

$$u = \varphi\left[\frac{(x-\lambda)^2 - t^2}{2}\right];$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \varphi'(v)(\eta - y') = \varphi'\left[\frac{(x-\lambda)^2 - t^2}{2}\right]\left(\frac{\lambda - x - t}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi'(v)(\xi - x') = \varphi'\left[\frac{(x-\lambda)^2 - t^2}{2}\right]\left(\frac{\lambda - x + t}{\sqrt{2}}\right).$$

On voit de même, en tenant compte des conditions initiales, qu'en tout point N de PQ, on a

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}[f'(\lambda) - g(\lambda)], \qquad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}[f'(\lambda) + g(\lambda)].$$

Aux points P, Q, on a $u = 1$, z se réduit respectivement à $f(x - t)$ et à $f(x + t)$, et la formule (55) devient

(56) $$z = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\left\{\varphi\left[\frac{(x-\lambda)^2 - t^2}{2}\right]g(\lambda) - tf(\lambda)\varphi'\left[\frac{(x-\lambda)^2 - t^2}{2}\right]\right\}d\lambda.$$

Les variables x' et y' ne figurent pas dans la formule définitive (56), qui exprime directement la solution au moyen des données. Pour discuter cette solution, rappelons que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont nulles en dehors de l'intervalle $(0, a)$. Supposons $x > a$; tant qu'on aura $t < x - a$, $x - t$ et $x + t$

seront supérieurs à a, et le second membre de la formule (56) sera nul. La perturbation électrique n'atteint donc le point d'abscisse x qu'au bout du temps $x - a$. Si t est supérieur à $x - a$ et inférieur à x, $x - t$ est inférieur à a et positif, $x + t$ est toujours supérieur à a, $f(x+t)$ est nul et l'on peut remplacer la limite supérieure $x + t$ de l'intégrale par a. La formule (56) peut s'écrire

$$(56)' \qquad z = \frac{f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{a} \mathrm{F}(x, t, \lambda)\, d\lambda \qquad (x - a < t < x),$$

en désignant pour abréger par $\mathrm{F}(x, t, \lambda)$ la fonction sous le signe $\int$. Enfin, si t est $> x$, $x - t$ est négatif, $x + t$ supérieur à a, $f(x+t)$ et $f(x-t)$ sont nuls; on peut prendre o et a pour limites de l'intégrale, et la formule qui donne z devient

$$(56)'' \qquad z = \frac{1}{2}\int_{0}^{a} \mathrm{F}(x, t, \lambda)\, d\lambda \qquad (t > x).$$

On voit donc que la valeur de z, pour une valeur donnée de $x > a$, ne cesse d'être nulle que lorsque t atteint la valeur $x - a$, mais à partir de cette valeur de t, elle ne redevient pas nulle. Il y a bien pour la perturbation un front d'onde à l'avant qui s'avance avec une vitesse égale à un, mais il n'y a pas de *front arrière*. On peut dire encore qu'entre les temps $t = x - a$ et $t = x$, il passe au point x une onde représentée par la formule (56)'; mais cette onde laisse derrière elle une sorte de *résidu*, représenté par (56)''. Lorsque t croît indéfiniment, ce résidu tend vers une limite indépendante de x. La discussion serait analogue pour x négatif. Observons que le potentiel V est égal à ze^{-t}, et la présence du facteur exponentiel produit un amortissement très rapide.

500. Autres problèmes. — Le problème de Cauchy n'est pas le seul qu'on puisse avoir à résoudre pour les équations linéaires du type hyperbolique. On peut aussi avoir à résoudre des problèmes mixtes, comme dans le cas de l'équation $s = 0$. La méthode des approximations successives s'applique encore à ces problèmes. Supposons, par exemple, qu'on veuille obtenir une intégrale de l'équation

$$s = \lambda(ap + bq + cz) + f(x, y)$$

prenant des valeurs données le long de la caractéristique $y = 0$ et le long de l'arc de courbe OND (*fig.* 85) qui n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à Ox. En désignant par $z_0(x, y)$ l'intégrale de l'équation $s = f(x, y)$ qui satisfait à ces conditions (n° 490), on définira de proche en proche les fonctions z_n par la relation

$$z_n(x, y) = \int\int_{(\mathrm{MNQP})} \left[a(\xi, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z_{n-1}\right] d\xi\, d\eta,$$

l'intégrale étant étendue au rectangle MNQP ; par des articles analogues à ceux du nº 494, on démontre que la série

$$z_0(x, y) + \lambda z_1(x, y) + \ldots + \lambda^n z_n(x, y) + \ldots$$

est uniformément convergente, ainsi que les deux séries formées par les dérivées partielles du premier ordre. On peut également employer la méthode des approximations successives pour déterminer une intégrale prenant des valeurs données le long de deux arcs de courbe situés dans le même angle des caractéristiques. M. Hadamard a montré aussi qu'on pouvait étendre à ces problèmes la méthode de Riemann ; la fonction $u(x, y; \xi, \eta)$ doit être remplacée par une solution de l'équation adjointe, qui présente des lignes de discontinuité [1].

La méthode des approximations successives permet aussi de traiter les mêmes problèmes pour une équation de la forme plus générale

$$(57) \qquad s = F(x, y, z, p, q).$$

Nous nous bornerons au plus simple de ces problèmes, celui qui consiste à déterminer une intégrale, connaissant les valeurs qu'elle prend le long de deux caractéristiques de systèmes différents. Pour simplifier un peu l'exposition, nous supposerons qu'on cherche une intégrale de (57) s'annulant pour $x = 0$, quel que soit y, et pour $y = 0$, quel que soit x ; il est clair que des transformations simples permettent de ramener le cas général à ce cas particulier. Sur la fonction $F(x, y, z, p, q)$ nous ferons les hypothèses suivantes ; cette fonction est continue dans le domaine D défini par les inégalités

$$0 \leqq x \leqq \alpha, \qquad 0 \leqq y \leqq \beta, \qquad |z| \leqq H, \qquad |p| \leqq P, \qquad |q| \leqq Q,$$

α, β, H, P, Q étant des nombres positifs. De plus, dans ce domaine, elle satisfait à la condition de Lipschitz relativement à z, p, q, c'est-à-dire qu'étant données des valeurs de x, y, z, p, p', q, q', comprises dans les intervalles précédents, on a

$$(58) \qquad \begin{aligned} &|F(x, y, z', p', q') - F(x, y, z, p, q)| \\ &\qquad < K_1 |z' - z| + K_2 |p' - p| + K_3 |q' - q|, \end{aligned}$$

K_1, K_2, K_3 étant des nombres positifs. Soient M une limite supérieure de $|F|$ dans ce domaine D, et R le rectangle limité par les droites $x = 0$, $x = \alpha$, $y = 0$, $y = \beta$. Nous prendrons pour première valeur approchée de l'inté-

---

(1) E. Picard, Note I du Tome IV des *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. Darboux, p. 353 et suiv. — E. Goursat, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. VI, 1904, p. 117. — *Bulletin de la Société mathématique* (Séance du 24 mai 1911). — J. Hadamard, *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXI, p. 208 et t. XXXII, p. 242.

grale cherchée $z_0(x, y) = 0$, puis nous poserons d'une façon générale

$$z_n(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y \mathrm{F}\left[\xi, \eta, z_{n-1}(\xi, \eta), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}\right] d\eta.$$

Soient ρ et ρ' deux nombres positifs au plus égaux à α et à β respectivement et satisfaisant, en outre, aux conditions $M\rho' < H$, $M\rho' < P$, $M\rho < Q$. On voit aisément, de proche en proche, que toutes les fonctions $z_n(x, y)$ sont régulières dans le rectangle R' de dimensions ρ et ρ' analogue à R, et qu'on a dans ce rectangle $|z_n| < H$, $|p_n| < P$, $|q_n| < Q$. Pour prouver que $z(x, y)$ tend vers une limite lorsque n croît indéfiniment, remarquons qu'on a, d'après la condition (58),

$$z_n(x,y) - z_{n-1}(x,y) < \int_0^x d\xi \int_0^y \{K_1 |z_{n-1}(\xi, \eta) - z_{n-2}(\xi, \eta)| + K_2 |p_{n-1} - p_{n-2}| + K_3 |q_{n-1} - q_{n-2}|\} d\eta,$$

$$p_n(x,y) - p_{n-1}(x,y)| < \int_0^y \{K_1 |z_{n-1}(\xi, \eta) - z_{n-2}(\xi, \eta)| + \ldots\} d\eta,$$

. . . .

Posons, d'une manière générale,

$$u_n(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y \left[K_1 u_{n-1}(\xi, \eta) + K_2 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + K_3 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta}\right] d\eta,$$

et supposons qu'on ait pris pour $u_1(x, y)$ une fonction régulière dans R' et telle qu'on ait, en un point quelconque de ce domaine $u_1(x, y) > |z_1|$, $\frac{\partial u_1}{\partial x} > \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right|$, $\frac{\partial u_1}{\partial y} > \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right|$; on voit, de proche en proche, qu'on aura, pour toute valeur de n,

$$|z_n(x, y) - z_{n-1}(x, y)| < u_n(x, y),$$

$$|p_n(x, y) - p_{n-1}(x, y)| < \frac{\partial u_n}{\partial x}, \qquad |q_n - q_{n-1}| < \frac{\partial u_n}{\partial y}.$$

Or, on a démontré plus haut (nº 494) que les séries $\sum n_n \sum \frac{\partial u_n}{\partial x}, \sum \frac{\partial u_n}{\partial y}$ sont uniformément convergentes; il en est donc de même de la série

$$z_1(x, y) + [z_2(x, y) - z_1(x, y)] + \ldots + [z_n(x, y) - z_{n-1}(x, y)] + \ldots$$

et de celles qu'on en déduit en différentiant terme à terme par rapport à x ou à y. Le raisonnement s'achève comme au nº 494; lorsque n croît indéfiniment, z_n tend vers une fonction $Z(x, y)$ qui satisfait à toutes les conditions du problème. De plus, c'est la seule intégrale de l'équation (57) satisfaisant à ces conditions.

Le domaine dans lequel l'existence de l'intégrale est assurée est, en général,

moins étendu que pour une équation linéaire. Il est un cas intéressant où ce domaine est le même ; c'est celui où la fonction $F(x, y, z, p, q)$ reste continue pour tout système de valeurs réelles de z, p, q, lorsque le point (x, y) reste dans le domaine R, et admet des dérivées $\frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial q}$, restant moindres en valeur absolue qu'un nombre fixe, dans les mêmes conditions. Nous n'avons pas alors à tenir compte des conditions qui expriment que z_n, p_n, q_n restent dans le domaine D et nous pouvons prendre $\rho = \alpha$, $\rho' = \beta$. La série fournie par les approximations successives converge dans le rectangle R. Tel serait le cas de l'équation

$$s = ap + bq + c \sin z,$$

où a, b, c sont des fonctions continues de x, y dans R ; l'équation obtenue en posant

$$z = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + u$$

satisfait évidemment aux conditions voulues, pourvu que $\varphi'(x)$ et $\psi'(y)$ soient continues dans les intervalles $(0, \alpha)$ et $(0, \beta)$ respectivement.

III. — ÉQUATIONS A PLUS DE DEUX VARIABLES.

Il était naturel de chercher à étendre la méthode si simple de Riemann aux équations du type hyperbolique à plus de deux variables. Kirchhoff, Volterra, Tedone, Coulon, d'Adhémar avaient traité un certain nombre d'exemples particuliers. M. Hadamard a obtenu le premier une solution générale, en montrant qu'il suffisait de connaître une intégrale de l'équation adjointe, présentant en un point arbitraire une singularité d'une nature déterminée, pour pouvoir en déduire par des quadratures la solution du problème de Cauchy; comme dans la méthode de Riemann, cette intégrale particulière est indépendante de la surface qui porte les données. Nous renverrons aux travaux [1] du savant géomètre pour l'étude de cette difficile question, et nous nous bornerons à indiquer la méthode élégante de M. Volterra [2] pour l'équation des ondes cylindriques.

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 1904 et 1905; *Acta mathematica*, t. XXXI, 1908.

[2] *Acta Mathematica*, t. XVIII, 1894. *Voir* aussi le Mémoire de KIRCHHOFF, *Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, 1882.

501. Formule fondamentale. — Soit $U(x, y, z)$ une fonction continue admettant des dérivées partielles continues. Il est souvent commode d'introduire la dérivée de U prise *suivant une direction déterminée*. Considérons x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace, et soit L une direction issue d'un point M. Sur cette direction prenons un point M′ à une distance h de M; on appelle dérivée de $U(x, y, z)$ suivant la direction L la limite du rapport $\frac{U(M') - U(M)}{MM'}$ lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment du point M en restant sur la demi-droite considérée. On écrit, pour abréger, $U(M)$ au lieu de $U(x, y, z)$, M étant le point de coordonnées (x, y, z). Si α, β, γ sont les angles de la direction L avec les directions positives des axes, on a

$$\frac{U(M') - U(M)}{MM'} = \frac{U(x + h\cos\alpha,\ y + h\cos\beta,\ z + h\cos\gamma) - U(x, y, z)}{h};$$

a limite de ce rapport, c'est-à-dire la dérivée cherchée $\frac{\partial U}{\partial L}$, a donc pour expression, d'après la formule qui donne la dérivée d'une fonction composée.

$$(59) \qquad \frac{dU}{dL} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

Soit MV le vecteur ayant son origine en M, et dont les composantes sont $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$; la relation (59) exprime que $\frac{dU}{dL}$ est égale à la valeur algébrique de la projection du vecteur MV sur la direction L. Il en résulte aussitôt que les dérivées suivant deux directions opposées ne diffèrent que par le signe. Rappelons encore que le vecteur MV est dirigé suivant la normale à la surface de niveau $U(x, y, z) = C$ qui passe au point M et du côté où la fonction U est croissante, et que la longueur de ce vecteur est en raison inverse de la portion de normale comprise entre deux surfaces de niveau infiniment voisines. Toutes ces définitions s'appliquent évidemment à une fonction de deux variables, en remplaçant l'espace par le plan.

Cela posé, soit

$$F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

On a l'identité (*cf.* n° 497, *note*).

$$v\,F(u) - u\,F(v) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

quelles que soient les fonctions u et v. Si ces fonctions sont continues, ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre dans un domaine borné D, limité par une surface Σ, on déduit de l'identité précédente la relation

$$(60)\quad \int\int\int_{(D)} [v\,F(u) - u\,F(v)]\,dx\,dy\,dz = \int\int_{(\Sigma)} \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dy\,dz + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) dz\,dx - \ldots,$$

l'intégrale de surface étant étendue au côté extérieur de Σ. Soient α, β, γ les angles que fait avec les axes la direction extérieure de la normale à Σ; l'intégrale de surface est identique à

$$\int\int_{(\Sigma)} v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta - \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) d\sigma,$$
$$-\int\int_{(\Sigma)} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta - \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right) d\sigma.$$

Or $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $-\cos\gamma$ sont les cosinus directeurs de la direction symétrique de la normale extérieure par rapport au plan parallèle au plan $z=0$ mené par le pied de la normale; suivant une expression due à M. d'Adhémar, nous appellerons cette droite la *conormale* à la surface Σ au point considéré. La direction positive sur la conormale correspond à la direction extérieure sur la normale. Les coefficients de v et de u, dans les intégrales de surfaces précédentes, représentent respectivement les dérivées des fonctions u et v, prises suivant la direction positive de la conormale. Nous représenterons ces dérivées par $\frac{du}{dN}$, $\frac{dv}{dN}$, ce qui permet d'écrire la formule (60) sous la forme abrégée

$$(61)\quad \int\int\int_{(D)} [v\,F(u) - u\,F(v)]\,dx\,dy\,dz = \int\int_{(\Sigma)} \left(v\frac{du}{dN} - u\frac{dv}{dN}\right) d\sigma.$$

502. Méthode de Volterra. — Considérons l'équation

$$(62)\qquad F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = Z,$$

le second membre étant une fonction connue de (x, y, z); il suffirait de supposer $Z = 0$ et de remplacer z par at pour retrouver l'équation des ondes cylindriques (n° 485). Cette équation appartient au type hyperbolique, et les surfaces caractéristiques sont les surfaces intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$(63)\qquad \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 1 = 0$$

qui exprime que le plan tangent fait un angle de 45° avec le plan $z = 0$. La conormale en chaque point est donc située dans le plan tangent, et cette propriété, il est aisé de le voir, n'appartient qu'aux surfaces caractéristiques. Le lieu des courbes caractéristiques de l'équation (63), issues d'un point quelconque P de l'espace, est un cône de révolution de sommet P, dont l'axe est parallèle à Oz, et dont l'angle au sommet est droit; c'est le *cône caractéristique*.

Dans la méthode de M. Volterra, la fonction de Riemann est remplacée par une intégrale de l'équation $F(u) = 0$, qui est nulle tout le long du cône caractéristique du sommet (x_1, y_1, z_1). Pour obtenir une telle intégrale, cherchons d'abord une intégrale ne dépendant que de $\frac{z}{r}$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si l'on fait le changement de variables $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, l'équation $F(u) = 0$ devient (I, p. 148)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

en cherchant une intégrale ne dépendant que de $w = \frac{z}{r}$, on est conduit à l'équation différentielle

$$(w^2 - 1)\frac{d^2 u}{dw^2} + w\frac{du}{dw} = 0,$$

dont l'intégration est facile. On obtient ainsi l'intégrale particulière $\log\left(\frac{\pm z + \sqrt{z^2 - r^2}}{}\right)$, qui est nulle en tout point du cône caractéristique ayant l'origine pour sommet, pourvu qu'on prenne un

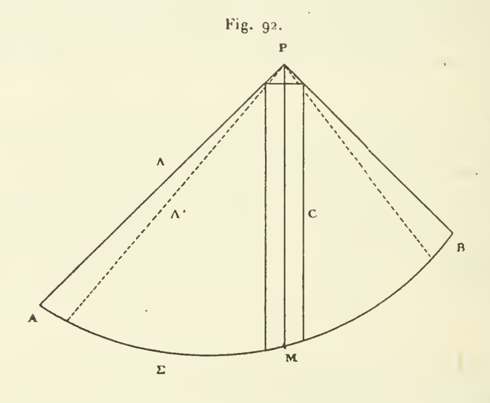
signe convenable devant z. Comme l'équation $F(u) = 0$ ne change pas par un déplacement d'origine arbitraire, on voit que la fonction

$$(64)\qquad v = \log\left(\frac{z_1 - z + \sqrt{(z_1 - z)^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2}}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}}\right)$$

est une intégrale particulière de l'équation $F(u) = 0$, qui est nulle en tous les points de la nappe inférieure du cône caractéristique ayant pour sommet le point P, de coordonnées (x_1, y_1, z_1). Cette fonction v présente une discontinuité tout le long de l'axe de ce cône caractéristique.

Supposons que l'on connaisse les valeurs d'une intégrale u de l'équation (62) et de ses dérivées partielles du premier ordre le long d'une surface Σ, et qu'on veuille calculer la valeur de cette intégrale en un point $P(x_1, y_1, z_1)$ extérieur à Σ. Ce point P étant supposé au-dessus de Σ, comme l'indique la figure 92, consi-

Fig. 92.



dérons le domaine D limité par la nappe inférieure du cône caractéristique Λ de sommet P, et par la portion Σ' de Σ inférieure à ce cône; en admettant qu'il existe une intégrale de l'équation (62) satisfaisant aux conditions de Cauchy et régulière dans D, nous allons montrer comment on peut calculer la valeur de cette intégrale au point P. On ne peut appliquer immédiatement la formule générale (61) aux deux fonctions u et v dans le domaine D,

parce que la fonction v est discontinue le long de l'axe du cône, et aussi parce que les dérivées de v sont discontinues sur le cône A. Pour éviter ces difficultés, on isole d'abord la ligne singulière au moyen d'un cylindre de révolution C de rayon très petit η ayant même axe que le cône, et l'on remplace le cône A par un cône de révolution A' de même sommet et de même axe dont le demi-angle au sommet φ est un peu inférieur à $\frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$, et l'on considère le domaine D', formé par la portion du domaine D qui est extérieure au cylindre C et intérieure à la nappe inférieure du cône A'. Les deux fonctions u et v étant régulières dans ce domaine D', la formule (61) est applicable. La surface qui limite D' se compose de trois portions distinctes, une portion Σ'' de Σ', une surface cylindrique Σ_1 et une portion de surface conique provenant du cône A'. La formule (61) devient, en remplaçant $\mathrm{F}(u)$ par Z et $\mathrm{F}(v)$ par zéro,

$$\iiint_{(\mathrm{D}')} v\mathrm{Z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{(\Sigma'')}\left(v\frac{du}{d\mathrm{N}} - u\frac{dv}{d\mathrm{N}}\right)d\sigma$$
$$+\iint_{(\Sigma_1)}\left(v\frac{du}{d\mathrm{N}} - u\frac{dv}{d\mathrm{N}}\right)d\sigma + \iint_{(\mathrm{A}')}\left(v\frac{du}{d\mathrm{N}} - u\frac{dv}{d\mathrm{N}}\right)d\sigma.$$

En un point de la surface du cône A', à une distance l du sommet, on a, comme le montre un calcul facile,

$$v = \log\left(\cot\varphi + \sqrt{\cot^2\varphi - 1}\right), \qquad \frac{dv}{d\mathrm{N}} = -\frac{1}{l}\,\frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sin\varphi};$$

lorsque l'angle φ tend vers $\frac{\pi}{4}$, v, $\frac{dv}{d\mathrm{N}}$ et par suite l'intégrale double le long de A', tendent vers zéro ([1]). L'intégrale double étendue à la surface Σ_1 du cylindre ne peut être calculée, puisqu'on ne connaît pas les valeurs de u et de $\frac{du}{d\mathrm{N}}$ sur cette surface. Mais on peut trouver la limite de cette intégrale lorsque le rayon η du cylindre tend vers zéro. En effet, nous pouvons prendre pour élément d'aire sur ce cylindre $d\sigma = \eta\,d\omega\,dz$, l'angle ω variant de o

(1) La fonction v étant nulle le long de A, la dérivée de v suivant une direction quelconque du plan tangent doit être nulle aussi. Or, la conormale est précisément dans le plan tangent.

à 2π. En un point de la surface, v a pour expression

$$v = \log\left(z_1 - z + \sqrt{(z_1 - z)^2 - \eta^2}\right) - \log\eta;$$

la direction de la conormale se confond avec la direction de la normale intérieure au cylindre, et l'on a

$$\frac{dv}{dN} = -\frac{dv}{dr} = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{\sqrt{(z - z_1)^2 - \eta^2}\left[z_1 - z + \sqrt{(z_1 - z)^2 - \eta^2}\right]}.$$

Le produit ηv a pour limite zéro, tandis que $\eta \frac{dv}{dN}$ a pour limite $+1$. On en déduit aisément que la limite de l'intégrale double étendue à la surface du cylindre est égale à

$$-2\pi \int_{z_0}^{z_1} u(x_1, y_1, z)\, dz,$$

z_0 étant la coordonnée du point où l'axe du cône rencontre la surface Σ. D'ailleurs, lorsque ε et η tendent vers zéro, les intégrales étendues à D' et à Σ'' respectivement ont pour limites les intégrales étendues à D' et à Σ''. On a donc à la limite

$$(65) \qquad \iiint_{(D)} vZ\, dx\, dy\, dz = \iint_{(\Sigma')} \left(v \frac{du}{dN} - u \frac{dv}{dN}\right) d\sigma - 2\pi \int_{z_0}^{z_1} u(x_1, y_1\, z)\, dz.$$

En prenant les dérivées des deux membres de l'égalité précédente par rapport à z_1 nous trouvons enfin

$$(66) \qquad u(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\iiint_{(D)} vZ\, dx\, dy\, dz - \iint_{(\Sigma')} \left(v \frac{du}{dN} - u \frac{dv}{dN}\right) d\sigma \right].$$

La fonction auxilliaire v est connue; u et $\frac{du}{dN}$ sont supposées connues sur Σ et par conséquent le second membre de cette formule est une fonction déterminée des coordonnées (x_1, y_1, z_1) du sommet P du cône A. La formule (66) fournit donc la solution du problème de Cauchy, en admettant que cette solution existe, ce qui n'est nullement évident *a priori*. Il est donc nécessaire de démontrer inversement que la fonction $u(x_1, y_1, z_1)$ représentée

par cette formule est une intégrale de l'équation (62), dont la valeur, ainsi que celles de ses dérivées premières, tendent vers les valeurs données lorsque le point P tend vers un point de Σ. Cette question, que M. Volterra avait laissée de côté, a été étudiée par M. d'Adhémar, qui a établi la réciproque ([1]).

Lorsque la surface Σ qui porte les données est une surface caractéristique, la direction de la conormale en chaque point est située dans le plan tangent à la surface. Si l'on se donne la valeur de u en chaque point de Σ, la valeur de $\frac{du}{d\mathrm{N}}$ est connue par là même. Une intégrale est donc déterminée si l'on connaît sa valeur tout le long d'une surface caractéristique (*cf.* n° 494).

Exemple. — Supposons que la surface Σ soit le plan $z = 0$, et en outre qu'on ait $\mathrm{Z} = 0$. Nous avons à trouver une intégrale de l'équation $\mathrm{F}(u) = 0$, sachant quelle se réduit pour $z = 0$ à une fonction $f(x, y)$, tandis que $\frac{\partial u}{\partial z}$ se réduit à $\varphi(x, y)$. Nous nous bornerons encore à calculer la valeur de cette intégrale en un point $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ dont la coordonnée z_1 est positive. En chaque point du plan $z = 0$, la direction de la conormale est parallèle à Oz, et l'on doit prendre par conséquent

$$u = f(x, y), \qquad \frac{du}{d\mathrm{N}} = \varphi(x, y)$$

sur la portion du plan des xy qui intervient dans le calcul de l'intégrale. D'autre part, on a, sur le plan des xy,

$$v = \log\left(\frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - r^2}}{r}\right), \qquad \frac{dv}{d\mathrm{N}} = \frac{dv}{dz} = \frac{-1}{\sqrt{z_1^2 - r^2}}.$$

Le champ d'intégration Σ' est ici le cercle de rayon z_1 ayant pour centre le point de coordonnées (x_1, y_1), dans le plan $z = 0$. En supprimant les indices, on peut donc écrire la formule (66) :

$$(67) \quad u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\int\!\!\int\left[\log\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - r^2}}{r}\right)\varphi(\alpha, \beta) + \frac{f(\alpha, \beta)}{\sqrt{z^2 - r^2}}\right]d\alpha\, d\beta\right\},$$

où $r^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2$, l'intégrale double étant étendue au cercle Γ de rayon z ayant le point (x, y) pour centre dans le plan des xy. La pre-

---

([1]) *Journal de Liouville*, 5e série, t. X, p. 131-207; *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XX, 1905. — Pour tout ce qui concerne les équations du type hyperbolique, voir l'Ouvrage de M. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations* (*Yale University Press*, 1923).

mière intégrale double devient, en passant aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\int_{(\Gamma)} \log\left(\frac{z+\sqrt{z^2-r^2}}{r}\right)\varphi(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \log\left(\frac{z+\sqrt{z^2-r^2}}{r}\right)\varphi(x+r\cos\theta,\,y+r\sin\theta)\,r\,dr. \end{aligned}$$

L'intégrale du second membre est uniformément convergente (I, n° 100) si la fonction φ est bornée, et l'on peut appliquer la formule de différentiation habituelle, ce qui donne pour expression de $\frac{\partial I_1}{\partial z}$

$$\frac{\partial I_1}{\partial z} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{\varphi(x+r\cos\theta,\,y+r\sin\theta)}{\sqrt{z^2-r^2}}\,r\,dr = \int\int_{(\Gamma)} \frac{\varphi(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{z^2-r^2}}.$$

Il suffit de remplacer z par t pour retrouver la formule (20) du n° 485, où l'on aurait $a = 1$.

COMPLÉMENTS ET EXERCICES.

1. Étudier le mouvement d'une corde vibrante, sachant que, pour $t = 0$, elle a la forme d'un arc de parabole, symétrique par rapport à la perpendiculaire au milieu du segment qui joint les extrémités, et que la vitesse initiale est nulle en chaque point.

2. Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, en appliquant la méthode générale du n° 489.

Si les conditions initiales sont $z = f(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t} = \varphi(x)$, pour $t = 0$, en posant $x + at = \xi$, $x - at = \eta$, l'équation devient $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0$, et les conditions initiales deviennent les suivantes : le long de la droite $\xi = \eta$, on doit avoir

$$z \quad f(\xi), \qquad \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{1}{2}f'(\xi) + \frac{1}{2a}\varphi(\xi), \qquad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{1}{2}f'(\xi) = \frac{1}{2a}\varphi(\xi).$$

3. Résoudre le problème d'Hugoniot (note de la page 127) en supposant

$$\psi(p) = \frac{1}{k}\log(1+p), \qquad f(t) = \alpha t^2.$$

Quelle devrait être la fonction $f(t)$ pour que la surface S soit un cône ?

· Établir par la méthode des approximations successives, la formule de

Cauchy (II, n° 401),

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,\varphi(x, \alpha)\,d\alpha,$$

pour l'intégrale de l'équation linéaire $F(y) = f(x)$, qui est nulle, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées pour $x = x_0$ (*cf.*, n° 495).

R. On écrit l'équation sous la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \lambda\left(a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y\right) + f(x) = \lambda\, F_x[y(x)] + f(x)$$

et l'on remarque que l'intégrale cherchée satisfait à l'équation intégro-différentielle

$$y(x) = \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} F_s[y(s)]\,ds + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)\,ds,$$

ce qui permet de la développer suivant les puissances de λ. On trouve ainsi pour expression de cette intégrale

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt[g_0(x, t) + \lambda\, g_1(x, t) + \ldots + \lambda^m g_m(x, t) + \ldots],$$

où $g_0(x, t) = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$, et où les coefficients suivants s'obtiennent par la formule de récurrence

$$g_m(x, t) = \int_{t}^{x} \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} F_s[g_{m-1}(s, t)]\,ds.$$

5. *Équation de Riemann.* — La fonction $u(x, y, \xi, \eta)$ de Riemann pour l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

a pour expression

$$u(x, y; \xi, \eta) = (\eta - x)^{-\beta'}(y-\xi)^{-\beta} F\left[\beta, \beta', 1, \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\xi)}\right](\xi-\eta)^{\beta+\beta'},$$

F désignant la série hypergéométrique (II, n° 413) (*voir* DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 81 et suivantes). On pourra consulter aussi un Article de M. Jamet (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XIX, 1895, p. 208)

CHAPITRE XXVII.

ÉQUATIONS LINÉAIRES DU TYPE ELLIPTIQUE.

I. — FONCTIONS HARMONIQUES. INTÉGRALE DE POISSON.

503. **Propriétés générales** [1]. — L'équation de Laplace joue le même rôle dans l'étude des équations linéaires du type elliptique que l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ dans la théorie des équations du type hyperbolique. Mais les problèmes qui se posent pour la nouvelle équation sont tout différents de ceux que nous avons étudiés jusqu'ici.

On dit qu'une fonction $u(x, y)$ des deux variables réelles x, y est *harmonique dans un domaine* D, lorsqu'elle est *régulière* dans ce domaine, c'est-à-dire continue ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au second ordre, et lorsqu'elle satisfait en tout point de ce domaine à l'équation de Laplace, que nous écrirons, en supprimant l'indice,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

La partie réelle d'une fonction $f(z)$ de la variable $z = x + iy$, holomorphe dans un domaine D, est harmonique dans ce domaine (II, n° 261). Inversement, à toute fonction harmonique $z(x, y)$, on peut associer une autre fonction $v(x, y,)$, définie à une constante additive près, satisfaisant aux deux relations [2]

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2}$$

de telle sorte que $z + iv$ est une fonction analytique de $z = x + iy$.

---

[1] Je me suis beaucoup servi, pour la rédaction de ce Chapitre, du *Traité d'Analyse* de M. Picard, en particulier des Chapitres I, III, X du Tome II.

[2] Soient mt, mt' deux directions rectangulaires telles que l'angle tmt' ait la même disposition que l'angle xOy; $\frac{d}{dt}$, $\frac{d}{dt'}$ désignant les dérivées prises au point m suivant ces directions, on peut remplacer les relations (2) par les relations équivalentes

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt'}, \qquad \frac{du}{dt'} = -\frac{dv}{dt}. \tag{2}$$

La démonstration directe est facile, mais il suffit d'observer que, d'après leur signification dans la théorie des fonctions, les relations (2) ne changent pas

Cette fonction $v(x, y)$ est aussi une intégrale de l'équation (1); elle est encore uniforme et régulière dans le domaine D, et par suite harmonique dans D, si ce domaine est à contour simple [1]; et $u + iv$ est holomorphe dans ce domaine. De cette liaison avec la théorie des fonctions d'une variable complexe, on déduit aisément quelques propriétés importantes des fonctions harmoniques. Ainsi nous allons montrer que *toute fonction harmonique est une fonction analytique des variables x et y*, au sens que nous avons attaché à ce mot (I, n° 197). Supposons $u(x, y)$ régulière à l'intérieur d'un cercle C de rayon R décrit du point (x_0, y_0) pour centre; il en est de même de $v(x, y)$ et par suite $f(z) = u + iv$ est une fonction holomorphe de z dans ce cercle. On a donc, à l'intérieur de C,

$$(3)\quad f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots, \qquad z_0 = x_0 + iy_0$$

es coefficients a_n étant en général des nombres complexes. Remplaçons $z - z_0$ par $x - x_0 + i(y - y_0)$ et séparons les parties réelles et les coefficients de i dans la série (3); $u(x, y)$ se présente sous forme d'une série entière à double entrée :

$$(4)\qquad u(x, y) = \sum_{p,q} b_{p,q}(x - x_0)^p (y - y_0)^q.$$

L'égalité (3) prouve que $u(x, y)$ est égale à la somme de cette série double, quand on groupe ensemble tous les termes du même degré en $x - x_0$, $y - y_0$, mais cela ne suffit pas pour prouver la convergence ABSOLUE de la série. Pour établir ce point essentiel, il faut montrer qu'elle reste convergente quand on remplace chaque terme par sa valeur absolue, pourvu que $|x - x_0|$ et $|x - y_0|$ soient assez petits. Or. l'ensemble des termes de degré n dans la

---

quand on fait tourner les axes d'un angle quelconque; il suffit donc de les faire tourner de façon à les rendre parallèles aux directions mt, mt'.

Supposons que le point m décrive une courbe fermée C dans le sens direct; si l'on prend pour mt la direction de la tangente dans le sens du parcours, mt' sera la direction mn de la normale intérieure et les relations $(2)^a$ deviennent

$$(2)^b \qquad \frac{du}{ds} = \frac{dv}{dn}, \qquad \frac{du}{dn} = -\frac{dv}{ds},$$

$\frac{d}{ds}$ et $\frac{d}{dn}$ désignant les dérivées suivant ces deux directions.

[1] Si le domaine D est limité par plusieurs courbes distinctes, la fonction $v(x, y)$ peut avoir des déterminations multiples. Prenons par exemple la fonction $\operatorname{Log} z$; la partie réelle est harmonique à l'extérieur d'un cercle décrit de l'origine pour centre, tandis que le coefficient de i admet la période 2π.

série (4) est égal, en posant $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, à

$$\alpha_n\left[(x-x_0)^n - \frac{n(n-1)}{1.2}(x-x_0)^{n-2}(y-y_0)^2 + \ldots\right]$$
$$+ \beta_n\left[-n(x-x_0)^{n-1}(y-y_0) + \frac{n(n-1)(n+2)}{1.2.3}(x-x_0)^{n-3}(y-y_0)^3 - \ldots\right].$$

Il est clair que si l'on remplace chaque terme par sa valeur absolue, la somme obtenue est inférieure à

$$|a_n|\{|x-x_0|+|y-y_0|\}^n;$$

R étant le rayon de convergence de la série entière (3), la série

$$\Sigma\, |a_n|\, r^n$$

est convergente pourvu qu'on ait $r < R$ et, par conséquent, la série (4) est absolument convergente pourvu qu'on ait

(5) $$|x-x_0|+|y-y_0| < R,$$

c'est-à-dire lorsque le point (x, y) est à l'intérieur d'un carré facile à définir.

De cette importante proposition résulte toute une série de conséquences tout à fait pareilles à celles qui ont été développées pour les fonctions analytiques d'une variable complexe. Ainsi, toutes les dérivées d'une fonction harmonique dans un domaine D sont elles-mêmes des fonctions analytiques régulières dans ce domaine; ce sont aussi des fonctions harmoniques, comme on le voit aussitôt en différentiant l'équation (1). Si deux fonctions harmoniques coïncident dans une *aire*, quelque petites qu'en soient les dimensions, elles sont identiques, car toutes leurs dérivées partielles sont égales en un point de cette aire, et l'on pourrait répéter, pour le prolongement analytique d'une fonction harmonique, tout ce qui a été dit à propos des fonctions d'une variable complexe (II, Chap. XVI). Nous n'y reviendrons pas [1].

L'ensemble des termes de degré n dans la série (4) est de la forme

$$C_1 \rho^n \cos n\varphi + C_2 \rho^n \sin n\varphi,$$

[1] Toute fonction harmonique, étant une fonction analytique de x, y, est définie virtuellement pour les valeurs *complexes* aussi bien que pour les valeurs *réelles* de ces variables dès que l'on connaît un élément de la fonction (II, n° 355). Voici une conséquence intéressante. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe de la variable complexe $z = x + iy$ dans le domaine de $z_0 = x_0 + iy_0$

$$f(z) = \alpha_0 + i\beta_0 + \ldots + (\alpha_n + i\beta_n)(z - z_0)^n + \ldots.$$

en posant

$$x - x_0 = \rho \cos \varphi, \qquad y - y_0 = \rho \sin \varphi.$$

On voit donc que le polynome harmonique et homogène le plus général de degré n en $x - x_0$, $y - y_0$ ne dépend que de *deux* constantes arbitraires C_1 et C_2. De la forme générale des termes de la série (4), on déduit aussi qu'une fonction harmonique ne peut présenter *ni maximum ni minimum* au point (x_0, y_0). En effet, si le développement de $u(x, y) - u(x_0, y_0)$ commence par des termes de degré n, l'ensemble de ces termes étant de la forme

$$\rho^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi),$$

change de signe pour n valeurs distinctes de φ [1].

De l'étude qui a été faite (II, n° 300) des points singuliers isolés d'une fonction analytique uniforme, on peut déduire l'expression générale d'une fonction harmonique dans le domaine d'un point singulier isolé. Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique régulière en tout point intérieur à un cercle C de centre $A(a, b)$, sauf peut-être au point A lui-même. En lui adjoignant la fonction harmonique

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{x, y} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

prise depuis un point (x_0, y_0) du cercle C différent du centre, on obtient une fonction analytique $u + iv$ de la variable complexe $z = x + iy$ qui n'admet pas d'autre point singulier, à l'intérieur du cercle C, que le point A, mais elle n'est pas nécessairement uniforme, car la fonction $v(x, y)$ peut admettre une période

---

La partie réelle $u(x, y)$ de $f(z)$ est représentée dans le même domaine par la série

$$u(x, y) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{\alpha_n + i\beta_n}{2} [x - x_0 + i(y - y_0)]^n + \frac{\alpha_n - i\beta_n}{2} [x - x_0 - i(y - y_0)]^n \right\}.$$

Remplaçons, dans cette formule, $x - x_0$ par $\frac{z - z_0}{2}$, $y - y_0$ par $\frac{z - z_0}{2i}$, elle devient

$$u\left(x_0 + \frac{z - z_0}{2}, y_0 + \frac{z - z_0}{2i}\right) = \alpha_0 + \frac{1}{2} f(z) - \frac{\alpha_0 + \beta_0 i}{2};$$

cette relation, établie lorsqu'on a $|z - z_0| < R$, subsiste évidemment dans tout le domaine d'existence de $f(z)$, puisque les deux membres sont des fonctions analytiques de z. En particulier, si $u(x, y)$ est une fonction rationnelle ou une fonction algébrique de x, y, $f(z)$ est une fonction de z de même nature.

[1] Le point (x_0, y_0) ne peut être qu'un point ordinaire ou un point multiple à tangentes distinctes sur la courbe $u(x, y) = u(x_0, y_0)$, mais jamais un point isolé ni un point de rebroussement.

provenant d'une circulation dans le sens direct autour du centre. Soit $2\pi\alpha$ cette période qui est forcément réelle; la différence

$$u + iv - \alpha \operatorname{Log}(z - z_0), \qquad \text{où} \quad z_0 = a + ib,$$

est une fonction uniforme $\alpha f(z)$ dans le domaine du point z_0, qui ne peut admettre d'autre point singulier dans ce domaine que le point z_0 lui-même. On a donc

$$e^{\frac{u+iv}{\alpha}} = (z - z_0)e^{f(z)} = \mathrm{F}(z),$$

$\mathrm{F}(z)$ étant aussi une fonction uniforme dans le domaine de point z_0, ne pouvant avoir d'autre point singulier que z_0 dans ce domaine et différente de zéro en tout autre point du domaine. On a donc

$$\text{(I)} \qquad u(x, y) = \alpha \log|\mathrm{F}(z)|,$$

et inversement de toute fonction uniforme $\mathrm{F}(z)$, jouissant des propriétés énoncées, on déduira, par la formule précédente, une fonction harmonique dans tout le domaine du point A, sauf peut-être au point A lui-même. La formule (I) s'étend immédiatement au cas où la fonction $v(x, y)$ serait elle-même uniforme.

On déduit aisément de ce qui précède quelques théorèmes élémentaires de M. Picard [1]. Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique régulière dans un domaine D, sauf peut-être en un point A de ce domaine, dans le voisinage duquel on sait seulement que sa valeur absolue est inférieure à un nombre fixe. La fonction $\mathrm{F}(z)$ qui figure dans la formule (I) ne peut admettre le point A comme point singulier essentiel, ni comme pôle, ni comme zéro, car, dans chacune de ces hypothèses, la valeur absolue de $\log|\mathrm{F}(z)|$ pourrait dépasser tout nombre donné dans le voisinage du point A. Il s'ensuit que, dans le domaine du point A, la fonction $\mathrm{F}(z)$ est représentée par un développement de Taylor, commençant par un terme constant différent de zéro; la fonction $\operatorname{Log}\{\mathrm{F}(z)\}$ est aussi holomorphe dans le domaine de ce point, et la partie réelle $u(x, y)$ de $\alpha \operatorname{Log}\{\mathrm{F}(z)\}$ est régulière dans le domaine du point A, et, par suite, *dans tout le domaine* D. C'est la première proposition de M. Picard.

Supposons en second lieu que la valeur absolue de $u(x, y)$ augmente indéfiniment lorsque la distance r du point (x, y) au point A tend vers zéro. Cela ne peut arriver si le point A est un point singulier essentiel de $\mathrm{F}(z)$ (II, n° 300) ni lorsque ce point est un point ordinaire de $\mathrm{F}(z)$, sans être un zéro. Il faut donc

---

[1] E. Picard, *Quelques théorèmes élémentaires sur les fonctions harmoniques* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LII, 1924, p. 162). *Voir* aussi dans le tome 176 des *Comptes rendus* (1923) diverses Notes sur ce sujet de MM. Picard, Lebesgue, Bouligand.

que z_0 soit un pôle ou un zéro de $F(z)$, qui est de la forme $(z-z_0)^m\varphi(z)$, m étant un entier positif ou négatif, et $\varphi(z)$ une fonction holomorphe qui n'est pas nulle pour $z=z_0$. On a alors $u(x, y)=\alpha[m\log r+\log|\varphi(z)|]$, c'est-à-dire

$$u(x, y)=\mathrm{K}\log r+\mathrm{U},$$

U étant une fonction harmonique régulière en A, ce qui constitue le second théorème de M. Picard.

Dans le premier cas, la fonction $F(z)$ est régulière au point A, sans être nulle en ce point. Dans le second cas, le point A est un pôle ou un zéro de $F(z)$. Lorsque le point A est un point singulier essentiel de $F(z)$, la fonction $u(x, y)$ est indéterminée en ce point. Par exemple, si l'on prend $F(z)=e^{\frac{1}{z}}$, l'origine est un point d'indétermination pour $u(x, y)=\frac{x}{x^2+y^2}$.

La plupart des autres propriétés des fonctions harmoniques qui vont être démontrées pourraient de même se déduire de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Cependant elles seront établies directement, de façon à pouvoir étendre la démonstration au cas de trois variables. Observons d'abord qu'on peut appliquer aux fonctions harmoniques les remarques faites plus haut à propos des équations linéaires (n° 483). Ainsi, de toute solution de l'équation (1) dépendant d'un ou plusieurs paramètres, on peut déduire par des différentiations ou des quadratures, une infinité d'autres solutions. Parmi les solutions connues, la fonction $u=\log r$, où r est la distance des deux points (x, y), (a, b), qui dépend des deux paramètres a, b, va jouer un rôle important. Les dérivées partielles de u par rapport à l'une quelconque des variables a, b, x, y sont aussi des fonctions harmoniques et il en est de même de toute combinaison linéaire de ces dérivées dont les coefficients sont indépendants de x et de y. Par exemple, soit L une direction quelconque, issue du point (a, b), faisant avec la direction allant du point (a, b) au point (x, y) un angle φ. La dérivée, prise suivant cette direction, de $\log r$, considéré comme fonction des paramètres a, b, est une nouvelle fonction harmonique des variables x et y, car c'est une combinaison linéaire à coefficients constants des dérivées $\frac{\partial\log r}{\partial a}$, $\frac{\partial\log r}{\partial b}$. Cette dérivée a pour expression $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\mathrm{L}}$, c'est-à-dire $-\frac{\cos\varphi}{r}$ (I, n° 84); on vérifie directement que $\frac{\cos\varphi}{r}$ est une fonction harmonique en observant que c'est la partie réelle de la fonction $e^{\theta i}\frac{1}{z-a-bi}$, θ étant l'argument qui convient à la direc-

tion L. On voit de même que $\frac{\cos\psi}{r}$, où ψ est l'angle que fait la direction allant de (x, y) en (a, b) avec une direction *fixe* Λ indépendante du point (x, y), est une fonction harmonique, car cette expression est égale, au signe près, à la dérivée de $\log r$, considérée comme fonction de (x, y), prise suivant la direction Λ.

Observons encore que toute transformation ponctuelle qui conserve les angles change une fonction harmonique en une nouvelle fonction harmonique. Cette propriété a déjà été établie implicitement (II, p. 60; I, p. 160, ex. 8).

504. **Intégrales uniformément convergentes.** — Pour éviter des répétitions inutiles, nous allons d'abord démontrer une propriété de certaines intégrales, sur laquelle on s'appuiera souvent. Soit, d'une façon générale, $u(M, P)$ une fonction des coordonnées de deux points M et P, donc chacun peut décrire un certain domaine, et qui est continue pour tous les systèmes de positions de ces deux points, sauf lorsque les deux points sont confondus; telle est, par exemple, une expression de la forme $\frac{v(M, P)}{\overline{MP}^\alpha}$, $v(M, P)$ étant continue, et α étant positif. Supposons d'abord que le point M décrive une courbe plane déterminée C, tandis que P peut occuper une position quelconque dans le plan. L'intégrale

$$U(P) = \int_{(C)} u(M, P)\, ds,$$

prise en supposant le point P fixe et faisant décrire à M l'arc C, est une fonction continue des coordonnées du point P, tant que ce point ne vient pas sur C (I, n° 98). Lorsque le point P coïncide avec un point M_0 de C, l'intégrale $U(M_0)$ peut avoir un sens quoiqu'elle ait un élément infini, mais la présence de cet élément infini ne permet plus d'affirmer sans autre examen que l'intégrale est continue en ce point, c'est-à-dire que $U(P) - (UM_0)$ tend vers zéro avec la distance M_0P.

Nous dirons que l'intégrale $U(P)$ est *uniformément convergente dans le domaine d'un point* M_0 *de* C si la condition suivante est remplie : étant donné un nombre positif arbitraire ε, on peut trouver sur l'arc C un arc C' sur lequel est situé M_0, et un nombre positif ρ, tels que pour tout point P pris à l'intérieur du cercle c_ρ de rayon ρ, décrit de M_0 pour centre, la valeur absolue de l'intégrale $\int_{C'} u(M, P)\, ds$ soit inférieure à ε. Lorsque cette condition est remplie, il suffit de reprendre le raisonnement classique employé

si souvent pour démontrer que $U(P) - U(M_0)$ tend vers zéro avec M_0P. On peut écrire en effet

$$U(P) - U(M_0) = U'(P) - U'(M_0) + \{ U''(P) - U''(M_0) \},$$

en désignant par U' et U'' les intégrales étendues à l'arc C' et à l'arc $C'' = C - C'$. L'arc C' et le nombre ρ ayant été choisis comme on vient de le dire, les valeurs absolues de $U'(P)$ et de $U'(M_0)$ sont inférieures à ε, lorsque P est à l'intérieur de c_ρ. Mais, le nombre ρ pouvant être remplacé par tout nombre positif plus petit, on peut supposer l'arc C'' tout entier à l'extérieur de c_ρ. L'intégrale $U''(P)$ est alors une fonction continue dans ce cercle c_ρ. Choisissons un nombre positif $\rho' \leqq \rho$ tel qu'on ait

$$| U''(P) - U''(M_0) | < \varepsilon,$$

lorsqu'on a $M_0 P < \rho'$. Il est clair qu'on aura aussi

$$| U(P) - U(M_0) | < 3\varepsilon,$$

lorsque $M_0 P$ sera inférieur à ρ'.

La définition des intégrales uniformément convergentes dans le domaine d'un point s'étend aux intégrales doubles et aux intégrales triples. Supposons que le point P puisse occuper toutes les positions dans l'espace, tandis que le point M est assujetti à rester sur une surface Σ. Nous dirons encore que l'intégrale de surface

$$U(P) = \iint_{(\Sigma)} u(M, P)\, d\sigma$$

est uniformément convergente dans le domaine d'un point M_0 de Σ si, étant donné un nombre ε positif, on peut trouver une portion Σ' de Σ entourant le point M_0 et un nombre positif ρ, tels que pour tout point P pris à l'intérieur de la sphère de rayon ρ ayant pour centre M_0, la valeur absolue de l'intégrale

$$\iint_{(\Sigma')} u(M, P)\, d\sigma$$

soit inférieure à ε. Enfin, si le point M décrit lui-même un domaine à trois dimensions D, on dira que l'intégrale triple

$$U(P) = \iiint_{(D)} u(M, P)\, dv$$

est uniformément convergente dans le domaine d'un point M_0 de D si, étant donné un nombre positif ε, on peut trouver un domaine D' renfermant M_0 à l'intérieur et un nombre positif ρ tels que, pour tout point P pris dans la sphère de rayon ρ ayant M_0

pour centre, la valeur absolue de l'intégrale triple

$$\int\int\int_{(D')} u(M, P)\, dv$$

soit inférieure à ε. Il n'y a rien à changer à la démonstration pour prouver dans les deux cas que $U(P)$ est continue au point M_0.

505. **Potentiel logarithmique.** — Des intégrales particulières de l'équation (1) citées à la fin du n° 503, on peut déduire une infinité d'autres fonctions harmoniques par des quadratures. Nous n'étudierons d'abord que les fonctions représentées par des intégrales définies, prises le long d'une courbe C. Sur les courbes C dont il sera question dans la suite, nous ferons les hypothèses suivantes : nous admettrons qu'elles se composent d'un nombre *fini* d'arcs de courbe tels que les coordonnées d'un point qui décrit l'un d'eux sont des fonctions continues d'un paramètre admettant des dérivées continues. Ces conditions sont évidemment remplies pour une courbe qui se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques (I, n° 198), mais il y a intérêt pour la théorie à ne pas se limiter à ce cas.

Soit μ une fonction qui prend une valeur déterminée en chaque point M de C, et qui varie d'une manière continue avec la position de ce point, par exemple, une fonction continue de l'arc s compté à partir d'une origine fixe arbitraire. L'intégrale définie

$$V = \int_C \mu \log r\, ds, \tag{6}$$

où r est la distance d'un point variable M de C à un point fixe P du plan, et où ds est essentiellement positif, représente une fonction harmonique des coordonnées (a, b) du point P, dans tout domaine ne renfermant aucun point de C. Cela résulte des propriétés de $\log r$, et de la formule habituelle de différentiation sous le signe intégral, qui est ici applicable, puisque l'intégrale (6) et celles qu'on en déduit par différentiation n'ont aucun élément infini. On appelle cette fonction V un *potentiel de logarithme de simple couche* (*cf.* Chap. XXVIII).

La fonction $V(a, b)$ *est continue sur la courbe* C *elle-même*. Il suffit de prouver que l'intégrale $\int_C \mu \log(r)\, ds$ est uniformément convergente dans le domaine d'un point M_0 de C. Prenons pour origine le point M_0, pour axes des x et des y la tangente et la normale en ce point, et soit C′ un petit arc de C, représenté par l'équation $y = f(x)$, où x varie de $-h$ à $+h$, h étant un nombre

positif assez petit pour que cet arc C' soit à l'intérieur du cercle de rayon $\frac{1}{2}$ décrit de l'origine pour centre. Soient c_ρ un cercle concentrique de rayon $\rho \leqq h$, et $P(a, b)$ un point intérieur à c_ρ. La distance r du point P à un point M de C' est inférieure à l'unité; en désignant par H une limite supérieure de $|\mu|\sqrt{1+f'^2(x)}$ sur une portion de C renfermant l'arc C', la valeur absolue de

$$\int_{C'} \mu \log r \, ds$$

est inférieure à

$$-\mathrm{H}\int_{-h}^{+h} \log\left[\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right] dx < -\mathrm{H}\int_{-h}^{+h} \log(|x-a|)\, dx,$$

a étant compris entre $-h$ et $+h$, cette dernière intégrale est elle-même inférieure à $-2\mathrm{H}\int_0^{2h} \log(t)\,dt$ et tend vers zéro avec h. On étendrait aisément la démonstration au cas où M_0 est un point anguleux de C. Au contraire, les dérivées partielles de V éprouvent, quand le point P traverse la courbe C, des discontinuités qui seront étudiées plus loin (Chap. XXVIII).

On obtient encore des fonctions harmoniques en remplaçant, dans la formule (6), $\log r$ par $\frac{1}{r}\cos(r, \lambda)$ où $\cos(r, \lambda)$ désigne le cosinus de l'angle que fait la direction MP avec une direction arbitraire issue du point M, indépendante de la position du point (a, b), car nous avons remarqué que cette expression est une fonction harmonique de (a, b), quelle que soit la position du point M. Si l'on prend en particulier une direction sur la normale en M au contour C, on obtient le *potentiel logarithmique de double couche*

$$\mathrm{W} = \int_{C} \mu \frac{\cos\varphi}{r}\, ds, \tag{7}$$

φ étant l'angle de la direction MP avec une direction choisie sur la normale en M; W est encore une fonction harmonique des coordonnées de P, dans tout domaine ne renfermant aucun point de C, mais elle est discontinue, quand P traverse le contour d'intégration. Pour étudier cette discontinuité, nous supposerons que C est une courbe fermée sans point double, et qu'on a pris la direction intérieure sur la normale.

Si μ se réduit à une constante, l'intégrale $\int_{(C)} \frac{\cos\varphi}{r}\, ds$, à laquelle on est conduit, a une signification géométrique, qui met en évi-

dence la discontinuité. Elle est égale, en effet, à l'intégrale

$$\int_C d \operatorname{arc\,tang} \frac{y-b}{x-a} = \int_C \frac{(x-a)\,dy - (y-b)\,dx}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

prise le long de C dans le sens direct. On le vérifie au moyen des formules $dx = ds \cos\beta'$, $dy = -ds \cos\alpha'$, où α' et β' sont les angles (comptés de o à π) que fait la direction de la normale intérieure avec Ox et Oy (*voir* p. 179). Il suffit encore de considérer le triangle infinitésimal PMM', où M et M' sont deux points infiniment voisins de C, pour reconnaître que $\frac{\cos\varphi}{r}\,ds$ est égal à l'angle $d\omega$, affecté d'un signe, sous lequel on voit du point P l'élément d'arc MM'. L'intégrale $\int_C \frac{\cos\varphi}{r}\,ds$ est donc égale à 2π, si le point P est intérieur au contour C, et à zéro si le point P est extérieur à ce contour. Si le point P est un point ordinaire du contour, l'intégrale est égale à π; en un point anguleux du contour, elle est égale à l'angle α, sous lequel se coupent les deux tangentes compté de o à 2π dans le sens convenable.

L'étude de ce cas particulier suffit pour montrer que l'intégrale (7) n'est pas uniformément convergente dans le voisinage d'un point M_0 de C. Supposons par exemple que M_0 est un point ordinaire de C, et soit C' un arc très petit, sur lequel est M_0; si l'on néglige la variation de μ le long de C', on voit que l'intégrale $\int_{C'} \mu \frac{\cos\varphi}{r}\,ds$, pour un point P intérieur à C très voisin de M_0, est à peu près égale à $\pi\mu_0 = \pi\mu(M_0)$, tandis qu'elle est très voisine de zéro pour le point M_0 lui-même. Mais l'intégrale

$$\text{(8)} \qquad I(P) = \int_{C'} (\mu - \mu_0) \frac{\cos\varphi}{r}\,ds$$

est *uniformément convergente dans le domaine du point* M_0. Supposons, en effet, l'arc C' assez petit pour qu'on ait

$$|\mu(M) - \mu(M_0)| < \varepsilon,$$

en tout point M de C'. Pour un point quelconque P voisin de M_0, la valeur absolue de l'intégrale $\int_{C'} (\mu - \mu_0) \frac{\cos\varphi}{r}\,ds$ est inférieure à $2\pi\varepsilon$, et par conséquent peut être rendue moindre que tout nombre donné, en prenant l'arc C' assez petit. L'intégrale I(P) est donc continue au point M_0.

Cela étant, désignons par W_0 la valeur de l'intégrale (7) lorsque le point P est en M_0, par W_{i0} et W_{e0} les valeurs limites de W(P) lorsque le point P tend vers le point M_0 en restant à l'intérieur ou à l'extérieur de C. Si le point M_0 est un point ordinaire du con-

tour, on a $I(M_0) = W_0 - \pi\mu_0$, et d'autre part la limite de $I(P)$ est $W_{i0} - 2\pi\mu_0$ ou W_{e0}, suivant que le point P tend vers M_0 en restant à l'intérieur ou à l'extérieur du contour. En écrivant que $I(P)$ est continue au point M_0, on a les deux égalités

$$W_0 - \pi\mu_0 = W_{i0} - 2\pi\mu_0 = W_{e0},$$

d'où l'on déduit les relations fondamentales

$$(9) \qquad W_{i0} = W_0 + \pi\mu_0, \qquad W_{e0} = W_0 - \pi\mu_0.$$

En un point anguleux où les tangentes font un angle α, ces relations doivent être remplacées par les suivantes :

$$(9) \qquad W_{i0} = W_0 + (2\pi - \alpha)\mu_0, \qquad W_{e0} = W_0 - \alpha\mu_0.$$

506. **Seconde formule de Green.** — Dans le cas particulier de l'équation de Laplace, la formule générale (41) du n° 497 prend la forme simple

$$\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right).$$

Si les fonctions φ et ψ sont régulières dans un domaines D limité par un contour fermé C, on a donc, d'après la première formule de Green (I, n° 123),

$$\iint_{(D)} (\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi)\,dx\,dy = \int_C \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dy - \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx,$$

l'intégrale curviligne étant prise dans le sens direct le long du contour C. Soient α et β les angles (comptés de o à π) que fait la direction MT de la tangente à C dans le sens direct avec les axes, α' et β' les angles de la *direction intérieure* MN de la normale avec les mêmes axes. Il est clair qu'on a $\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' = 0$. D'autre part, supposons que par un point M de C on mène deux demi-droites Mx', My' respectivement parallèles à Ox et à Oy; une rotation qui amène Mx' sur MT amènera aussi My' sur MN, et par suite on a $\cos\beta' = \cos\alpha$, ce qui entraîne $\cos\alpha' = -\cos\beta$. On peut donc remplacer dx par $\cos\beta'\,ds$ et dy par $-\cos\alpha'\,ds$ dans l'intégrale curviligne, et la formule précédente devient

$$\begin{aligned}\iint_{(D)} (\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi)\,dx\,dy = &\int_C \psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta'\right)ds \\ &-\int_C \varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\alpha' + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos\beta'\right)ds.\end{aligned}$$

Or $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta'$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\alpha' + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos\beta'$ représentent précisément (n° 501) les dérivées $\frac{d\varphi}{dn}$, $\frac{d\psi}{dn}$, prises suivant la normale

intérieure, et nous obtenons ainsi la nouvelle formule de Green

$$(10)\qquad \iint_{(D)} (\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi)\,dx\,dy + \int_C \left(\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn}\right)ds = 0.$$

Nous ferons remarquer une fois pour toutes que, dans cette intégrale et dans toutes les intégrales analogues, *ds* est essentiellement positif, et par suite il n'y a pas lieu de spécifier dans quel sens le contour est décrit. Ce contour peut se composer de plusieurs courbes fermées distinctes, mais la direction de la normale intérieure au contour est toujours celle qui pénètre dans le domaine D; elle coïncide donc avec la direction extérieure de la normale à la courbe géométrique lorsque celle-ci limite intérieurement le domaine. Il est essentiel aussi d'observer que cette formule (10), où figurent $\frac{d\varphi}{dn}$, $\frac{d\psi}{dn}$, suppose que les dérivées partielles $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, ... ont des valeurs finies sur le contour. Quand on dit, par exemple, que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ a une valeur finie en un point M de C, cela signifie que la valeur de $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ en un point m de D, situé sur la parallèle à Ox menée par M, tend vers une limite lorsque m tend vers M, et de même pour les autres. Ces conditions sont certainement vérifiées si φ et ψ sont régulières dans un domaine à l'intérieur duquel est situé le contour C, mais cette condition n'est pas nécessaire; nous n'avons besoin d'aucune hypothèse sur les fonctions φ et ψ en dehors du contour.

De la formule générale (10), on déduit plusieurs formules particulières importantes. Si φ et ψ sont deux fonctions harmoniques dans D, elle devient, en remplaçant φ et ψ par U et V,

$$(11)\qquad \int_{(C)} \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dV}{dn}\right)ds = 0.$$

Prenons encore $\psi = 1$, et remplaçons φ par une fonction harmonique U ou le carré U^2 d'une fonction harmonique; nous obtenons les deux nouvelles formules

$$(12)\qquad \int_{(C)} \frac{dU}{dn}\,ds = 0,$$

$$(12\ bis)\qquad \iint_{(D)} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy + \int_{(C)} U\frac{dU}{dn}\,ds = 0.$$

La première de ces relations caractérise les fonctions harmoniques, car le premier membre est égal, d'après la formule générale (10), à $-\iint_{(D)} \Delta U\,dx\,dy$ et, par suite, l'intégrale (12) ne peut être nulle, quel que soit le contour C, que si l'on a identiquement $\Delta U = 0$.

507. Applications aux fonctions harmoniques. — Soient P un point du domaine D de coordonnées (a, b) et $U(x, y)$ une fonction harmonique dans ce domaine. Posons $V = \log r$, r étant la distance du point P à un point variable (x, y), et appliquons la formule générale (11) au domaine D′ limité par le contour C et un cercle γ décrit de P pour centre avec un rayon ρ assez petit pour qu'il soit tout entier à l'intérieur de D. Les fonctions U et V étant régulières dans D′, nous avons la relation

$$\int_C \left(U \frac{d \log r}{dn} - \log r \frac{dU}{dn} \right) ds = \int_\gamma \left(U \frac{d \log r}{dn} - \log r \frac{dU}{dn} \right) ds,$$

les dérivées $\frac{d}{dn}$ le long de γ étant prises suivant la direction intérieure à γ. L'intégrale curviligne suivant γ est, par suite, indépendante du rayon ρ. Il suffit donc, pour avoir sa valeur, de chercher sa limite pour $\rho = 0$. La seconde partie de cette intégrale peut s'écrire $\int_0^{2\pi} \frac{dU}{dn} \rho \log \rho \, d\varphi$ et tend évidemment vers zéro avec ρ. Quant à la première partie, remarquons que le long de γ, on a

$$\frac{d \log r}{dn} = -\frac{1}{\rho}, \qquad ds = \rho \, d\varphi,$$

et cette intégrale peut s'écrire

$$-\int_0^{2\pi} [U(a, b) + \varepsilon] \, d\varphi,$$

ε étant infiniment petit avec ρ. La limite est donc égale à

$$-2\pi U(a, b)$$

et nous obtenons la formule fondamentale

$$(13) \qquad U(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\log r \frac{dU}{dn} - U \frac{d \log r}{dn} \right) ds,$$

les dérivées $\frac{d}{dn}$ étant toujours prises suivant la normale intérieure. Il est à peine besoin de faire remarquer l'analogie de ce résultat avec la formule fondamentale de l'intégrale de Cauchy (II, n° 291) dont on pourrait, du reste, le déduire (*Exercice* 1).

Si le contour C est une circonférence de rayon R et de centre P, on a, tout le long de C, $\log r = \log R \; \frac{d \log r}{dn} = -\frac{1}{R}$ et, en tenant compte de la relation (12), on obtient la *formule de la moyenne* de Gauss

$$(14) \qquad U(a, b) = \frac{1}{2\pi R} \int_C U \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\psi) \, d\psi.$$

$U(\psi)$ étant la valeur de U à l'extrémité du rayon qui fait un angle ψ

avec une direction fixe arbitraire. Il est aisé d'en déduire qu'*une fonction harmonique ne peut avoir ni maximum, ni minimum* (*cf.* n° 503). Supposons, par exemple, que $U(x, y)$ soit maximum au point P. Décrivons de ce point pour centre un cercle C de rayon assez petit pour qu'on ait, en tout point de C, $U(\psi) < U(a, b)$. Il est clair que l'égalité (14) serait impossible. La démonstration s'applique aussi au cas où $U(x, y)$ aurait en P un maximum *impropre*. L'hypothèse où $U(\psi)$ serait constamment égal à la valeur de U au point P, aussi petit que soit le rayon de C, est évidemment à rejeter, car la fonction se réduirait à une constante (n° 503).

Soient A et B les valeurs maximum et minimum d'une fonction harmonique le long d'un contour C. Cette fonction ne peut prendre aucune valeur supérieure à A, ni inférieure à B, à l'intérieur de C, *ni ces valeurs* A *et* B *elles-mêmes*, car elle aurait forcément un maximum propre ou impropre en un point intérieur au contour.

Une autre conséquence importante est celle-ci : on dit qu'une fonction $u(x, y)$, définie à l'intérieur de C, prend la valeur u_M en un point M de C lorsque la différence $u_P - u_M$ tend vers zéro en même temps que la distance MP, P étant un point quelconque intérieur à C. Il ne peut exister plus d'une fonction harmonique à l'intérieur d'un contour fermé C, et prenant une valeur donnée en chaque point M de C, cette valeur variant d'une manière continue avec la position du point M. En effet, s'il en existait deux, leur différence serait une fonction harmonique à l'intérieur de C, s'annulant tout le long de C; si cette différence n'était pas identiquement nulle, elle aurait forcément un maximum ou un minimum à l'intérieur de C, ce qui est impossible. La formule (13) ne donne pas la solution du problème, appelé *problème de Dirichlet*, qui consiste à déterminer U, connaissant ses valeurs sur C, car le second membre renferme U et $\frac{dU}{dn}$. Il résulte, au contraire, de ce qu'on vient de dire qu'on ne peut choisir arbitrairement les valeurs de U et de $\frac{dU}{dn}$ le long de C; la formule (13) renferme donc des données *surabondantes*. Ceci n'est point en contradiction avec les théorèmes d'existence de Cauchy, car le problème à résoudre est tout différent du problème de Cauchy. D'une part, le contour C qui porte les données et les données elles-mêmes ne sont pas forcément analytiques. D'autre part, il s'agit de déterminer une fonction dans tout *l'intérieur* d'un contour fermé, et non point seulement dans le *voisinage* d'un arc de courbe, de part et d'autre de cet arc.

508. **Intégrale de Poisson.** — Les propriétés du potentiel de

double couche conduisent facilement à la solution du problème de Dirichlet lorsque le contour C est une circonférence. Soient U(M) une fonction qui varie d'une manière continue avec la position du point M sur C, P un point intérieur. Le potentiel de double couche

$$\text{(15)} \qquad V(a, b) = \int_C U(M) \frac{\cos\varphi}{r} ds,$$

où r et φ ont le sens habituel, est une fonction harmonique des coordonnées (a, b) du point P, à l'intérieur du cercle. Lorsque le point P coïncide avec un point quelconque de C, on a, pour toute position du point M sur ce contour, $r = 2R\cos\varphi$, R étant le rayon du cercle, et, par suite, l'intégrale (15) a une valeur constante

$$\int_C U(M) \frac{ds}{2R},$$

en un point quelconque de C. D'après le théorème général du n° 505, lorsque le point P intérieur au cercle tend vers un point M_0 de la circonférence, la fonction $V(a, b)$ tend vers

$$\pi U(M_0) + \int_C \frac{U(M)\, ds}{2R}.$$

La fonction représentée par l'intégrale définie

$$\text{(16)} \qquad U(a, b) = \frac{1}{\pi} \int_C U(M) \left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R} \right) ds$$

fournit donc la solution du problème de Dirichlet pour le cercle. On écrit habituellement cette intégrale sous la forme suivante, considérée par Poisson. Le centre du cercle étant pris pour origine, soient (ρ, θ) les coordonnées polaires du point P, (R, ψ) celles d'un point M de C. En tenant compte des relations

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi, \qquad r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\psi - \theta),$$

la formule (16) s'écrit sous les formes équivalentes

$$\text{(17)} \qquad \begin{aligned} U(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{r^2} d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{(R^2 - \rho^2)\, d\psi}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\psi - \theta)}, \end{aligned}$$

où l'on met $f(\psi)$ au lieu de U(M).

La formule (17) peut aussi se déduire de la formule générale (13) au moyen d'un artifice, fondé sur une propriété géométrique de la circonférence, qui permet d'éliminer $\frac{dU}{dn}$. Soient P_1 le conjugué harmonique de P par rapport aux extrémités du diamètre passant par P, et r_1 la distance de P_1 à un point (x, y). La fonction $\log r_1$ étant harmonique à l'intérieur du cercle C, nous avons la relation

$$(13)' \qquad \frac{1}{2\pi}\int_C \left(U\frac{d\log r_1}{dn} - \log r_1 \frac{dU}{dn}\right) ds = 0,$$

U étant la fonction harmonique cherchée, dont on se donne les valeurs sur C. En ajoutant les relations (13) et (13)', il vient

$$(18) \qquad U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C U\left(\frac{d\log r_1}{dn} - \frac{d\log r}{dn}\right) ds,$$

car le coefficient de $\frac{dU}{dn}$ sous le signe intégral est $\log\frac{r}{r_1}$ qui reste constant sur C, et, par suite, l'intégrale correspondante est nulle, d'après la relation (12). Soient ρ, ρ_1, les distances OP et OP_1, φ_1 l'angle de la normale intérieure en un point M de C avec MP_1. On a les relations

$$\frac{d\log r}{dn} = -\frac{\cos\varphi}{r}, \qquad \frac{d\log r_1}{dn} = -\frac{\cos\varphi_1}{r_1}, \qquad \rho\rho_1 = R^2, \qquad \frac{r_1}{r} = \frac{R}{\rho},$$
$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi, \qquad \rho_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\varphi_1,$$

d'où l'on déduit, en éliminant φ, φ_1, r_1, ρ_1,

$$\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi_1}{r_1} = \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2},$$

ce qui prouve bien l'identité des formules (17) et (18). Cette seconde démonstration est moins complète que la première, car elle suppose que $\frac{dU}{dn}$ a une valeur finie le long de C, et, d'autre part, elle ne prouve pas que la valeur de l'intégrale (18) tend bien vers la valeur donnée de U en un point M de C lorsque le point P tend vers le point M.

Application. — Supposons $f(\psi) \geqq 0$ le long de C; $U(a, b)$ est alors positif pour tout point intérieur. Comme r varie du mini-

mum $R-\rho$ au maximum $R+\rho$, on a évidemment, en remplaçant successivement r par $R-\rho$ et par $R+\rho$ dans la formule (17), et en observant que $\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi = 2\pi U_0$,

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} U_0 < U_P < \frac{R+\rho}{R-\rho} U_0, \tag{19}$$

U_0 et U_P étant les valeurs de $U(a, b)$ au centre du cercle et au point P. On en déduit que la valeur absolue de $U_P - U_0$ est inférieure à la différence des deux termes extrêmes de cette double inégalité $\frac{4R\rho}{R^2-\rho^2} U_0$. Si une fonction harmonique U est régulière et positive dans tout le plan, on peut supposer le nombre R aussi grand qu'on le veut, et, par suite, $\frac{4R\rho}{R^2-\rho^2} U_0$ plus petit que tout nombre donné. On a donc $U_P = U_0$, ce qui prouve que *toute fonction harmonique positive dans tout le plan se réduit à une constante*.

Plus généralement, *toute fonction harmonique dans tout le plan, qui est bornée dans un sens, est une constante.* En effet, si l'on a par exemple $U(x, y) < C$, la fonction $C - U(x, y)$ est une fonction harmonique positive dans tout le plan. Cette proposition correspond au théorème de Liouville (II, n° 294).

Considérons encore le cas où la fonction $f(\psi)$ présente sur le cercle un nombre fini de discontinuités de *première espèce*. L'intégrale de Poisson représente encore une fonction harmonique à l'intérieur du cercle. Lorsque le point P intérieur au cercle tend vers un point M du cercle où $f(\psi)$ est continue, la limite de l'intégrale est encore $f(\psi)$; il n'y a rien à changer au raisonnement. Il nous reste à étudier comment se comporte la fonction $U(a, b)$ dans le voisinage d'un point de discontinuité de $f(\psi)$. Prenons d'abord le cas particulier où $f(\psi) = \psi$, ψ étant l'angle au centre compté dans le sens direct de $-\pi$ à $+\pi$ à partir du rayon OA' opposé au rayon OA qui aboutit à un point de discontinuité A. L'intégrale (16) peut s'écrire

$$u(a, b) = \frac{1}{\pi}\int_C \psi\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R}\right)ds = \frac{1}{\pi}\int_C \psi\,d\omega, \tag{20}$$

ω étant l'angle, compté de 0 à 2π dans le sens direct, que fait la direction PM avec une direction fixe; il est évident, en effet, que l'intégrale $\int_C \psi \frac{ds}{R}$ est

nulle, tandis que $\frac{\cos\varphi}{r}\,ds$ est égal à $d\omega$ (nº 505). Il est clair que, si le point P est sur le diamètre qui passe au point A, on a

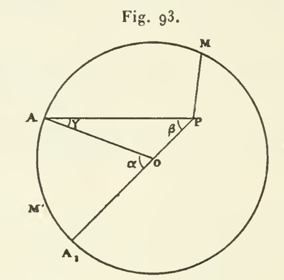
$$u(a, b) = 0,$$

car les éléments symétriques par rapport au diamètre se détruisent deux à deux. Si P n'est pas sur ce diamètre, soit A_1 une des extrémités du diamètre passant par P, et $u_1(a, b)$ l'intégrale $\frac{1}{\pi}\int_C \psi_1\,d\omega$, ψ_1 étant l'angle au centre compté de $-\pi$ à $+\pi$ dans le sens direct à partir du rayon OA'_1 opposé à OA_1. D'après ce qu'on vient de remarquer, $u_1(a, b) = 0$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} u(a, b) &= u(a, b) - u_1(a, b) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{(A_1MA)} (\psi - \psi_1)\,d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{(AM'A_1)} (\psi - \psi_1)\,d\omega; \end{aligned}$$

le long de A_1MA, on a $\psi - \psi_1 = \alpha$ (*fig*, 93), tandis que le long de $AM'A_1$,

Fig. 93.



$\psi - \psi_1 = \alpha - 2\pi$. Par suite,

$$u(a, b) = \frac{1}{\pi}\alpha(2\pi - \beta) + \frac{1}{\pi}(\alpha - 2\pi)\beta = 2(\alpha - \beta) = 2\gamma.$$

Par conséquent, dans le cas de la figure, *l'intégrale* $u(a, b)$ *est égale au double de l'angle* γ, *compté de* $-\frac{\pi}{2}$ *à* $+\frac{\pi}{2}$ *dans le sens direct, que fait la direction* AP *avec la direction* AO. Il serait facile de vérifier que cette relation a lieu dans tous les cas de figure, mais il suffit d'observer que, si elle a été établie dans une partie du cercle, elle subsiste dans tout le cercle, car les deux membres sont des fonctions harmoniques dans ce cercle.

Prenons maintenant le cas général, où $f(\psi)$ a une discontinuité de première espèce en A. L'angle ψ étant compté, comme on vient de le dire.

de $-\pi$ à $+\pi$, à partir du rayon OA′, supposons qu'on ait

$$f(\pi - 0) = l, \qquad f(-\pi + 0) = m (l \neq m).$$

La différence $f(\psi) - \frac{l-m}{2\pi}\psi$ est une fonction continue $f_1(\psi)$ dans le voisinage du point A, qui prend la valeur $\frac{l+m}{2}$ en ce point, et l'intégrale de Poisson (17) est la somme des deux intégrales

$$\frac{l-m}{2\pi} u(a, b), \qquad U_1(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\psi)\frac{R^2 - \rho^2}{r^2} d\psi,$$

qui représentent l'une et l'autre des fonctions harmoniques dans C. Lorsque le point P tend vers le point A, la limite de $U_1(a, b)$ est égale à $\frac{l+m}{2\pi}$, tandis que la limite de $\frac{l-m}{2\pi} u(a, b)$ dépend de la façon dont le point P tend vers le point A, et varie de $-\frac{l-m}{2}$ à $\frac{l-m}{2}$. En particulier, si le point P décrit le rayon OA, la limite de $U(a, b)$ est $\frac{l+m}{2}$. Lorsque le point P se rapproche de A sans que la direction AP ait une limite, il n'y a pas non plus de limite pour $U(a, b)$ [1].

509. **Relations avec la série de Fourier.** — L'intégrale de Poisson est étroitement liée à la théorie des séries trigonométriques. Nous poserons, pour simplifier, $R = 1$, ce qui revient à écrire ρ à la place de $\frac{\rho}{R}$. Une décomposition en fractions simples nous donne

$$\frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos\omega + \rho^2} = -1 + \frac{1}{1 - \rho e^{\omega i}} + \frac{1}{1 - \rho e^{-\omega i}};$$

d'autre part, on a, ρ étant inférieur à 1,

$$\frac{1}{1 - \rho e^{\omega i}} = 1 + \rho e^{\omega i} + \rho^2 e^{2\omega i} + \ldots + \rho^n e^{n\omega i} + \ldots,$$

et une identité analogue obtenue en changeant i en $-i$. On aura donc aussi en les ajoutant

$$\frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos\omega + \rho^2} = 1 + 2\sum_{1}^{+\infty} \rho^n \cos n\omega,$$

---

[1] M. Fatou a étudié l'intégrale de Poisson en faisant sur $f(\psi)$ des hypothèses beaucoup plus générales (*Acta mathematica*, t. XXX, 1907). *Voir* aussi un Mémoire de M. Lichtenstein dans le Tome 141 du *Journal du Crelle*, p. 12.

la série du second membre étant *uniformément convergente* puisqu'on suppose $\rho < 1$. Remplaçons ω par $\psi - \theta$, multiplions par $f(\psi)$ et intégrons entre 0 et 2π; la formule (17) devient

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n \int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n(\psi - \theta)\,d\psi,$$

ou encore

$$(21)\qquad U(a, b) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta),$$

α_n et β_n étant précisément les coefficients de la série de Fourier relative à la fonction continue $f(\psi)$ (I, p. 502). Remarquons que ce développement de $U(a, b)$ est identique à la partie réelle de la série entière en $z = a + ib$

$$F(z) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n - i\beta_n)(a + ib)^n,$$

qui est certainement convergente dans le cercle de rayon un, car les valeurs absolues des coefficients α_n et β_n sont inférieures à la borne supérieure de $|f(\psi)|$ (*cf.* n° 503).

La formule (21) est établie en tous les points intérieurs au cercle de rayon un; si la série de Fourier déduite de $f(\psi)$ est convergente pour une valeur de ψ, l'égalité subsiste pour $\rho = 1$, $\theta = \psi$. En effet, lorsque le point (a, b) se rapproche du point $(\cos\psi, \sin\psi)$ du cercle suivant le rayon, la limite de $U(a, b)$ est $f(\psi)$, tandis que, d'après le théorème d'Abel, la limite du second membre est égale à la somme de la série obtenue en posant $\rho = 1$, $\theta = \psi$.

Mais, sans faire aucune hypothèse sur la convergence de la série de Fourier, la théorie de l'intégrale de Poisson montre qu'on a toujours, *pour une fonction continue quelconque*, l'égalité

$$(22)\qquad f(\psi) = \lim_{\rho=1}\left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n(\alpha_n \cos n\psi + \beta_n \sin n\psi)\right],$$

α_0, α_n, β_n étant les coefficients de la série de Fourier déduite de $f(\psi)$. M. Picard en a déduit une élégante démonstration d'un théorème de Weierstrass (*voir* plus loin, n° 531).

Inversement, on pourrait se proposer de déduire l'intégrale de Poisson de la série de Fourier. Soit $f(\psi)$ une fonction continue de période 2π développable en série de Fourier :

$$(23)\qquad f(\psi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos n\psi + \beta_n \sin n\psi).$$

La série (21) obtenue en prenant pour α_0, α_n, β_n les mêmes valeurs que

dans la série (23), est uniformément convergente dans tout cercle de rayon $\rho < 1$, décrit de l'origine. On peut donc appliquer à cette série les transformations inverses de celles qui ont été effectuées, et remonter de cette série à l'intégrale de Poisson. La fonction ainsi obtenue

$$\mathrm{U}(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{(1-\rho^2)\,d\psi}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\theta)}$$

représente bien une fonction harmonique à l'intérieur de C. Mais, si cette intégrale n'avait pas déjà été étudiée directement, nous ne pourrions affirmer qu'une chose : c'est que la valeur de $\mathrm{U}(a, b)$ tend vers $f(\psi)$, lorsque le point (a, b) tend vers le point $(\cos\psi, \sin\psi)$ *suivant le rayon qui aboutit à ce point*. La première démonstration est donc plus complète et, en outre, elle ne suppose pas que $f(\psi)$ est développable en série de Fourier.

510. Théorème de Harnack. — Le théorème de Harnack est l'analogue du théorème de Weierstrass sur les séries de fonctions holomorphes (II, n° 297). Soient $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$, ..., $u_n(x, y)$, ... une suite de fonctions harmoniques dans un domaine fini D, limité par un contour Γ, pouvant se composer d'une ou plusieurs courbes fermées. *Si la série* $\Sigma u_i(x, y)$ *est uniformément convergente le long de* Γ, *elle est uniformément convergente dans le domaine* D.

Soit U_i la valeur de $u_i(x, y)$ en un point de Γ. D'après la définition de la convergence uniforme, ε étant un nombre positif arbitraire, nous pouvons choisir un nombre entier n tel qu'on ait, en un point quelconque de Γ, quel que soit p,

$$|\mathrm{U}_{n+1}+\mathrm{U}_{n+2}+\ldots+\mathrm{U}_{n+p}| < \varepsilon;$$

cette inégalité sera vérifiée aussi pour la valeur maximum du premier membre lorsqu'on décrit Γ. Par conséquent, (x, y) étant les coordonnées d'un point quelconque intérieur à D, on a donc aussi

$$|u_{n+1}(x, y)+\ldots+u_{n+p}(x, y)| < \varepsilon,$$

ce qui prouve bien la convergence uniforme.

La somme de la série $\mathrm{F}(x, y) = \sum_0^{+\infty} u_i(x, y)$ est une fonction continue dans D, *et sur le contour lui-même*; lorsqu'un point P de D tend vers un point M de Γ, la somme de la série en P tend

vers la somme de la série en M, quelle que soit la façon dont P se rapproche de M. *Cette fonction* $F(x, y)$ *est une fonction harmonique dans* D.

Il suffit évidemment de prouver qu'il en est ainsi à l'intérieur d'un cercle quelconque C contenu dans D. Soient (x, y) les coordonnées d'un point P intérieur à C; nous avons, d'après la formule de Poisson,

$$u_i(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_C U_i \frac{R^2 - \rho^2}{R r^2} ds,$$

R, ρ, r ayant le même sens que plns haut (nº 508), et U_i étant la valeur de u_i en un point de C. On en déduit

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{+\infty} \int_C U_i \frac{R^2 - \rho^2}{R r^2} ds = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\sum_{i=0}^{+\infty} U_i \right) \frac{R^2 - \rho^2}{R r^2} ds,$$

car la série ΣU_i étant uniformément convergente sur C, il en est de même de la série $\frac{1}{r^2} \Sigma U_i$, et l'on peut intervertir les signes $\int$ et Σ. La dernière expression de $F(x, y)$ montre bien que c'est une fonction harmonique dans C. On démontrerait de la même façon que les dérivées partielles de $F(x, y)$ sont les sommes des séries obtenues en différentiant terme à terme la première (*cf.* II, p. 99).

Application. — Soient C, C_1 deux cercles ayant pour centre l'origine, de rayon R et R_1 $(R > R_1)$, et $U(\varphi)$, $V(\varphi)$ deux fonctions continues périodiques de période 2π, satisfaisant aux conditions de Dirichlet. Ces fonctions sont développables en séries de Fourier *uniformément convergentes* (nº 493, p. 133) :

$$U(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

$$V(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Le théorème de Harnack permet de former aisément une fonction harmonique dans la couronne comprise entre les deux cercles C et C_1. et se réduisant à $U(\varphi)$ ou à $V(\varphi)$ respectivement sur ces deux cercles, φ étant l'argument qui correspond à un point sur C ou C_1.

Posons en effet

$$F(r, \varphi) = A_0 + B_0 \log r + \sum_{m=1} [(A_m r_m + B^m r^{-m}) \cos m\varphi + (C_m r^m + C_m r^{-m}) \sin m\varphi],$$

A_m, B_m, C_m, D_m étant des coefficients constants. Tous les termes de cette série sont des fonctions harmoniques dans la couronne considérée, comme il résulte de l'égalité $z^{-m} = r^{-m} \cos(m\varphi - i \sin m\varphi)$. Il suffira donc, d'après le théorème de Harnack, de choisir les coefficients de façon que la série (r, φ) se réduise à $U(\varphi)$ pour $r = R$, et à $V(\varphi)$ pour $r = R_1$. On obtient ainsi les relations

$$A_0 + B_0 \operatorname{Log} R = \frac{a_0}{2}, \quad A_m R^m + B_m R^{-m} = a_m, \quad C_m R^m + D_m R^{-m} = b_m,$$

$$A_0 + B_0 \operatorname{Log} R_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad A_m R_1^m + B_m R_1^{-m} = \alpha_m, \quad C_m R_1^m + D_m R_1^{-m} = \beta_m,$$

qui déterminent ces coefficients.

Lorsque toutes les fonctions harmoniques d'une suite sont POSITIVES dans un domaine connexe D, on a le théorème suivant :

Si la série $\sum u_i(x, y)$, *dont tous les termes sont des fonctions harmoniques positives dans le domaine* D, *converge en* UN *point* O *à l'intérieur de* D, *elle converge en tous les points de* D, *et sa somme est une fonction harmonique.*

Du point O comme centre, décrivons un cercle C de rayon R assez petit pour qu'il soit tout entier à l'intérieur de D, et soit P un point quelconque intérieur à C, à une distance $\rho < R$ du point O. D'après l'inégalité (19) établie plus haut, on a pour toutes les valeurs de l'indice i,

$$(u_i)_P < \frac{R + \rho}{R - \rho} (u_i)_0,$$

ce qui prouve que la série $\Sigma u_i(x, y)$ est convergente au point P. La même inégalité prouve qu'elle est uniformément convergente dans tout cercle C′ de centre O, et de rayon $R' < R$; elle représente donc une fonction harmonique dans ce cercle C. Partons maintenant d'un autre point O_1 intérieur à C et décrivons un nouveau cercle C_1 de centre O_1 intérieur à D; en raisonnant de proche en proche, comme pour le prolongement analytique, au moyen d'une chaîne de cercles (II, Chap. XVI), on voit que la série est convergente en tout point de D et représente une fonction harmo-

nique. Il serait facile d'établir, de cette façon, que la série converge uniformément dans tout domaine intérieur à D, et n'ayant aucun point commun avec la frontière.

511. **Prolongement analytique d'une fonction harmonique.** — Rappelons d'abord la définition d'un arc analytique (I, n° 198). Un arc de courbe AB représenté par les équations $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, où le paramètre t varie de a à b, est *analytique* si les deux fonctions $f(t)$, $\varphi(t)$ sont développables en séries entières ordonnées suivant les puissances de $t - t_0$ dans le voisinage de toute valeur t_0 comprise entre a et b ; il va de soi que les coefficients de ces séries doivent être des nombres réels. Si les deux dérivées $f'(t_0)$, $\varphi'(t_0)$ ne sont pas nulles à la fois, le point M_0 correspondant est un point *ordinaire* ou *régulier*. Si ces deux dérivées sont nulles pour $t = t_0$, M_0 est un point singulier, à moins qu'à un point M de l'arc voisin de M_0 ne correspondent plusieurs valeurs de t voisines de t_0, d'après le choix du paramètre t. Un arc analytique sans point singulier est dit *un arc régulier*.

Soit $u(x, y)$ une fonction des deux variables x, y définie dans un domaine D à l'intérieur duquel est l'arc analytique AB. La valeur de cette fonction en un point de l'arc est une fonction $F(t)$ du paramètre t, qui sera évidemment analytique si la fonction $u(x, y)$ est elle-même analytique dans D, et en particulier si $u(x, y)$ est harmonique. Cela étant, soit $u(x, y)$ une fonction harmonique dans un domaine D, limité par un contour Γ dont une portion est formée par un arc analytique AB. Nous dirons que cette fonction harmonique $u(x, y)$ peut être prolongée au delà de l'arc AB, si l'on peut trouver une fonction $U(x, y)$, harmonique dans un domaine $\mathcal{D}$, renfermant D et l'arc AB, qui soit égale à $u(x, y)$ dans D (*cf.* II, n° 342). Pour que le prolongement soit possible à travers AB, *il est nécessaire*, on vient de le remarquer, *que la suite des valeurs prise par $u(x, y)$ le long de* AB *forme une fonction analytique de t*. M. Schwarz a démontré que la condition est suffisante si l'arc AB est régulier : *Toute fonction harmonique dans un domaine dont la frontière contient un arc analytique régulier* AB *peut être prolongée au delà de cet arc, si la suite des valeurs qu'elle prend sur cet arc forme elle-même une fonction analytique.*

Supposons d'abord que l'arc AB soit un segment de l'axe des x et qu'une fonction $u(x, y)$, harmonique dans un domaine D situé au-dessus de Ox et limité en partie par AB, soit nulle tout le long de ce segment. Soient D' le domaine symétrique de D par rapport à Ox et $v(x, y)$ la fonction qui en tout point $P'(x, -y)$ de D' prend la valeur $-u(x, y)$, symétrique de la valeur que prend $u(x, y)$ au point P symétrique de P'. Il est clair que $v(x, y)$ est harmonique dans D'; la fonction $F(x, y)$, qui est égale à $u(x, y)$ dans D, et à $v(x, y)$ dans D', est continue dans tout le domaine D + D'. Il n'en résulte pas qu'elle soit harmonique dans tout ce domaine, car rien ne permet encore d'affirmer qu'elle admet des dérivées continues en tout point de AB. Pour démontrer ce point essentiel, prenons autour d'un point quelconque de AB un segment $\alpha\beta$ de Ox assez petit pour que le cercle C décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre soit tout entier dans le domaine D + D'; la proposition sera établie, si l'on prouve que $F(x, y)$ est harmonique dans ce cercle. Soient γ, γ' les demi-circonférences situées respectivement au-dessus et au-dessous de $\alpha\beta$.

Considérons la fonction représentée par l'intégrale de Poisson, où R, ρ, r ont le sens habituel (n° 508),

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_C \mu \frac{R^2 - \rho^2}{R r^2} ds,$$

dans laquelle on prend $\mu = u(x, y)$ le long de γ et $\mu = v(x, y)$ le long de γ'. Cette fonction $U(x, y)$ est harmonique dans C; elle est nulle le long de $\alpha\beta$, car les éléments symétriques de l'intégrale se détruisent.

Cette fonction $U(x, y)$ coïncide avec $u(x, y)$ dans le demi-cercle supérieur, et avec $v(x, y)$ dans le demi-cercle inférieur, car elle prend les mêmes valeurs que $u(x, y)$ le long de $\alpha\beta$ et de γ, et les mêmes valeurs que $v(x, y)$ le long de $\alpha\beta$ et de γ'. On a donc $U(x, y) = F(x, y)$ dans tout le cercle C.

Supposons en second lieu que, le long du segment AB de Ox, une fonction $u(x, y)$, harmonique dans le domaine D situé au-dessus de Ox, prenne une suite de valeurs formant une fonction analytique $f(x)$. Cette fonction $f(x)$, étant développable en série entière dans le voisinage de tout point x_0 de AB, est définie par là même dans un domaine R du plan de la variable complexe

$z = x + iy$, renfermant le segment AB (II, p. 241, note). La partie réelle $u_1(x, y)$ de cette fonction $f(z)$ est harmonique dans R et se réduit à $f(x)$ le long de AB. Supposons le domaine D situé dans R; la différence $u(x, y) - u_1(x, y)$ est harmonique dans D et nulle le long de AB: on vient de démontrer qu'elle peut être prolongée au-dessous de AB. Comme la fonction $u_1(x, y)$ peut être prolongée au-dessous de AB, il en est de même de $u(x, y)$.

Prenons enfin le cas où AB est un arc analytique régulier quelconque, et soit $u(x, y)$ une fonction harmonique définie d'un côté de cet arc, et telle que la suite des valeurs qu'elle prend sur AB forme une fonction analytique du paramètre t. Nous allons montrer qu'étant donné un point quelconque M_0 sur AB, on peut prendre autour de M_0 un arc $\alpha\beta$ assez petit pour que la fonction $u(x, y)$ puisse être prolongée à travers $\alpha\beta$. Soient

$$x = a_0 + a_1(t - t_0) + \ldots + a_n(t - t_0)^n + \ldots,$$
$$y = b_0 + b_1(t - t_0) + \ldots + b_n(t - t_0)^n + \ldots$$

les développements de x, y dans le voisinage de la valeur t_0 qui correspond au point M_0. Posons

$$(24) \qquad z = x + iy = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)(Z - t_0) + \ldots + (a_n + ib_n)(Z - t_0)^n + \ldots$$

et soit r un nombre positif assez petit pour que la série (24) soit convergente lorsqu'on a $|Z - t_0| \leqq r$. La relation précédente fait correspondre à tout point du cercle γ de rayon r décrit du point ($X = t_0$, $Y = 0$) comme centre, dans le plan de la variable complexe $Z = X + iY$, un point (x, y) d'un domaine d autour du point M_0 du plan des xy. Les deux coefficients a_1 et b_1 n'étant pas nuls à la fois, $\frac{dz}{dZ}$ n'est pas nul pour $Z = t_0$. L'équation (24) admet donc inversement une racine et une seule $Z = \varphi(z)$ qui tend vers t_0 lorsque z tend vers $z_0 = a_0 + ib_0$, et cette racine $\varphi(z)$ est holomorphe dans le domaine du point z_0. Nous supposerons qu'on a pris le rayon r de γ assez petit pour que $\varphi(z)$ soit holomorphe dans tout le domaine d correspondant. La relation (24) établit alors une correspondance univoque entre les points du cercle γ du plan des XY et le domaine d du plan des xy, avec conservation des angles; à l'arc $\alpha\beta$ de AB situé dans d correspond un segment $\alpha'\beta'$ de l'axe réel dans le plan des XY. La fonction harmonique $u(x, y)$

définie d'un côté de l'arc $\alpha\beta$ se change en une fonction harmonique $U(X, Y)$ des variables X, Y, définie d'un côté du segment $\alpha'\beta'$ de l'axe réel, et il résulte des hypothèses que la suite des valeurs qu'elle prend le long de $\alpha'\beta'$ est une fonction analytique. Cette fonction $U(X, Y)$ peut donc être prolongée de l'autre côté du segment $\alpha'\beta'$, et par suite $u(x, y)$ peut être prolongée à travers l'arc $\alpha\beta$.

Lorsque l'arc AB présente des points singuliers, il peut arriver que le prolongement analytique ne soit pas possible à travers l'arc tout entier. Par exemple, la partie réelle de $\sqrt{x+iy}$, qui est positive à droite de l'origine sur l'axe des x, est harmonique à droite de la parabole semi-cubique $y^2 = x^3$. La suite des valeurs qu'elle prend sur cette courbe est analytique, car si l'on pose $x = t^2$, $y = t^3$, on a $\sqrt{x+iy} = t\sqrt{1+it}$, et cependant l'origine est un point singulier pour cette fonction. Ce point divise la courbe en deux arcs réguliers, la fonction harmonique peut être prolongée à travers chacun d'eux, mais les deux prolongements ne se raccordent pas à gauche de la parabole.

Si une fonction $u(x, y)$ est harmonique à l'intérieur d'un contour C formé d'un certain nombre d'arcs analytiques réguliers, et prend des valeurs analytiques sur le contour, elle peut être prolongée au delà de chacun de ces arcs, et les seuls points singuliers possibles sont les points du contour où se rejoignent deux arcs analytiques réguliers. En particulier, si le contour est formé d'un seul arc analytique régulier, comme un cercle où une ellipse, toute fonction harmonique à l'intérieur, qui prend des valeurs analytiques sur C, peut être prolongée dans un domaine renfermant ce contour (1).

---

(1) Le théorème de Schwarz prouve que le problème de Cauchy se présente tout autrement pour l'équation de Laplace que pour une équation hyperbolique. Soient $u(x, y)$, $v(x, y)$ deux fonctions harmoniques dans un domaine D, à droite de Oy, limité en partie par un segment AB de Oy. Si, le long de AB, ces deux fonctions u et v se réduisent à *une* même fonction de y, $f(y)$, la différence $u - v$ est une fonction harmonique qui peut être prolongée à gauche de Oy, et par conséquent $\dfrac{d(u-v)}{dx}$ est une fonction analytique de y le long du segment AB. Il s'ensuit qu'on ne peut se proposer de trouver une fonction harmonique $u(x, y)$ dans le domaine D, se réduisant pour $x = 0$ à une fonction

II. — PROBLÈME DE DIRICHLET. FONCTION DE GREEN.

512. **Démonstration de Riemann.** — On a démontré plus haut que le problème de Dirichlet ne pouvait admettre plus d'une solution ([1]) et trouvé effectivement cette solution dans le cas où le contour est une circonférence. Nous allons maintenant nous occuper du même problème dans le cas général, et nous reproduirons d'abord la démonstration par laquelle Riemann établit que ce problème, qu'il appelle le *principe de Dirichlet*, admet toujours une solution. Soit D un domaine borné, limité par un contour Γ composé d'une ou plusieurs courbes fermées distinctes. Nous dirons pour abréger qu'une fonction $v(x, y)$, définie dans D et sur le contour Γ, appartient à la classe (A) lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes : 1° elle est continue dans le domaine D, y compris le contour Γ; 2° elle prend sur ce contour des valeurs données, la valeur en chaque point de Γ variant d'une manière continue avec la position de ce point; 3° elle admet des dérivées partielles continues des deux premiers ordres en tout point *intérieur* à D. Nous ne faisons aucune hypothèse sur ces dérivées en un point du contour.

Pour toutes les fonctions de la classe (A), l'intégrale double

$$(25) \qquad I = \int\int_{(D)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy$$

---

donnée $f(y)$ le long de AB, tandis que $\frac{\partial u}{\partial x}$ est égale à une autre fonction donnée de y, $g(y)$, ces deux fonctions $f(y)$ et $g(y)$ étant arbitraires.

Soit en effet $v(x, y)$ une fonction harmonique satisfaisant à la première condition; la différence $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}$ est une fonction analytique de y le long de AB, et par suite la fonction $g(y)$ est définie, à une fonction analytique près, quand on se donne $f(y)$.

([1]) L'impossibilité de deux solutions pour le problème de Dirichlet peut aussi se déduire de la formule (12 *bis*) (n° 506). Cette formule prouve, en effet, que si une fonction U est nulle en tout point d'un contour C et harmonique dans le domaine intérieur à ce contour, on a en tout point de ce domaine $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$. La fonction est donc constante et par suite nulle, puisqu'elle est nulle sur C. Mais cette démonstration suppose que U admet des dérivées continues sur C, ce que n'exige pas la première démonstration.

est évidemment positive, à moins que u ne soit constant dans D et par suite sur Γ. Écartons ce cas où la solution est évidente, et soit $v(x, y)$ une fonction de la classe (A) pour laquelle l'intégrale I est *minimum*. Il est facile de démontrer avec Riemann que *$v(x, y)$ est une fonction harmonique*. Soient, en effet, $\eta(x, y)$ une fonction s'annulant sur Γ et continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres à l'intérieur de D et sur le contour Γ lui-même, et α un paramètre arbitraire. La fonction

$$u = v(x, y) + \alpha\eta(x, y)$$

est de la classe (A), quel que soit α, et la différence

$$\int\int_{D'} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy - \int\int_{D} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

doit être positive. Or cette différence est égale à

$$2\alpha \int\int_{(D)} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) dx\, dy + \alpha^2 \int\int_{D} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

Pour qu'elle soit positive quel que soit α, il faut évidemment que le coefficient de 2α soit nul.

En tenant compte de l'identité

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \eta\,\Delta v = \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

et de la première formule de Green (I, n° 123), ce coefficient s'écrit

$$\int_{(\Gamma)} \eta\left(\frac{\partial v}{\partial x}dy - \frac{\partial v}{\partial y}dx\right) - \int\int_{D} \eta\,\Delta v\, dx\, dy;$$

η étant nul tout le long de Γ, on voit que l'intégrale double

$$\int\int_{D} \eta\,\Delta v\, dx\, dy$$

doit être nulle pour toutes les formes possibles de la fonction $\eta(x, y)$ satisfaisant aux conditions énoncées. Or cela ne peut avoir lieu que si l'on a $\Delta v = 0$ en tous les points de D. Supposons en effet qu'on ait $\Delta v > 0$ par exemple en un point x_0, y_0 intérieur à D. De ce point comme centre décrivons un cercle C de rayon ρ assez petit pour qu'il soit tout entier à l'intérieur de D, et qu'on ait $\Delta v > 0$ en tout point de C. Si l'on prend $\eta(x, y) = 0$ à l'extérieur

de ce cercle, et

$$\eta(x, y) = [\rho^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2]^m,$$

à l'intérieur de C, cette fonction est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre si $m > 2$, et elle s'annule sur Γ. Il est clair que l'intégrale double correspondante $\int\int \eta \, \Delta v \, dx \, dy$, étendue à D, aurait une valeur positive. La fonction $v(x, y)$ est donc harmonique dans le domaine D.

La fin du raisonnement est inattaquable, mais il repose sur deux postulats, qui paraissaient évidents à Riemann, et dont une critique plus rigoureuse a démontré la fausseté. D'une part, on admet qu'il existe des fonctions de la classe (A) pour lesquelles l'intégrale double I a une valeur finie; d'autre part, on admet aussi qu'il existe au moins une de ces fonctions pour laquelle l'intégrale I atteint effectivement sa borne inférieure. M. Weierstrass [1] a montré d'abord que ce dernier point ne pouvait être admis sans démonstration. Plus récemment, M. Hadamard a fait connaître un exemple simple dans lequel il n'existe aucune fonction de la classe (A) pour laquelle l'intégrale double I ait une valeur finie [2].

La méthode de Riemann ne fournit donc pas de démonstration rigoureuse du principe de Dirichlet, mais elle nous offre un exemple d'un mode de démonstration souvent employé en Physique mathématique, et qui rend tout au moins vraisemblable le résultat qu'on veut établir.

Remarque. — On a déjà expliqué ce qu'il fallait entendre quand on dit qu'une fonction harmonique dans un domaine D prend une valeur donnée en un point du contour. Si l'on n'a pas égard à la signification précise de l'énoncé, il peut sembler que le problème de Dirichlet admet dans certains cas plusieurs solutions. Par exemple, la fonction $u = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2}$ s'annule en tout point du cercle C qui a pour équation $x^2 + y^2 - 2x = 0$, et elle est harmonique dans ce cercle, car c'est la partie réelle de $1 - \dfrac{2}{z}$; en ajoutant Ku à une autre fonction harmonique dans C, il semble qu'on aura une

---

(1) Weierstrass, *Mathematische Werke*, t. II, p. 49.

(2) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXIV, p. 135. Dans cet exemple, le contour Γ est un cercle, et par conséquent le problème de Dirichlet admet bien une solution (voir *Exercice* 5).

infinité de fonctions harmoniques dans C, prenant les mêmes valeurs sur le contour. Pour expliquer ce paradoxe, il suffit d'observer que la valeur de $u(x, y)$ en un point P intérieur au cercle C et voisin de l'origine ne tend vers aucune limite lorsque ce point P tend vers l'origine. Il est donc inexact de dire que la fonction $u(x, y)$ est nulle à l'origine.

513. **Méthode de C. Neumann.** — On doit à M. C. Neumann [1] une méthode célèbre pour résoudre le problème de Dirichlet dans le cas d'un contour *convexe*, ne présentant qu'un nombre fini de points anguleux. Nous allons exposer, avec quelques modifications de détail, cette méthode qui est fondée sur les propriétés du potentiel de double couche. Pour fixer la position d'un point M sur le contour fermé C, nous prendrons pour paramètre variable la longueur s de l'arc AM compté à partir d'une origine arbitraire A. Toute fonction qui a une valeur déterminée en chaque point du contour est alors une fonction $f(s)$ de période l, si l est la longueur du contour fermé. C'est uniquement afin de préciser les notations que nous adoptons cette convention; les résultats eux-mêmes sont absolument indépendants du choix du paramètre. Soit $\mu(s)$ une fonction continue sur C; nous avons démontré (n° 505) que le potentiel de double couche

$$\text{(26)}\qquad W = \int_{(C)} \mu \frac{\cos\varphi}{r}\, ds$$

est une fonction harmonique dans C, qui en un point de ce contour, d'abscisse curviligne x, prend la valeur

$$\text{(27)}\qquad w(x) = 2\pi\mu(x) + \int_C [\mu(s) - \mu(x)] \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds.$$

où $\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x$ est mis pour $\frac{\cos\varphi_x}{r_x}$, r_x étant la distance du point x au point variable s, et φ_x l'angle de la direction sx avec la normale intérieure au contour en s. Cette formule (27) est générale et s'applique aussi aux points anguleux du contour.

Cela étant, soit $f(s)$ une fonction continue donnée de période l. Pour résoudre le problème de Dirichlet, nous chercherons avec

---

[1] *Untersuchungen über das logarithmische und Newtonische Potential* (Leipzig, 1877).

Neumann une fonction auxiliaire $\mu(s)$, continue et de période l, telle que le potentiel de double couche W, représenté par la formule (26) à l'intérieur de C, prenne précisément la valeur $f(x)$ en chaque point de C. Il faut et il suffit pour cela que cette fonction $\mu(s)$ vérifie la relation fonctionnelle

$$(28) \qquad 2\pi\mu(x) + \int_C [\mu(s) - \mu(x)] \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds = f(x);$$

nous allons résoudre cette *équation intégrale* par une méthode d'approximations successives qui sera rattachée plus tard à une théorie générale. Pour cela, écrivons cette équation en introduisant un paramètre λ, qu'on fera ensuite égal à l'unité (*cf.* n° 494),

$$(29) \qquad \mu(x) = \frac{1}{2\pi} f(x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_C [\mu(x) - \mu(s)] \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds,$$

et cherchons un développement de la forme

$$(30) \qquad \mu(x) = \frac{1}{2\pi} [\mu_0(x) + \lambda\mu_1(x) + \ldots + \lambda^n \mu_n(x) + \ldots]$$

satisfaisant *formellement* à l'équation (29). On trouve ainsi successivement

$$\mu_0(x) = f(x), \qquad \mu_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_C [\mu_0(x) - \mu_0(s)] \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds,$$

et, d'une façon générale,

$$(31) \qquad \mu_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_C [\mu_{n-1}(x) - \mu_{n-1}(s)] \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds.$$

Il est clair que toutes ces fonctions $\mu_i(x)$ admettent la période l; si elles sont *continues*, et si la série (30), où l'on fait $\lambda = 1$, est *uniformément convergente*, la somme $\mu(x)$ est une fonction continue qui satisfait bien à la relation (28). On le vérifie immédiatement en intégrant terme à terme la série qui donne le développement de $\mu(s) - \mu(x)$ et en tenant compte des relations (31). Il suffira de remplacer $\mu(s)$ par la fonction ainsi déterminée dans la formule (26) pour avoir la solution du problème de Dirichlet.

Nous allons maintenant examiner les points qu'il reste à établir pour que cette solution ne soit pas purement formelle. En premier lieu, *les fonctions $\mu_i(x)$ sont continues*. D'une façon générale, si $f(x)$

est continue, il en est de même de la fonction

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_C [f(s) - f(x)]\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds;$$

en effet, x_0 étant une valeur quelconque de x, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} f_1(x) = {} & \frac{1}{2\pi}\int_C [f(s) - f(x_0)]\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds \\ & + \frac{1}{2\pi}[f(x_0) - f(x)]\int_C \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x ds. \end{aligned}$$

Le raisonnement de la page 178 s'applique ici sans modification et prouve que la première intégrale est une fonction continue de x pour $x = x_0$, et il en est évidemment de même de la seconde partie. On voit ainsi, de proche en proche, que toutes les fonctions μ_1, μ_2, ... sont continues.

Pour prouver la convergence uniforme, nous allons d'abord établir deux lemmes relatifs aux contours fermés convexes.

Lemme I. — Soient P_1, P_2 deux points quelconques de C, et C' une portion quelconque de C, pouvant se composer de plusieurs arcs distincts. Il est à peu près évident, d'après sa signification géométrique, que l'intégrale définie

$$I = \int_{C'}\left[\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1} - \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2}\right] ds = \int_{C'}\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1} ds - \int_{C'}\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2} ds$$

est moindre que π en valeur absolue. Pour qu'elle fût égale à π, par exemple, il faudrait que la première intégrale fût égale à π, et la seconde nulle. Or la première intégrale ne peut être égale à π que si C' se confond avec le contour C, ou si C' se compose d'un arc AB joignant deux points A et B, le point P_1 étant sur le segment de droite AB; dans les deux cas, la seconde intégrale ne peut être nulle, à moins que C ne soit le contour d'un triangle. La valeur absolue de I reste donc inférieure à un maximum $h\pi$, h étant un nombre positif *inférieur à l'unité*, qui ne dépend que du contour C[1], et nullement de C'.

Lemme II. — Soit $f(s)$ une fonction positive ou nulle en chaque

---

(1) Cette conclusion ne peut passer pour absolument rigoureuse; mais il est clair qu'elle est exacte pour les contours convexes tels que ceux que l'on considère habituellement.

point de C et J l'intégrale

$$J = \int_C f(s)\left[\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1} - \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2}\right] ds.$$

Partageons C en deux parties C_1 et C_2, telles qu'on ait

$$\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1} \geqq \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2}$$

sur C_1 et

$$\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1} < \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2}$$

sur C_2, et soient J_1 et J_2 les intégrales étendues à C_1 et C_2 respectivement. On a $J = J_1 + J_2$, et, par suite, $|J|$ est inférieur au plus grand des deux nombres J_1 et $|J_2|$. Soit L une limite supérieure de $f(s)$; d'après le lemme précédent, chacun de ces deux nombres est inférieur à $L \times h\pi$. On a donc aussi $|J| < \pi h L$, quels que soient les points P_1 et P_2.

Cela posé, soient M et m le maximum et le minimum de $f(s)$ sur C; P_1 et P_2 étant deux points du contour, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\mu_1(x_1) - \mu_1(x_2) = {} & \frac{1}{2\pi}\left[\mu_0(x_1)\int_C \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1} ds - \mu_0(x_2)\int_C \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2} ds\right] \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_C [\mu_0(s) - m]\left[\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2} - \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1}\right] ds \\ & + \frac{m}{2\pi}\int_C \left[\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_2} - \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_{x_1}\right] ds.\end{aligned}$$

Si les points P_1 et P_2 ne sont pas des points anguleux, la dernière intégrale est nulle, et la valeur absolue du premier terme

$$\frac{1}{2}[\mu_0(x_1) - \mu_0(x_2)]$$

est inférieure à $\frac{M-m}{2}$. D'autre part, $\mu_0(s) - m$ reste compris entre o et $M - m$, et par suite, d'après le lemme II, la valeur absolue du premier terme de la seconde ligne est inférieure à $\frac{M-m}{2}h$. Par conséquent, la valeur absolue de $\mu_1(x_1) - \mu_1(x_2)$ est inférieure à $(M - m)\left(\frac{1+h}{2}\right) = (M - m)\rho$, *$\rho$ étant un nombre positif inférieur à un*. La fonction $\mu_1(x)$ étant continue, cette inégalité

a lieu quels que soient les points P_1 et P_2. Par conséquent, en appelant M_1 et m_1 le maximum et le minimum de $\mu_1(x)$, on a l'inégalité fondamentale

(32) $$M_1 - m_1 < (M - m)\rho.$$

On en déduit, de proche en proche, qu'on a, en général,

$$M_i - m_i < (M - m)\rho^i,$$

M_i et m_i étant le maximum et le minimum de la fonction μ_i. La valeur absolue de $\mu_{i-1}(x) - \mu_{i-1}(s)$ restant inférieure ou au plus égale à $M_i - m_i$, on a donc *a fortiori*, d'après la formule (31),

$$|\mu_n(x)| < \frac{1}{2}(M - m)\rho^{n-1},$$

et, par conséquent, la série (30) est uniformément convergente pour $\lambda = 1$. La somme $\mu(x)$ de cette série est une fonction continue qui satisfait à l'équation fonctionnelle (28), et en remplaçant μ par cette fonction dans la formule (26) on a la solution du problème de Dirichlet pour le contour convexe C.

Exemple. — Supposons que C soit une circonférence de rayon R : on a dans ce cas $\left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)_x = \frac{1}{2R}$, quel que soit le point x du contour. On a donc immédiatement, en prenant $\mu_0 = f(x)$,

$$\mu_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) - K], \qquad \text{où} \qquad K = \frac{1}{2\pi R}\int_C f(s)\,ds,$$

et la relation de récurrence (31) donne ensuite, quel que soit n,

$$\mu_n(x) = \frac{1}{2^n}[f(x) - K].$$

On a donc $\mu(x) = \frac{1}{\pi}f(x) - \frac{1}{4\pi^2 R}\int_C f(s)\,ds$, et en remplaçant μ par cette expression dans la formule (26), on retrouve l'intégrale de Poisson (16), où l'on aurait écrit U_M à la place de $f(s)$. D'ailleurs, dans ce cas particulier, l'équation (28) est facile à résoudre directement. On voit, en effet, que $\mu(x)$ est de la forme $\frac{f(x) + H}{\pi}$, H étant une constante qu'on détermine en remplaçant $\mu(x)$ par cette expression dans l'équation (28).

La méthode de Neumann et la méthode analogue dans l'espace pour les surfaces convexes ont été étendues à des cas plus géné-

raux par différents géomètres (¹). L'extension la plus importante résulte des travaux de Fredholm et sera exposée plus tard.

On doit à M. Poincaré une méthode absolument générale, dite *méthode du balayage* (²), pour résoudre le problème de Dirichlet dans l'espace. M. Paraf (³) a montré que cette méthode s'applique aussi, moyennant quelques modifications, au problème de Dirichlet dans le plan. Le principe de la méthode de M. Schwarz sera indiqué plus loin.

514. Généralisation du problème. — Il y a intérêt, pour certaines recherches, à étudier un problème un peu plus général que celui de Dirichlet. Soit D un domaine limité par un contour fermé C que nous supposerons formé d'une seule courbe. A chaque point M de C faisons correspondre un nombre U_M variant en général d'une manière continue avec la position du point M, sauf en un nombre fini de points de discontinuité de première espèce (I, n° 9), et proposons-nous de trouver *une fonction $u(x, y)$ harmonique dans* D, *et prenant la valeur* U_M *en tout point du contour* C *où* U *est continue.*

On ne fait *a priori* aucune hypothèse sur la nature de la fonction cherchée $u(x, y)$ dans le voisinage d'un point de discontinuité de U sur le contour; il n'y a donc pas lieu de parler de la valeur de $u(x, y)$ en un de ces points. *Si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour le contour* C, *on peut toujours trouver* UNE *solution du problème généralisé.*

Soit $A_i(\alpha_i, \beta_i)$ un point de discontinuité de U sur C; lorsque M tend vers ce point A_i, U_M tend vers deux limites différentes a_i, b_i, suivant que le point M décrit C dans le sens direct ou dans le sens inverse. Cela posé, la fonction suivante, où l'on a choisi pour arc tang une détermination particulière quelconque,

$$W_i(x, y) = \frac{a_i - b_i}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{y - \beta_i}{x - \alpha_i},$$

est une fonction harmonique dans D, et la valeur $(W_i)_M$ qu'elle prend en un point M du contour varie d'une manière continue avec la position du

(¹) POINCARÉ, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta mathematica*, t. XX). Ce Mémoire est fondamental dans cette théorie. On trouvera dans un article récent de M. Bouligand sur les *Fonctions harmoniques* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fascicule XI, 1926) une bibliographie complète des derniers travaux sur ce problème; le théorème de la moyenne joue un rôle essentiel dans quelques-uns de ces Mémoires.

(²) *American Journal of Mathematics*, t. XII.

(³) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VI, 1892.

point M, sauf au point A_i où elle présente la même discontinuité que la fonction donnée U. Ceci suppose toutefois que ce point A_i n'est pas un point anguleux du contour; si ce point était le point de rencontre de deux arcs se coupant sous un angle ω, on devrait remplacer π par ω dans le dénominateur de la formule précédente. Opérons de même avec tous les points de discontinuité $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de U. La différence

$$W_M = U_M - \sum_{i=1}^{n} (W_i)_M$$

varie d'une manière continue avec la position du point M sur C, même aux points où U est discontinue. Soit $v(x, y)$ la fonction harmonique dans D qui prend la valeur W_M en chaque point M de C; la fonction

$$u(x, y) = v(x, y) + \sum_{i=1}^{n} W_i(x, y) \tag{33}$$

est une fonction harmonique dans D, et, d'après la façon dont elle a été obtenue, elle prend bien la valeur U_M en tout point du contour C qui n'est pas un point de discontinuité pour U. C'est donc une solution du problème généralisé, et la recherche de cette solution est ramenée à la recherche de $v(x, y)$, c'est-à-dire au problème de Dirichlet.

La formule (33) met en évidence l'allure de $u(x, y)$ dans le voisinage d'un des points de discontinuité de U sur le contour; elle est la somme d'une fonction qui tend vers une limite déterminée, et d'une expression de la forme K arc tang $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, qui n'a pas de valeur déterminée au point (α, β). Remarquons seulement que cette fonction est *bornée* dans D. Nous ne pouvons pas affirmer que $u(x, y)$ est la seule solution du problème généralisé, mais elle est la seule qui reste bornée dans tout le domaine D. Nous le déduirons d'une élégante proposition due à M. Zaremba (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1909).

Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique à l'intérieur d'un domaine D limité par une courbe C, et prenant la valeur zéro en chaque point de C, sauf en un nombre limité de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pour lesquels on sait seulement que le rapport $\frac{u(x, y)}{\log r_i}$ tend vers zéro en même temps que la distance r_i du point A_i à un point quelconque (x, y) de D. Cette fonction $u(x, y)$ est nulle dans tout le domaine D.

En effet, soient ε un nombre positif arbitraire et H un nombre supérieur à la distance de deux points quelconques du domaine D. Il est clair que la fonction auxiliaire

$$v(x, y) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{H}{r_i}\right)$$

est une fonction harmonique dans D, qui est positive dans ce domaine et sur le contour C, où elle est continue sauf aux points A_i. De chacun des points A_i comme centre décrivons un cercle de rayon très petit ρ, et soit σ_i l'arc de cercle intérieur à D. Si du domaine D on retranche les portions comprises dans ces petits cercles, on obtient un domaine D_ρ limité par des portions du contour primitif et les arcs σ_i. D'après l'hypothèse sur $u(x, y)$, on peut choisir le nombre ρ assez petit pour que les deux expressions

$$v(x, y) + u(x, y), \quad v(x, y) - u(x, y),$$

soient positives sur les arcs σ_i. En effet, chacune de ces expressions est la somme d'une partie régulière dans le domaine du point A_i et d'un terme de la forme $(\eta_i - \varepsilon) \log r_i$, η_i étant infiniment petit avec ρ. Le nombre ρ ayant été choisi de cette façon, les deux fonctions $v(x, y) + u(x, y)$, $v(x, y) - u(x, y)$ sont harmoniques dans D_ρ et positives sur le contour de ce domaine. On a donc, en tout point de ce domaine, $|u(x, y)| < v(x, y)$. Étant donné un point quelconque M dans D, on peut toujours choisir le rayon ρ assez petit pour que ce point M soit aussi dans D_ρ, et par suite l'inégalité précédente est établie pour tout point de D. On peut évidemment choisir le nombre positif arbitraire ε de façon qu'en un point déterminé $v(x, y)$ soit inférieur à un nombre donné à l'avance. L'inégalité ne peut donc subsister quel que soit ε que si l'on a $u(x, y) = 0$.

Il est clair que la conclusion s'applique en particulier si la fonction harmonique $u(x, y)$, satisfaisant aux autres conditions de l'énoncé, reste bornée dans D. Cela étant, si le problème de Dirichlet généralisé admettait deux solutions bornées dans D, leur différence serait une fonction harmonique bornée dans D, et prenant la valeur zéro sur le contour, sauf en un nombre limité de points; cette différence, nous venons de le voir, doit être identiquement nulle.

Remarque I. — Si l'on n'impose pas à la fonction harmonique la condition de rester bornée à l'intérieur de D, le problème généralisé peut admettre une infinité de solutions. Supposons par exemple que C soit le cercle $x^2 + y^2 - 2x = 0$, et que l'origine soit le seul point de discontinuité pour U sur ce contour. En ajoutant à la solution $u(x, y)$ du problème généralisé, qui reste bornée à l'intérieur de C, l'expression $K \dfrac{x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2}$, où K désigne une constante arbitraire, on obtient une infinité de solutions du même problème, mais ces solutions ne sont pas bornées dans le domaine (*cf.* n° 512, *Remarque*).

Remarque II. — Soient L et l le maximum et le minimum de la fonction discontinue U sur C: la fonction harmonique $u(x, y)$ représentée par la formule (33) reste comprise entre L et l dans le domaine D. Pour

démontrer, par exemple, que $u(x, y)$ ne prend aucune valeur supérieure à L, il suffit de remplacer $v(x, y)$ par $L + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{H}{r_i}\right)$ dans le raisonnement de M. Zaremba. La fonction harmonique $v(x, y) - u(x, y)$ étant positive sur le contour du domaine D_ρ, pourvu que ρ soit assez petit, est positive en tout point du domaine D, et, comme ε est un nombre positif arbitraire, ceci ne pourrait avoir lieu si $u(x, y)$ était supérieur à L. On voit de même que $u(x, y)$ ne peut prendre de valeur inférieure à l en un point de D; $u(x, y)$ ne peut prendre les valeurs L et l, car cette fonction aurait alors un maximum ou un minimum dans D (*cf.* n° 503).

Dans le voisinage d'un point de discontinuité A de la fonction U sur le contour C, nous avons déjà observé que $u(x, y)$ est de la forme

$$u(x, y) = V(x, y) + K \operatorname{arc\,tang} \frac{y - \beta}{x - \alpha},$$

$V(x, y)$ tendant vers une limite déterminée lorsque le point (x, y) tend vers A. Si le point (x, y) tend vers le point A suivant une courbe, *dont la tangente en* A *n'est pas tangente au contour* C, la valeur limite de arc tang est comprise entre les valeurs du même arc pour les deux directions des tangentes au contour C issues de A, et par suite la valeur limite de $u(x, y)$ est comprise entre les deux valeurs limites a et b de la fonction U_M lorsque le point M tend vers A sur le contour C.

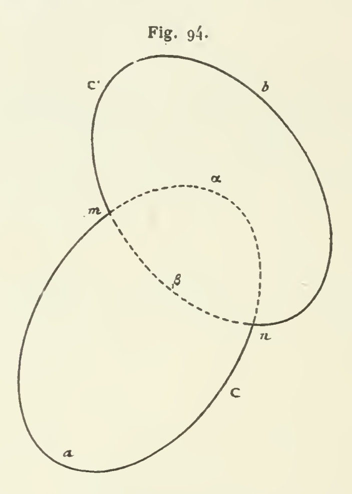
515. **Méthode alternée de Schwarz.** — On doit à M. Schwarz un procédé alterné, applicable à beaucoup d'autres problèmes, permettant de passer d'un contour convexe à d'autres contours beaucoup moins particuliers. Ce procédé repose sur un lemme que nous allons d'abord établir.

Soit C un contour convexe ou, plus généralement, un contour fermé pour lequel on sait résoudre le problème de Dirichlet, et soit mn un arc situé dans le domaine D limité par C, et joignant deux points m et n de ce contour sans être tangent au contour en aucun de ces points. Les points m et n divisent C en deux parties C_0 et C_1; appelons $u(x, y)$ la fonction harmonique et bornée dans D, considérée au numéro précédent, qui prend la valeur *zéro* sur C_0 et la valeur *un* sur C_1. Cette fonction est positive et inférieure à l'unité en tout point P de l'arc mn, et si le point P tend vers l'un des points m ou n, on a fait observer que u_P tend vers une limite comprise entre zéro et un. La fonction $u(x, y)$ reste donc inférieure, tout le long de mn, à un nombre positif q *inférieur à l'unité*. Soit, d'autre part, $v(x, y)$ une fonction harmonique dans D, prenant la valeur zéro sur C_0, et dont la valeur absolue reste plus petite qu'un nombre positif g le long de C_1; nous supposerons, pour fixer les idées, que $v(x, y)$ prend une valeur déterminée en chaque point du contour, et que cette valeur varie d'une manière continue. Les deux fonctions $gu + v$, $gu - v$ sont harmoniques et bornées dans le domaine D, nulles sur C_0 et positives

sur C_1; elles sont donc positives en tout point de D, et la valeur absolue de $v(x, y)$ est inférieure à gu. En particulier, le long de l'arc mn, la valeur absolue de $v(x, y)$ est inférieure à gq; il est à peine besoin d'observer que le nombre q, qui a été défini tout à l'heure, ne dépend que du contour C et de l'arc mn, et nullement de la fonction $v(x, y)$. Il est clair que la propriété subsiste si C_0 et C_1 se composent de plusieurs arcs distincts; on peut aussi remplacer l'arc mn par un système de plusieurs arcs intérieurs à D et joignant des points de C_0 ou des points de séparation de C_0 et C_1. Le raisonnement qui précède s'applique sans modification.

Pour exposer la méthode de Schwarz, plaçons-nous maintenant dans le cas le plus simple, celui d'un domaine $\mathcal{D}$ résultant de la superposition de deux domaines D, D′, limités par deux contours fermés C, C′, qui se coupent en deux points seulement m et n (*fig.* 94) sans être tangents. On

Fig. 94.



suppose que C et C′ sont des contours convexes ou, plus généralement, qu'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour chacun des domaines D et D′. Les deux points m et n divisent C et C′ en deux arcs distincts (a, α) et (b, β). A l'arc α correspond un nombre positif inférieur à l'unité relativement au contour C′, et de même à l'arc β correspond un nombre positif inférieur à un relativement au contour C, nous désignerons par q le plus grand de ces deux nombres.

On suppose donnée une succession continue de valeurs sur (a, b), c'est-à-dire sur l'ensemble des deux arcs a et b. Formons une fonction u_1, harmonique dans D, prenant sur a les valeurs données et sur α une succession

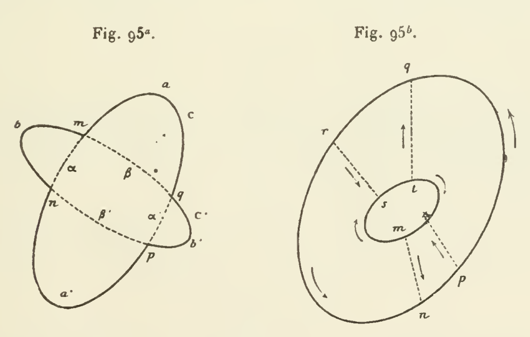
continue de valeurs uniquement assujettie à la condition de prendre en m et n les mêmes valeurs que la première. Cette fonction u_1, prend certaines valeurs sur l'arc β. Formons ensuite une fonction v_1, harmonique dans D', prenant les mêmes valeurs que u_1 sur β et les valeurs données sur b; puis une fonction u_2, harmonique dans D, prenant les valeurs données sur a, et les mêmes valeurs que v_1 sur α, et ainsi de suite alternativement. Nous obtenons ainsi deux suites indéfinies de fonctions $(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ et $(v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$, Les fonctions u_i sont harmoniques dans D, et prennent les valeurs données sur a; les fonctions v_i prennent les valeurs données sur b et sont harmoniques dans D'. De plus u_n et v_n prennent les mêmes valeurs sur β, tandis que u_n et v_{n-1} prennent les mêmes valeurs sur α. Nous allons montrer que, *dans les domaines* D *et* D' *respectivement, les fonctions u_n et v_n tendent vers une limite lorsque n croît indéfiniment.*

Soit g une limite supérieure de $|u_2 - u_1|$ sur β; $v_2 - v_1$ est nul sur b et égal à $u_2 - u_1$ sur β; la valeur absolue de $v_2 - v_1$ est donc inférieure à gq sur α. La fonction $u_3 - u_2$ est nulle sur a et égale à $v_2 - v_1$ sur α; on a donc aussi $|u_3 - u_2| < q_2 g$ sur β. En continuant ainsi, on voit de proche en proche qu'on a $|u_{n+1} - u_n| < q^{2n-1} g$ sur β, et $|v_{n+1} - v_n| < q^{2n-1} g$ sur α. La série

$$u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) + \ldots$$

est donc uniformément convergente sur le contour $(a\alpha)$ et par suite uniformément convergente dans le domaine D, d'après le théorème de Harnack. La somme de cette série $U(x, y) = \lim u_n(x, y)$ est une fonction harmonique dans D, qui prend les valeurs données sur a. On voit de même que v_n a pour limite une fonction $V(x, y)$ harmonique dans D', qui prend

Fig. 95[a]. Fig. 95[b].



les valeurs données sur b. Ces deux fonctions U et V prennent les mêmes valeurs sur α et sur β, puisqu'on a $u_n = v_n$ sur β, et $u_n = v_{n-1}$ sur α; elles coïncident donc dans le domaine limité par les arcs α et β. Par suite, la

fonction $F(x, y)$, qui est égale à U dans D et à V dans D' est harmonique dans tout le domaine $\mathcal{D}$ et donne la solution du problème de Dirichlet pour ce domaine.

La méthode s'étend d'elle-même à des cas beaucoup moins simples, où les contours C, C' se coupent en plus de deux points, ou même ont certaines parties communes. Dans le cas de la figure 95[a], les contours C, C' ont quatre points communs m, n, p, q ; on a marqué sur la figure les arcs qui doivent remplacer les arcs a, b, α, β dans le raisonnement. Dans le cas de la figure 95[b], les contours C et C' sont les contours *mnpqrstzm* et *mstqrnpzm* qui ont certaines parties communes. En remplaçant dans le raisonnement a par arcs *npqr* et *mzts*, α par *mn* et *rs*, b par *qrnp* et *tsmz*, β par *tq* et *zp*, on voit que, si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour les domaines limités par C et C', on pourra le résoudre pour le domaine limité par les deux contours *mztsm* et *mpqrn*.

Le dernier exemple montre comment on peut passer d'un domaine limité par un seul contour à un domaine limité par plusieurs contours.

Application. — De la solution du problème de Dirichlet, M. Lebesgue (¹) a déduit une démonstration très simple du premier théorème de M. Picard établi plus haut (p. 172). Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique *bornée* et régulière en tout point d'un domaine D, sauf peut-être en un point A de ce domaine. Du point A comme centre, décrivons deux cercles C et c de rayons R et ρ respectivement ($\rho < R$), situés dans le domaine D. Soit $v(x, y)$ la fonction harmonique régulière à l'intérieur de C qui est égale à $u(x, y)$ le long de C; la méthode de M. Lebesgue consiste à montrer qu'en tout point (x, y) intérieur à C, distinct du point A, on a $u = v$.

Si M est une limite supérieure de la valeur absolue de $u(x, y)$ dans le domaine D, la valeur absolue de $u(x, y)$ le long de C, et par suite à l'intérieur de C, est aussi inférieure à M. Soient $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ deux fonctions harmoniques régulières dans la couronne comprise entre C et c, égales à $u(x, y)$ le long de C et égales à $+M$ et à $-M$ respectivement le long de c. La différence $u_1 - u$ est positive sur c, nulle sur C, et, comme elle ne peut avoir de minimum entre C et c, on a dans ce domaine $u_1 - u > 0$. On demanderait de même les inégalités.

$$u - u_2 > 0, \qquad u_1 - v > 0, \qquad v - u_2 > 0.$$

On a donc dans la couronne circulaire considérée

$$|u - v| < u_1 - u_2.$$

La fonction harmonique $u_1 - u_2$, qui est égale à $2M$ sur c et nulle sur C,

(¹) *Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 1097.

est donc identique à

$$2M\frac{\log R - \log r}{\log R - \log \rho},$$

r étant la distance du point (x, y) au point A. Étant donné un point quelconque (x, y) intérieur à C, et différent du centre, on peut choisir le nombre $\rho < r$ assez petit pour que l'expression précédente soit inférieure à un nombre positif ε choisi arbitrairement. On a donc bien en tout point de ce domaine $u(x, y) = v(x, y)$.

La démonstration s'étend aux fonctions harmoniques dans l'espace en remplaçant $\log r$ par $\frac{1}{r}$.

516. Problème extérieur. — Nous n'avons étudié jusqu'ici les fonctions harmoniques que dans un domaine borné. Considérons maintenant un domaine $\mathcal{D}$ formé de la portion du plan extérieure à un contour fermé Γ, et soit $u(x, y)$ une intégrale de l'équation $\Delta u = 0$, régulière en tout point (a, b) de $\mathcal{D}$. Pour étudier cette fonction lorsque x et y augmentent indéfiniment, il suffit de faire une transformation par rayons vecteurs réciproques, par exemple de poser $x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}$, $y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}$. A la portion du plan des xy, extérieure à un cercle C de rayon R, situé dans $\mathcal{D}$, ayant pour centre l'origine, correspond sur le plan $x'y'$ un cercle c de rayon $\frac{1}{R}$. La fonction $u(x, y)$ se change en une fonction

$$u'(x', y') = u\left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \frac{y'}{x'^2 + y'^2}\right)$$

qui est aussi une intégrale de l'équation de Laplace (n° 503), et qui est régulière en tout point de c, sauf peut-être à l'origine. Si cette fonction $u'(x' y')$ est aussi régulière à l'origine, elle est harmonique dans c, et nous dirons que la fonction $u(x, y)$ est *régulière à l'infini*. A l'intérieur de c la fonction $u'(x', y')$ peut être développée en série de la forme

$$(34) \qquad u' = \sum_{m=0}^{+\infty} v_m(x', y'),$$

$v_m(x', y')$ étant un polynome harmonique homogène de degré m (n° 503). En effectuant la transformation inverse, on en déduit que,

à l'extérieur de C, la fonction $u(x, y)$ est développable en série de la forme

$$(35) \qquad u(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{v_m(x, y)}{(x^2 + y^2)^m};$$

inversement cette forme de développement caractérise une fonction harmonique régulière à l'infini, car on remonte immédiatement de la série (35) à la série (34).

On s'est proposé, pour le domaine $\mathcal{D}$ formé de la portion du plan extérieure à un contour fermé Γ, un problème analogue à celui de Dirichlet :

Trouver une fonction harmonique dans le domaine $\mathcal{D}$ extérieur au contour Γ, *régulière à l'infini, prenant sur* Γ *une suite continue de valeurs données.*

C'est ce qu'on appelle le *problème extérieur* relatif au contour Γ; par opposition, le problème dont nous nous sommes occupés jusqu'ici s'appelle le *problème intérieur*. Le problème extérieur relatif à un contour fermé Γ se ramène au problème intérieur pour un *autre* contour Γ'. En effet, soit O un point intérieur au contour Γ; une transformation par rayons vecteurs réciproques avec le point O pour pôle remplace Γ par un contour Γ', et le domaine $\mathcal{D}$ extérieur à Γ par un domaine $\mathcal{D}'$ intérieur à Γ'. D'autre part, toute fonction harmonique $u(x, y)$ dans $\mathcal{D}$, régulière à l'infini, se change en une fonction $u(x' y')$ harmonique dans $\mathcal{D}'$. La suite des valeurs de $u(x, y)$ le long de Γ étant donnée, on connaît par là même la suite des valeurs de u' le long de Γ'. Si l'on sait résoudre le problème intérieur pour le contour Γ', on en déduira donc la solution du problème extérieur pour le contour Γ.

Remarque. — Étant données deux fonctions U et V, harmoniques à l'extérieur d'un contour Γ, et régulières à l'infini, on peut leur étendre la formule générale (11). En effet, considérons une circonférence auxiliaire C, ayant pour centre un point fixe O, et renfermant tout le contour Γ à l'intérieur. Les deux fonctions U et V étant harmoniques dans le domaine limité par les courbes C et Γ, on peut appliquer la formule (11) à l'ensemble de ces deux courbes. Lorsque le rayon R et C croît indéfiniment, l'intégrale provenant de C tend vers zéro; en effet, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, ... et par suite

$\frac{dU}{dn}$, $\frac{dV}{dn}$ sont des infiniment petits de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$, et l'intégrale le long de C est de la forme $\frac{1}{R}\int_0^{2\pi} F\,d\varphi$, la fonction F restant finie. Il reste donc la relation

$$(11')\qquad \int_{(\Gamma)} \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn} \right) ds = 0,$$

les dérivées étant prises suivant la direction de la normale *extérieure* à Γ. Il est à remarquer que la formule (13) ne s'étend pas de la même façon à une fonction harmonique à l'extérieur de Γ (cf. *Exercice* 6).

517. Représentation conforme. — Le problème de la représentation conforme offre des liens étroits avec le problème de Dirichlet. Soient D, D′ deux domaines bornés, limités par deux contours C, C′, tels que l'on connaisse une transformation conforme qui établit une correspondance univoque entre les points de D et de D′ de C et de C′. Toute fonction u harmonique dans le domaine D se change, par cette transformation, en une fonction u' harmonique dans D′, et il est clair que, si l'on connaît les valeurs de u le long de C, on connaît aussi les valeurs de u' le long de C′. On saura donc résoudre le problème de Dirichlet pour le domaine D′ si l'on sait le résoudre pour le domaine D. En particulier, étant donné un domaine D limité par une seule courbe fermée C, on saura résoudre le problème de Dirichlet pour ce domaine si l'on sait effectuer la représentation conforme de D sur la surface d'un cercle. Inversement, Riemann a démontré la possibilité de cette application conforme en se servant du principe de Dirichlet.

Soit $Z = f(z)$ la fonction analytique qui permet d'effectuer la représentation conforme d'un domaine D sur un cercle de rayon un; la fonction $f(z)$ doit être holomorphe dans D, et pour tout point de ce domaine on doit avoir $|f(z)| < 1$. De plus, à une valeur de Z de module inférieur à un, doit correspondre un point z et un seul dans D. Soit $z_0 = a + bi$ le point D qui correspond à $Z = 0$; l'équation $f(z) = 0$ doit admettre la seule racine $z = z_0$ à l'intérieur de ce domaine, et par conséquent $f(z)$ doit être de la forme $(z - z_0)e^{\pi(z)}$, $\pi(z)$ étant une fonction holomorphe dans D,

ce qu'on peut encore écrire, en remplaçant $\eta(z)$ par $P + Qi$,

$$Z = e^{\log r + P + i\varphi + Q},$$

r et φ étant le module et l'argument de $z - z_0$. Pour tout point du contour C on doit avoir $|Z| = 1$, et par suite $P + \log r = 0$. La fonction $P(x, y)$ doit donc être harmonique dans D et prendre les mêmes valeurs que $-\log r$ sur le contour C. Nous sommes ramenés à un cas particulier du problème de Dirichlet. Supposons qu'on sache résoudre ce problème pour le domaine considéré; à la fonction $P(x, y)$ harmonique dans D, on peut alors adjoindre une autre fonction harmonique dans D, et définie à une constante additive près, de façon que $P + Qi$ soit une fonction holomorphe de z dans D. Il nous reste à examiner si la fonction ainsi déterminée

$$Z = (z - z_0)\, e^{P + iQ} = e^{u + iv}$$

satisfait bien à toutes les conditions requises. Nous pouvons remarquer tout de suite que la constante dont dépend Q n'a aucune importance dans la question, car un changement dans la valeur de cette constante revient à augmenter l'argument de Z d'un angle constant sans changer le module.

1° A tout point z intérieur au contour C correspond un point Z intérieur à la circonférence Γ de rayon 1 décrite de l'origine pour centre dans le plan de Z. En effet, la fonction $u = P + \log r$ tend vers $-\infty$ lorque z tend vers z_0; on peut donc, du point z_0 comme centre, décrire un cercle c de rayon ρ assez petit pour que u soit négatif dans ce cercle. La fonction u étant harmonique dans le domaine compris entre C et c, et nulle sur C, est négative en tout point compris entre C et c. Le rayon ρ pouvant être pris aussi petit qu'on le veut, la fonction u est négative en tout point z intérieur au domaine D, et par suite on a bien $|Z| < 1$.

2° Inversement, soit Z un point quelconque intérieur à Γ; l'équation $f(z) = Z$ a une racine et une seule dans le domaine D. Cela est évident pour $Z = 0$. Considérons maintenant un nombre négatif quelconque m. Sur tout arc de courbe joignant le point z_0 à un point de C, il y a au moins un point pour lequel $u(x, y)$ prend la valeur m puisque u varie sur cet arc de $-\infty$ à zéro. Le lieu de

ces points forme une ou plusieurs courbes fermées, car la courbe analytique $u(x, y) = m$ ne renferme que des points ordinaires ou des points multiples à tangentes distinctes (n° 503); de plus, un arc analytique ne peut rencontrer cette courbe qu'en un nombre *fini* de points, puisque le long d'un arc de cette espèce $u(x, y)$ est une fonction analytique d'un paramètre. Je dis que cette courbe se compose d'une seule courbe fermée C_m *entourant le point* z_0. En effet, dans tout autre cas, elle déterminerait un domaine S. à l'intérieur duquel $u(x, y)$ serait harmonique, tandis qu'elle aurait une valeur constante sur le contour; elle se réduirait donc à une constante. La courbe C_m décompose ainsi le domaine D en deux régions, une région intérieure renfermant le point z_0 pour lequel on a $u < m$, et une région annulaire comprise entre C_m et C pour lequel on a $u > m$. Lorsque m varie de $-\infty$ à zéro, on a une famille de courbe C_m s'enveloppant mutuellement, partant d'une courbe fermée infiniment petite autour de z_0, et se rapprochant de plus en plus du contour C lorsque m tend vers zéro. Imaginons que le point z décrive la courbe C_m dans le sens direct; le point correspondant Z décrit un cercle de rayon e^m en marchant toujours dans le même sens. Soit en effet s l'arc de C_m compté positivement dans le sens direct; l'argument de Z est égal à $v = \varphi + Q$. La relation $\frac{dv}{ds} = -\frac{du}{dn}$ (n° 503) montre que $\frac{dv}{ds}$ est positif puisque la dérivée $\frac{du}{dn}$ prise suivant la normale intérieure est évidemment négative; l'argument v va donc constamment en croissant et, comme cet argument augmente de 2π lorsque z décrit la courbe C_m, il s'ensuit qu'à tout point de C_m correspond un point et un seul du cercle $|Z| = e^m$, et inversement. Cela posé, étant donné un point quelconque $Z = e^{m+ni}$ intérieur $\Gamma (m < 0)$, tout point racine de $f(z) = e^{m+ni}$ doit être sur la courbe C_m, et il est évident qu'il y a un point et un seul de cette courbe pour lequel $v = n + 2K\pi$.

3° Il reste à démontrer que les contours C et Γ se correspondent aussi point par point d'une façon univoque. Riemann ne semble pas s'être préoccupé de ce point qui n'est nullement évident. Lorsque le point z s'approche d'un point M de C, $P + \log r$ tend bien vers zéro, et le module de Z tend vers l'unité, mais nous ne

pouvons rien affirmer jusqu'ici sur l'allure de la fonction $Q(x, y)$ dans le voisinage du point M. En effet, cette fonction Q se déduit par des quadratures des dérivées $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$; il n'est nullement sûr *a priori* que ces dérivées conservent des valeurs finies sur C, et il pourrait arriver que Q ne tend vers aucune limite, ou que son module augmente indéfiniment; l'argument de Z ne tendrait lui-même vers aucune limite lorsque z tend vers le point M.

On lève tout de suite la difficulté lorsque le contour C est formé d'un seul arc analytique régulier. La fonction $P(x, y)$, qui prend des valeurs analytiques sur cet arc, est alors harmonique dans un domaine $\mathcal{D}$, renfermant à l'intérieur le domaine D (n° 511). Il en est de même de la fonction conjuguée $Q(x, y)$, et par suite à chaque point de C correspond un point déterminé de Γ. Le raisonnement fait tout à l'heure pour les courbes C_m prouve qu'inversement à un point de Γ ne correspond qu'un point de C. Prenons encore le cas plus général où le contour C se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques réguliers se rejoignant aux sommets du contour, un point singulier sur un arc analytique étant considéré comme un sommet. Soit ab un de ces arcs; la fonction $P(x, y)$ peut encore être prolongée au delà de l'arc ab, et le même raisonnement prouve qu'à un point m de ab correspond un point μ de Γ, les deux points m et μ se déplaçant en même temps dans le sens direct. Lorsque m décrit l'arc ab, μ ne peut décrire qu'une partie de Γ; en effet, si à deux points m et m' de ab correspondait un même point μ de Γ, à un point intérieur à Γ, infiniment voisin de μ, devrait correspondre un point de D, infiniment voisin à la fois de m et de m'. A l'arc ab de C correspond donc un arc déterminé $\alpha\beta$ de Γ, ces deux arcs étant décrits en même temps dans le sens direct. Toute la difficulté consiste à montrer que *les arcs tels que* $\alpha\beta$ *recouvrent la circonférence* Γ *une fois et une seule fois* (¹).

Remarque. — Toutes les transformations conformes, qui font correspondre à lui-même le cercle de rayon *un* ayant pour centre l'origine, s'ob-

---

(¹) La démonstration a été donnée par M. E. Picard (*Traité d'Analyse*. t. II. p. 301 et suiv., 2ᵉ édition). On trouvera dans la note de M. Montel, à la fin du volume, une méthode qui s'applique à des cas beaucoup plus généraux.

tiennent au moyen de la transformation linéaire $Z = e^{i\alpha}\dfrac{z-z_0}{d(z-z'_0)}$, z_0 étant l'affixe d'un point intérieur à ce cercle, à une distance d du centre, z'_0 l'affixe du point conjugué, α une constante réelle. Ces transformations dépendent bien de trois constantes réelles. Si l'on connaît une représentation conforme d'un domaine à contour simple D sur ce cercle, on aura toutes les autres en la combinant avec les transformations précédentes.

518. **Fonction de Green.** — Soit D un domaine à contour simple C, qui satisfait aux conditions du paragraphe précédent, et dont on peut faire l'application conforme sur un cercle de rayon *un*. Si l'on sait effectuer cette représentation, le problème de Dirichlet relatif au domaine D est ramené au problème de Dirichlet relatif au cercle, dont la solution est connue.

Soit $U(s)$ une fonction continue donnée sur le contour C, que nous supposons exprimée au moyen de l'arc s, compté dans le sens direct à partir d'une origine arbitraire. Pour trouver la valeur de la fonction harmonique dans D, égale à $U(s)$ sur C, en un point (a, b) du domaine D, reprenons la fonction

$$Z = (z - a - bi)\, e^{P+iQ},$$

qui fait correspondre point par point le domaine D et le cercle de rayon *un*, de telle façon que le centre du cercle corresponde au point (a, b). A un point s de C correspond un point d'argument

$$\theta = Q + \varphi, \qquad \text{où} \qquad z - a - bi = re^{i\varphi},$$

sur la circonférence Γ. La fonction $U(s)$ se change en une fonction continue $U_1(\theta)$, de période 2π, et la fonction harmonique cherchée se change en une fonction harmonique dans le cercle, prenant la valeur $U_1(\theta)$ sur la circonférence. La valeur au centre du cercle, c'est-à-dire la valeur $U(a, b)$ au point (a, b), est donnée par la formule (17) (n° 508)

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_1(\theta)\, d\theta,$$

qui devient, en prenant l'arc s de C pour variable indépendante,

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} U(s)\left(\frac{dQ}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}\right) ds;$$

$\frac{dQ}{ds}$, $\frac{d\varphi}{ds}$ désignant les dérivées prises suivant la tangente à C, dans le sens direct. Mais ces dérivées sont égales respectivement à $-\frac{dP}{dn}$, $-\frac{d\log r}{dn}$ (n° 503), ces dérivées étant prises suivant la normale intérieure à C. La valeur de $U(a, b)$ peut donc s'écrire

$$U(a, b) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(C)} U\left(\frac{dP}{dn} + \frac{d\log r}{dn}\right) ds,$$

ou encore

$$(37) \qquad U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} U\frac{dG}{dn}\, ds,$$

en désignant par $G(x, y; a, b)$ la fonction $P(x, y) - \log r$. Cette fonction $G(x, y; a, b)$ est la *fonction de Green*, relative au contour C et au point intérieur (a, b). D'après la définition même de la fonction harmonique $P(x, y)$, la fonction de Green est définie par les propriétés suivantes : 1° elle est nulle en tout point du contour C; 2° à l'intérieur de C, elle est égale à la somme d'une fonction harmonique et de $-\log r$. Il s'ensuit qu'elle est harmonique dans le domaine de tout point intérieur à C, sauf dans le voisinage du point (a, b) où elle est infinie comme

$$-\frac{1}{2}\log[(x-a)^2 + (y-b)^2].$$

La connaissance de cette fonction de Green pour le contour C permet, on le voit, de résoudre le problème de Dirichlet intérieur pour ce contour, quelle que soit la fonction donnée $U(s)$ sur C. A ce point de vue, la fonction de Green se rapproche de la fonction $u(x, y; \xi, \eta)$ de Riemann (n° 498). Mais, tandis que la fonction de Riemann est indépendante du contour pour lequel on veut résoudre le problème de Cauchy et ne dépend que des coefficients de l'équation, la fonction de Green dépend du contour C lui-même; de plus, elle admet un infini logarithmique, tandis que la fonction de Riemann est continue. A chaque contour fermé de l'espèce considérée correspond une fonction de Green; la recherche de cette fonction revient à trouver une représentation conforme du domaine intérieur D sur un cercle, c'est-

à-dire à résoudre un cas particulier du problème même de Dirichlet.

Dans quelques cas simples, la fonction de Green est facile à obtenir. Prenons d'abord un cercle de rayon R; soient P un point intérieur à une distance ρ du centre, P_1 le point conjugué harmonique de P par rapport aux extrémités du diamètre passant par P, r et r_1 les distances d'un point M aux points P et P_1. Le rapport $\frac{r_1}{r}$ est égal à $\frac{R}{\rho}$ en tout point de la circonférence; la fonction $\log\left(\frac{\rho r_1}{R r}\right) = \log\left(\frac{\rho r_1}{R}\right) - \log r$ est la fonction de Green relative au cercle, car elle est nulle sur la circonférence, et $\log\left(\frac{\rho r_1}{R}\right)$ est harmonique à l'intérieur. En remplaçant G par cette expression dans la formule générale (37), on retrouve précisément la formule (16) (n° 508). Prenons encore le contour composé d'une demi-circonférence AMB et du diamètre AB. Soient P un point intérieur, P_1 le conjugué harmonique de P par rapport aux extrémités du diamètre passant par P, P' et P'_1 les symétriques de P et de P_1, relativement au diamètre AB; r, r_1, r', r'_1 les distances d'un point M aux points P, P_1, P', P'_1. On vérifie aisément que l'expression $\log\left(\frac{r_1 r'}{r r'_1}\right)$ est la fonction de Green relative à ce contour.

L'artifice du n° 508, par lequel on fait disparaître le terme en $\frac{dU}{dn}$ dans la formule générale (13), lorsque le contour C est une circonférence, réussit précisément parce que l'on connaît *a priori* la fonction de Green pour ce contour. Le même artifice réussit pour un contour quelconque, si l'on connaît la fonction de Green $G(x, y; a, b)$ correspondante. En effet, la fonction

$$G(x, y; a, b) + \log r$$

étant harmonique à l'intérieur du contour C, on a la relation

$$(38) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \left[U\left(\frac{dG}{dn} + \frac{d\log r}{dn}\right) - (G + \log r)\frac{dU}{dn}\right] ds.$$

En ajoutant membre à membre les formules (13) et (38), et en observant que G est nul sur C, on retrouve la formule (37).

Cette démonstration a l'avantage de s'appliquer à un domaine à connexion multiple, ou limité par plusieurs courbes fermées distinctes. La fonction de Green, pour un pareil contour, est définie par les mêmes conditions que plus haut; elle doit s'annuler sur le contour, et être égale à l'intérieur à la somme d'une fonction harmonique et de $-\log r$, r désignant toujours la distance du point (x, y) à un point intérieur (a, b). Mais la démonstration suppose que $\frac{dU}{dn}$ existe sur le contour pour la fonction harmonique cherchée [1]. Pour le cas d'une couronne circulaire, on trouvera le calcul plus loin (*Exercice* 14).

On peut aussi définir la fonction de Green pour le problème extérieur relatif à un domaine $\mathcal{D}$ s'étendant à l'infini et limité par une ou plusieurs courbes fermées qui forment le contour C de ce domaine. Soit P un point quelconque $\mathcal{D}$, de coordonnées (a, b).

La fonction de Green $G(x, y; a, b)$, relative au contour C pour le problème *extérieur*, est définie par les propriétés suivantes : elle est nulle en tout point de C, régulière à l'infini et harmonique dans le voisinage de

---

(1) Lorsque les diverses parties du contour C se composent d'un nombre fini d'arcs analytiques réguliers, on peut aisément compléter la démonstration. D'une part, les méthodes de Schwarz permettent de démontrer que le problème de Dirichlet a une solution pour ce domaine. La fonction de Green existe donc, puisqu'on l'obtient en ajoutant à $-\log r$ une fonction harmonique $P(x, y; a, b)$ qui prend les mêmes valeurs que $\log r$ sur le contour. Cette fonction P, prenant des valeurs analytiques le long des arcs analytiques du contour, peut être prolongée en dehors du domaine, et par suite $\frac{dG}{dn}$ existe sur le contour. Nous ne pouvons pas affirmer que $\frac{dU}{dn}$ existe aussi sur le contour pour la fonction harmonique U qui prend une suite de valeurs données $U(s)$ sur C. Pour tourner la difficulté, prenons sur chaque arc de C une fonction analytique $V(s)$ telle que $|U(s)-V(s)|$ soit $< \varepsilon$ en chaque point de C. La fonction harmonique V qui est égale à $V(s)$ sur le contour peut être prolongée en dehors, et par suite, $\frac{dV}{dn}$ existe sur C. On peut donc appliquer à cette fonction harmonique V la formule générale (37). D'autre part, la différence $U - V$ est inférieure à ε en tout point intérieur. Dans l'identité

$$U - \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} U(s)\frac{dG}{dn}\,ds = (U - V) + \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} (V - U)\frac{dG}{dn}\,ds,$$

les deux parties du second membre sont moindres que ε (*voir* n° 519), et par suite la valeur absolue du premier membre est inférieure à 2ε; ε étant arbitraire, ce premier membre est donc nul.

tout point de $\mathcal{D}$, sauf dans le voisinage du point (a, b), où elle est infinie comme $-\frac{1}{2}\log[(x-a)^2+(y-b)^2]$. Pour trouver la valeur $U(a, b)$ au point P d'une fonction harmonique dans $\mathcal{D}$, régulière à l'infini, et prenant des valeurs données sur le contour C, il suffit d'appliquer la formule (11′) aux deux fonctions U et $G(x, y; a, b)$, qui sont harmoniques dans le domaine $\mathcal{D}'$ obtenu en supprimant de $\mathcal{D}$ la portion intérieure à une circonférence γ de rayon très petit, ayant le point P pour centre. En faisant tendre vers zéro le rayon de γ, et en reprenant le calcul du n° 507, on obtient facilement la formule

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} U\frac{dG}{dn}\,ds, \tag{39}$$

la dérivée étant prise suivant la direction qui pénètre dans le domaine $\mathcal{D}$ [1].

Dans le cas d'un cercle, la fonction de Green pour le problème extérieur est $\log\left(\frac{MP_1}{MP}\,\frac{d}{R}\right)$, P_1 étant le point conjugué harmonique de P par rapport aux extrémités du diamètre passant par P, M un point quelconque, R le rayon, d la distance du point P au centre. On trouve, en faisant le calcul, une formule toute pareille à celle de Poisson,

$$U(a, b) = \frac{1}{\pi}\int_{(C)} U\frac{d^2-R^2}{2Rr^2}\,ds,$$

qui se vérifie de la même façon en mettant en évidence un potentiel de double couche

$$U(a, b) = \frac{1}{\pi}\int_{(C)} U\frac{ds}{2R} - \frac{1}{\pi}\int_{(C)} U\frac{\cos\varphi\,ds}{r},$$

et en appliquant les propriétés connues de ce potentiel (n° 505).

519. Propriétés de la fonction de Green. — La fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$ dépend de deux couples de variables (x, y), (ξ, η). Elle n'a été définie jusqu'ici (en nous bornant au problème intérieur) que lorsque le point (ξ, η) est *intérieur* au contour C, le point (x, y) étant lui-même à l'intérieur ou sur le contour C.

---

[1] Il est essentiel de remarquer que la fonction $G+\log r$ n'est pas régulière à l'infini, de sorte qu'on ne peut appliquer la formule (11) aux deux fonctions U et $G+\log r$ le long de C. Au contraire, la méthode suivie pour établir la formule (39) dans le cas du problème extérieur s'applique sans modification au problème intérieur.

mais *différent* du point (ξ, η). Soient (a, b), (a', b') deux points quelconques intérieurs à C, γ et γ' deux cercles de rayons très petits ρ, ρ', décrits de ces points pour centre et situés tout entiers dans le domaine D. Les deux fonctions

$$\mathrm{G}(x, y;\, a, b) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}' = \mathrm{G}(x, y;\, a'\, b')$$

sont harmoniques dans le domaine D′ limité par C et les deux circonférences γ, γ'. En observant que $\mathrm{G} = \mathrm{G}' = 0$ le long de C, la formule générale (11) conduit à la relation

$$\int_{(\gamma)} \left(\mathrm{G}\frac{d\mathrm{G}'}{dn} - \mathrm{G}'\frac{d\mathrm{G}}{dn} \right) ds + \int_{(\gamma')} \left(\mathrm{G}\frac{d\mathrm{G}'}{dn} - \mathrm{G}'\frac{d\mathrm{G}}{dn} \right) ds = 0,$$

la dérivée étant prise suivant la direction de la normale extérieure au cercle. Dans le voisinage du point (a, b), la fonction

$$\mathrm{G}(x, y;\, a, b)$$

est de la forme $-\log r + g(x, y)$, $g(x, y)$ étant harmonique et r étant la distance du point (x, y) au point (a, b). L'intégrale le long de γ se réduit donc à

$$\int_{(\gamma)} \left(g\frac{d\mathrm{G}'}{dn} - \mathrm{G}'\frac{dg}{dn} \right) ds - \int_{(\gamma)} \left(\log r\frac{d\mathrm{G}'}{dn} - \mathrm{G}'\frac{d\log r}{dn} \right) ds$$
$$= 2\pi \mathrm{G}'(a, b;\, a', b').$$

L'intégrale le long de γ' est de même égale à

$$-2\pi \mathrm{G}(a', b';\, a, b).$$

En remplaçant (a, b) par (x, y) et (a', b') par (ξ, η), nous obtenons la relation fondamentale

$$\mathrm{G}(x, y;\, \xi, \eta) = \mathrm{G}(\xi, \eta;\, x, y). \tag{40}$$

La fonction $\mathrm{G}(x, y;\, \xi, \eta)$ est donc *symétrique* par rapport aux deux couples de variables (x, y), (ξ, η) et, par suite, c'est une fonction harmonique de (ξ, η) en tout point du domaine D, sauf

au point $\xi = x$, $\eta = y$. En résumé, considérons dans l'espace à quatre dimensions $(x, y; \xi, \eta)$ le domaine R_1 défini en faisant décrire à chacun des points (x, y), (ξ, η) le domaine D et le contour C; la fonction $G(x, y; \xi, \eta)$ a une valeur déterminée en chaque point de R_1 sauf sur la variété à deux dimensions $\xi = x$, $\eta = y$. Elle est nulle lorsque l'un des points (x, y), (ξ, η) vient sur le contour C. Elle est hamonique par rapport à chacun des deux couples de variables (x, y), (ξ, η) dans le voisinage de tout point intérieur au domaine R_1, non situé sur la variété singulière; elle ne change pas quand on permute les deux couples de variables (x, y), (ξ, η).

Cette fonction est constamment positive, si les deux points (x, y), (ξ, η) sont à l'intérieur de C. En effet, considérée comme fonction de (x, y), elle est nulle sur C et égale à $+\infty$ au point (ξ, η). Il en résulte que la dérivée $\frac{dG}{dn}$ est positive en tout point de C, puisque G ne peut aller qu'en croissant quand on se déplace vers l'intérieur. L'intégrale $\int_{(C)} \frac{dG}{dn} ds$, dont tous les éléments sont positifs, est égale à 2π; car si la fonction U est égale à *un* sur C, on a aussi, en tout point intérieur, $U(a, b) = 1$.

Soient $x = \varphi(x', y')$, $y = \psi(x', y')$ des formules définissant une transformation conforme, permettant d'appliquer le domaine D, limité par le contour C, sur un autre domaine D', limité par un contour C', de façon qu'il y ait correspondance univoque entre les points des deux domaines et des deux contours. La fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$, relative au contour C, se change en une fonction $G(\varphi, \psi; \xi, \eta)$ des variables x', y' qui est nulle sur C' et harmonique dans le domaine D', sauf dans le voisinage du point (ξ', η') qui correspond au point (ξ, η). En effet, $G(x, y; \xi, \eta)$ est la partie réelle d'une fonction analytique $F(z)$ de la forme

$$g(z) - \log(z - \xi - \eta i),$$

$g(z)$ étant une fonction holomorphe dans le domaine D. Après la transformation $x + iy = \varphi + i\psi$, F se change en une fonction analytique

$$F_1(z') = F_1(x' + iy'),$$

qui est de la forme

$$g_1(z') - \log(z' - \xi' - \eta' i).$$

$g_1(z')$ étant holomorphe dans D'. Il suit de là que, dans le domaine du point (ξ', η'), la fonction $G(\varphi, \psi, \xi, \eta)$ est égale à

$$-\frac{1}{2}\log[(x'-\xi')^2+(y'-\eta')^2],$$

augmenté d'une partie régulière. On a donc

$$G[\varphi(x', y'), \psi(x', y'); \xi, \eta] = G'(x', y'; \xi', \eta'),$$

G' étant la fonction de Green pour le contour C', où le point singulier (ξ', η') correspond au point (ξ, η) par la transformation considérée.

En particulier, si le domaine D est limité par une seule courbe fermée C on peut faire l'application de ce domaine sur un cercle; ce qui rend intuitives certaines propriétés de la fonction de Green [1]. Si, par une inversion, on remplace le cercle par un demi-plan, par exemple par le demi-plan supérieur du plan des xy, la fonction de Green est remplacée par une fonction $g(x, y; \xi, \eta)$ qui doit être nulle le long de l'axe des x, harmonique en tout point de ce demi-plan, sauf en un point (ξ, η) qu'elle admet comme infini logarithmique, et tende vers zéro lorsque (x^2+y^2) croît indéfiniment. Cette fonction est évidemment

$$\frac{1}{2}\log\left[\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\right].$$

III. — ÉQUATION GÉNÉRALE DU TYPE ELLIPTIQUE.

520. Extension du problème de Dirichlet. — Le raisonnement par lequel on a établi que le problème de Dirichlet, pour l'équation de Laplace, ne peut admettre plusieurs solutions, s'étend aisément, dans certains cas, à l'équation générale du type elliptique, ramenée à la forme canonique (n° 479)

$$F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y), \tag{41}$$

a, b, c, f étant des fonctions continues des variables x, y dans les domaines dont il sera question. Le problème de Dirichlet généra-

---

(1) J. HADAMARD. *Bulletin de la Société mathématique* (séance du 28 juin 1911).

lisé consiste encore à déterminer une intégrale de l'équation (41), régulière dans un domaine borné D, limité par un contour C, et prenant sur ce contour une suite continue de valeurs données. Ce problème ne peut admettre plus d'une solution, *si le coefficient c est négatif ou nul* en tout point de D. La méthode élémentaire suivante est due à M. Paraf.

Supposons d'abord que le coefficient c ait une valeur négative en tout point de D. Si le problème proposé admettait deux solutions, leur différence v serait une intégrale de l'équation homogène $F(v) = 0$, régulière dans le domaine D, et nulle sur le contour. Si cette différence n'est pas identiquement nulle, elle prend des valeurs positives ou des valeurs négatives à l'intérieur de D, et par conséquent passe par un maximum positif ou par un minimum négatif pour un point (x_0, y_0) de ce domaine. Le second cas se ramenant au premier par le changement de v en $-v$, nous pouvons supposer qu'au point (x_0, y_0), la fonction $v(x, y)$ a un maximum *positif* v_0. D'après la théorie générale (I, n° 47), on devrait avoir en ce point

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0 \leqq 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_0 \leqq 0,$$

conditions qui sont incompatibles avec les équations $F(v) = 0$, $v_0 > 0$, pour le point (x_0, y_0). Il ne peut donc exister d'intégrale de $F(v) = 0$ satisfaisant aux conditions voulues.

Le cas où le coefficient c n'est positif en aucun point du domaine D se ramène au cas précédent en posant $v = zw$, z étant une fonction de x et de y, régulière dans D et ne s'annulant en aucun point de ce domaine ni du contour. L'équation $F(v) = 0$ est remplacée par une équation de même forme où le coefficient de w est $\frac{F(z)}{z}$. Pour que la conclusion précédente subsiste, il suffit qu'on puisse choisir la fonction z de telle façon qu'on ait, dans tout le domaine D, $z > 0$, $F(z) < 0$, l'égalité étant exclue. Or, si l'on prend pour z une fonction de la forme $A - e^{\alpha x}$, A et α étant deux constantes positives, on a $F(z) = cA - (\alpha^2 + a\alpha + c)e^{\alpha x}$, et ce résultat est négatif, quel que soit A, dans le domaine considéré, pourvu que $\alpha^2 + a\alpha + c$ soit positif en tout point de D, condition à laquelle on peut toujours satisfaire en prenant le nombre positif α assez grand. Ce nombre α étant ainsi déterminé, il suffira de

prendre pour A un nombre positif supérieur au maximum de $e^{\alpha x}$ dans D. On voit en particulier que, lorsque c est nul, l'équation (41) ne peut admettre plus d'une intégrale régulière dans le domaine D, et prenant des valeurs données sur le contour.

La conclusion ne peut être étendue au cas où le coefficient c prend des valeurs positives dans D. Par exemple l'équation $\Delta u + 2u = 0$ admet l'intégrale $u = \sin x \sin y$, qui est régulière à l'intérieur du carré limité par les droites $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = \pi$, et qui est nulle sur le contour.

On déduit aussi de ce qui précède la conclusion suivante : le problème proposé pour l'équation (41) ne peut admettre plusieurs solutions, lorsque l'équation $F(u) = 0$ admet une intégrale particulière u_1, régulière dans ce domaine, et ne s'annulant pas dans D ni sur le contour. La transformation $u = u_1 v$ conduira, en effet, à une équation de même forme en v, dont les coefficients seront des fonctions continues et où le coefficient de v sera nul. Nous venons de voir que la nouvelle équation ne peut admettre plusieurs intégrales régulières prenant les mêmes valeurs sur C.

Soit (x_0, y_0) un point quelconque du plan; toute intégrale u_1 de l'équation $F(u) = 0$, régulière dans le domaine de ce point et prenant une valeur positive pour $x = x_0$, $y = y_0$, est certainement positive dans le voisinage. Si l'on prend une courbe fermée γ, entourant le point (x_0, y_0) et assez voisine de ce point pour que l'intégrale u_1 soit positive à l'intérieur, nous pouvons appliquer ce qui précède au domaine limité par la courbe γ. Par conséquent, l'équation (41) ne peut admettre plus d'une intégrale prenant une suite de valeurs données sur une courbe fermée c entourant un point quelconque (x_0, y_0), et régulière à l'intérieur de γ, pourvu que cette courbe soit *suffisamment petite*. Ce qui précède explique le sens qu'on doit attacher à ces mots.

321. Étude de l'équation $\Delta u = f(x, y)$. — Suivant le même ordre que pour les équations du type hyperbolique (Chap. XXVI), nous commencerons par étudier l'équation simple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \tag{42}$$

Nous nous proposons de trouver une intégrale de cette équation,

régulière à l'intérieur d'un domaine D, limité par un contour C, et nulle sur ce contour; nous ferons de plus l'hypothèse que la fonction $f(x, y)$ admet les dérivées partielles du premier ordre continues dans ce domaine et sur le contour C. D'après le numéro précédent, ce problème ne peut avoir plusieurs solutions; ce qu'on voit directement aussi, en observant que, s'il en existait deux, leur différence serait une fonction harmonique dans D, et nulle sur C. Si l'on connaît une intégrale régulière quelconque $u_1(x, y)$ de l'équation (42), le problème se ramène immédiatement au problème de Dirichlet; pour obtenir la fonction cherchée, il suffit d'ajouter à $u_1(x, y)$ la fonction harmonique dans D qui prend la même valeur que $-u_1$ en chaque point du contour. Par exemple, lorsque $f(x, y)$ se réduit à l'unité, on obtient l'intégrale de l'équation $\Delta u = 1$, qui est nulle sur C, en ajoutant à $\frac{x^2+y^2}{4}$ la fonction harmonique qui est égale à $-\frac{x^2+y^2}{4}$ en chaque point de C.

Admettons l'existence d'une intégrale $U(x, y)$ de l'équation (42) satisfaisant à la condition voulue, et appliquons la formule générale de Green aux deux fonctions $U(\xi, \eta)$ et $G(x, y; \xi, \eta)$ des variables ξ, η, G étant la fonction de Green relative au contour C pour le problème intérieur. Ces deux fonctions sont régulières dans le domaine D′ limité par C et par une circonférence γ de rayon très petit ε ayant pour centre le point (x, y) de D. En tenant compte de l'équation (42) elle-même et de ce fait que les deux fonctions U et G sont nulles sur C, on obtient la relation

$$\iint_{(D)} f(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \int_{(\gamma)} \left[U(\xi, \eta) \frac{dG}{dn} - G \frac{dU}{dn} \right] ds,$$

les dérivées étant prises suivant la direction de la normale extérieure au cercle γ. Dans le domaine du point (x, y), on peut remplacer G par $g(x, y; \xi, \eta) - \log r$, g étant une fonction harmonique, et r désignant la distance des deux points (x, y), (ξ, η). Lorsque le rayon ε tend vers zéro, le seul terme de l'intégrale curviligne qui ne tende pas vers zéro est $-\int_{(\gamma)} U \frac{d \log r}{dn} ds$ qui a pour limite $-2\pi U(x, y)$. La fonction cherchée, si elle existe, a donc pour expression

$$(43) \qquad U(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} f(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Inversement, la fonction $U(x, y)$, représentée par cette formule satisfait à toutes les conditions voulues. Considérons d'abord un domaine Δ, tout entier intérieur à D; lorsque le point (x, y) reste dans le domaine Δ, on peut écrire

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\int_{(D)} f(\xi, \eta) \log\left[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right] d\xi\, d\eta$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int\int_{(D)} f(\xi, \eta)\, g(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

g étant une fonction harmonique de (x, y). Par conséquent $U(x, y)$ est la somme d'une fonction harmonique et d'un potentiel logarithmique (*voir* plus loin n° 537). La fonction $f(x, y)$ ayant des dérivées continues, on peut appliquer la formule de Poisson (n° 537), et la fonction $U(x, y)$ satisfait bien à la relation (42) en tout point intérieur au domaine D. Il reste à démontrer que cette fonction $U(x, y)$ tend vers zéro lorsque le point (x, y) tend vers un point quelconque du contour C. Or il est clair que la valeur absolue de U est inférieure à

$$\frac{M}{2\pi}\int\int_{(D)} G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

M étant une limite supérieure de $|f(x, y)|$. D'ailleurs l'intégrale double

$$-\frac{1}{2\pi}\int\int_{(D)} G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

représente précisément l'intégrale de l'équation $\Delta u = 1$ qui est nulle sur le contour C, fonction dont l'existence a été établie tout à l'heure. Cette expression tend donc vers zéro lorsque le point (x, y) tend vers un point du contour C, et par suite il en est de même de la fonction $U(x, y)$, représentée par la formule (43).

Remarque. — Lorsque la fonction $f(x, y)$ est analytique, toute intégrale de l'équation (42) est elle-même analytique. Soit en effet (x_0, y_0) un point quelconque; l'équation (42) admet évidemment une infinité d'intégrales analytiques régulières dans le domaine de ce point. Soit $u_1(x, y)$ une d'elles; toute autre intégrale régulière dans ce domaine est la somme de $u_1(x, y)$ et d'une fonction harmonique, c'est-à-dire une fonction analytique.

522. **Méthode de M. Picard.** — La première méthode employée par M. E. Picard pour résoudre le problème de Dirichlet relatif à l'équation (41) est encore une méthode d'approximations successives, très analogue, au moins dans la marche générale des calculs à celle des nos 494, 495, 500. Écrivons l'équation (1) sous la forme suivante :

$$(44) \qquad \Delta u = \lambda \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu \right) + f(x, y),$$

λ étant un paramètre auxiliaire qu'on remplacera ensuite par — 1 dans le résultat. On se propose de déterminer une intégrale de cette équation, régulière à l'intérieur d'un contour fermé C, et prenant sur ce contour une suite continue de valeurs données. Pour cela, nous chercherons d'abord une solution formelle

$$(45) \qquad u(x, y) = u_0(x, y) + \lambda\, u_1(x, y) + \ldots + \lambda^n\, u_n(x, y) + \ldots,$$

toutes les fonctions u_0, u_1, ..., u_n, ... étant régulières à l'intérieur du contour C, $u_0(x, y)$ prenant les valeurs données sur C, et toutes les autres fonctions u_1, u_2, ... étant nulles sur ce contour. Ces fonctions sont déterminées par les équations

$$(46) \qquad \begin{cases} \Delta u_0 = f(x, y), \\ \Delta u_1 = a \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + b \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + c u_0, \\ \Delta u_2 = a \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + b \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + c u_1, \\ \ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

jointes aux conditions aux limites. La première fonction $u_0(x, y)$ s'obtient en ajoutant à la fonction $U(x, y)$ donnée par la formule (43), la fonction harmonique qui prend les valeurs données sur C. Une fois la fonction $u_0(x, y)$ connue, les fonctions suivantes $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, ... se calculant de proche en proche par l'application répétée de la formule (43). Moyennant certaines hypothèses sur le contour C, les valeurs données de la fonction inconnue sur ce contour, et les coefficients a, b, c, f, M. Picard parvient à démontrer que la série (45) et celles qu'on en déduit en prenant les dérivées partielles jusqu'au second ordre sont uniformément convergentes pour $\lambda = -1$, de sorte que la fonction $u(x, y)$ donne bien la solution du problème. Sa méthode

s'applique aussi, dans certains cas, aux équations

$$\Delta u = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

mais, d'une manière générale, les conclusions sont moins précises que pour les équations du type hyperbolique. Nous en verrons la raison plus loin. Nous renverrons, pour les démonstrations, aux travaux cités plus haut.

Ce procédé de calcul met sur la voie d'une proposition importante. Lorsque les coefficients a, b, c, f sont des fonctions analytiques, tous les termes de la série (45) sont eux-mêmes des fonctions analytiques (n° 521). Une étude plus approfondie de cette série montre qu'il en est de même de la somme de la série, ce qui a conduit M. Picard à un théorème important : *Lorsque les coefficients de l'équation* (41) *sont analytiques, toutes les intégrales sont elles-mêmes des fonctions analytiques.* Cette proposition a été depuis généralisée par M. Serge Bernstein [1].

523. **Fonction de Green pour l'équation générale du type elliptique.** — On a vu plus haut que la connaissance de la fonction de Green pour un contour C permet de résoudre le problème de Dirichlet pour ce contour, quelles que soient les données sur C. On saura de même résoudre le problème de Dirichlet relatif à un contour C, pour une équation quelconque du type elliptique, si l'on peut déterminer une fonction unique, satisfaisant à certaines conditions qui vont être expliquées.

Reprenons d'abord la formule générale (41) du n° 497, qui joue un rôle fondamental dans la méthode de Riemann. Dans le cas de l'équation elliptique

$$(47) \qquad \mathcal{F}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

l'équation adjointe est

$$(48) \qquad \mathcal{G}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv = 0,$$

---

[1] Thèse de Doctorat (1904). On peut aussi étendre le théorème de Harnack (n° 510) sur les séries à termes positifs et harmoniques aux séries à termes positifs, dont les termes sont des intégrales de l'équation (41), où l'on fait $f = 0$. (LICHTENSTEIN, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXIII, 1912, p. 201.)

et l'on a, quelles que soient les fonctions u et v, l'identité

$$(49) \qquad v\,\mathcal{F}(x) - u\,\mathcal{G}(v) = \frac{\partial}{\partial x}\left[v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + auv\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + buv\right].$$

Supposons les fonctions u et v régulières dans un domaine D limité par un contour C, dans lequel les fonctions a, b, c, $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial y}$ sont continues. On a aussi, d'après l'identité précédente,

$$\iint_{(D)} [v\,\mathcal{F}(u) - u\,\mathcal{G}(v)]\,dx\,dy = \int_{(C)} \left[v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + auv\right]dy - \left[v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + buv\right]dx,$$

l'intégrale curviligne étant prise dans le sens direct. En remplaçant dx et dy par $\cos\beta' ds$ et $\cos\alpha' ds$, où α' et β' sont les angles de la normale intérieure avec les axes (nº 506), la formule précédente devient

$$(50) \qquad \iint_{(D)} [v\,\mathcal{F}(u) - u\,\mathcal{G}\,v)]\,dx\,dy = \int_{(C)} \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right)ds - \int_{(C)} (a\cos\alpha' + b\cos\beta')uv\,ds,$$

$\frac{du}{dn}$, $\frac{dv}{dn}$ désignant les dérivées suivant la normale intérieure.

Cette formule suppose, bien entendu, que les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ restent finies sur le contour.

Cela posé, soit $u(x, y)$ une intégrale quelconque de l'équation $\mathcal{F}(u) = f(x, y)$, régulière dans le domaine D, et restant finie sur le contour ainsi que ses dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Soit d'autre part $v(x, y; \xi, \eta)$ une intégrale *particulière* de l'équation adjointe $\mathcal{G}(v) = 0$, satisfaisant à la condition suivante :

A. *Dans le domaine* D *elle est de la forme* U $\log r$ + V, U *et* V *étant régulières dans ce domaine, et r étant égal à*

$$\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2};$$

le point (ξ, η) *est un point du domaine* D *et l'on suppose de plus* $U(\xi, \eta) = -1$.

Sur le contour C, nous supposons seulement que v reste finie, ainsi que $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$. Appliquons la formule générale (50) au domaine D' limité par C et par un cercle γ de rayon très petit ρ ayant pour centre le point (ξ, η). Puisqu'on a $\mathcal{F}(u) = f(x, y)$ et $\mathcal{G}(v) = 0$ dans ce domaine, la formule devient

$$\begin{aligned}\iint_{(D')} v f(x, y)\,dx\,dy = & \int_{(C)} \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) ds - \int_{C} (a \cos\alpha' + b \cos\beta') uv\,ds \\ & + \int_{\gamma} \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) ds - \int_{(\gamma)} (a \cos\alpha' + b \cos\beta') uv\,ds,\end{aligned}$$

la normale intérieure en un point de γ étant la normale extérieure à la courbe géométrique. Lorsque le rayon ρ tend vers zéro, l'intégrale $\int_\gamma (a \cos\alpha' + b \cos\beta')\, uv\, ds$ tend vers zéro, car un élément de cette intégrale est de la forme $\rho\, d\theta (A + B \log\rho)$, A et B restant finis.

Pour la même raison, l'intégrale $\int_\gamma v \frac{du}{dn} ds$ tend aussi vers zéro. Quant à l'intégrale $\int_\gamma u\, ds$, elle peut s'écrire

$$\int_0^{2\pi} \left[(-1 + \varepsilon) \frac{1}{\rho} + \log\rho \frac{dU}{dn} + \frac{dV}{dn}\right] u \rho\, d\theta$$

et sa limite est évidemment $-2\pi u(\xi, \eta)$. On a donc, en passant à la limite,

$$(51)\quad \begin{aligned} u(\xi, \eta) = & \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \left[u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right] ds \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} (a \cos\alpha' + b \cos\beta') uv\, ds - \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} vf\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Si la valeur de $u(x, y)$ est donnée en tous les points du contour, on pourra calculer tous les termes qui figurent dans le second membre, sauf l'intégrale $\int_C v \frac{du}{dn} ds$, qui renferme $\frac{du}{dn}$. Pour que ce terme disparaisse, il suffira de prendre pour v une intégrale de l'équation adjointe satisfaisant à la condition A et qui soit nulle en

tous les points de C. La connaissance d'une intégrale $v(x, y; \xi, \eta)$ de l'équation adjointe satisfaisant à ces diverses conditions permettra de résoudre le problème de Dirichlet pour le contour C, quelles que soient les données sur le contour, car la formule (51) devient alors

$$(52) \qquad u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} u \frac{dv}{dn} ds - \frac{1}{2\pi} \int\int_{(D)} v f(x, y) \, dx \, dy$$

et se réduit à la formule (37) elle-même lorsque $f(x, y) = 0$.

La fonction $v(x, y; \xi, \eta)$, si elle existe, joue donc exactement le même rôle que la fonction de Green pour l'équation de Laplace. La détermination de cette fonction se décompose en deux problèmes distincts. On doit d'abord chercher une solution *fondamentale* de l'équation adjointe $\mathcal{G}(v) = 0$, c'est-à-dire une intégrale ayant en un point arbitraire (ξ, η) une discontinuité logarithmique de la nature qui a été spécifiée plus haut [1].

Ce premier problème est indépendant du contour C.

Dans le cas particulier de l'équation $\Delta u = 0$, une solution fondamentale est $\log\left(\frac{1}{r}\right)$. Dans le cas général, ayant obtenu une solution fondamentale $V(x, y; \xi, \eta)$, pour avoir la fonction $v(x, y; \xi, \eta)$ relative au contour C, il suffira d'ajouter à cette solution fondamentale une intégrale de l'équation adjointe régulière à l'intérieur du contour et prenant la même valeur que $-V$ en chaque point de ce contour. On est donc ramené à un cas particulier du problème même de Dirichlet. Nous reviendrons plus loin sur cette seconde partie du problème.

On peut aussi étendre à la fonction $v(x, y; \xi, \eta)$ la propriété établie plus haut pour la fonction de Green relativement à l'échange des deux couples de variables (x, y), (ξ, η). Soit $u(x, y; \xi, \eta)$ une intégrale de l'équation $\mathcal{F}(u) = 0$, définie de la même façon que v, c'est-à-dire nulle en tous les points de C, et de la forme $U_1 \log r + V_1$, U_1 et V_1 étant des fonctions régulières dans le domaine D, et $U_1(\xi, \eta)$ étant égal à -1. Prenons deux

---

[1] L'existence de cette solution, lorsque les coefficients a, b, c sont analytiques, a d'abord été établie dans un cas particulier par M. Picard, puis dans le cas général par MM. Hilbert, Hedrick et Hadamard (*voir* le Mémoire déjà cité de M. Hadamard, *Annales de l'École Normale*, 1903, p. 535 et suiv.).

points quelconques (a, b), (a', b') du domaine D, et appliquons la formule générale (50) aux deux fonctions $u(x, y; a', b')$, $v(x, y; a, b)$ dans le domaine D' formé par la portion de D qui est extérieure à deux cercles γ, γ', de rayons très petits ρ, ρ' ayant respectivement pour centres les deux points (a, b), (a', b'). L'intégrale curviligne le long de C est nulle, et l'on démontre comme tout à l'heure que les intégrales le long de γ et de γ' ont respectivement pour limites $-2\pi u(a, b; a', b')$ et $2\pi v(a', b'; a, b)$, lorsque ρ, ρ' tendent vers zéro. On a donc, en remplaçant (a, b) par (x, y), et (a', b') par (ξ, η), la relation d'échange

$$(53) \qquad u(x, y; \xi, \eta) = v(\xi, \eta; x, y),$$

tout à fait semblable à celles qui ont été établies pour la fonction de Riemann (n° 498) et pour la fonction de Green, et dont on peut tirer les mêmes conséquences. Mais il est essentiel de remarquer que la fonction $(u. x, y; \xi, \eta)$ ne dépend pas seulement de l'équation elle-même, comme la fonction de Riemann, mais aussi du contour C.

524. **Problèmes mixtes positifs.** — La formule (51) permet d'aborder des problèmes plus généraux que le problème de Dirichlet. Dans cette formule on a, sous le signe intégral, une expression bilinéaire par rapport aux deux couples de variables $\left(u, \frac{du}{dn}\right)$, $\left(v, \frac{dv}{dn}\right)$. Supposons qu'au lieu de se donner la valeur de u sur le contour C, on se donne une relation linéaire entre u et $\frac{du}{dn}$, qui doit être vérifiée en tout point de C,

$$(54) \qquad \mathrm{H}u + \mathrm{K}\frac{du}{dn} = \mathrm{L},$$

H, K étant des constantes, ou des fonctions connues en chaque point du contour, qui peuvent d'ailleurs avoir un nombre quelconque de points de discontinuités sur ce contour, et L une fonction donnée sur C. Par exemple, on peut se donner la valeur de $\frac{du}{dn}$ en chaque point de C, ou la valeur de u sur certaines portions de C, et la valeur de $\frac{du}{dn}$ sur le reste du contour. La fonction sous le signe intégral dans la formule (51) sera elle-même connue si les coefficients de u et de $\frac{du}{dn}$ sont proportionnels aux coefficients H et K, ce qui exige que l'intégrale v de l'équation adjointe vérifie elle-même le

long du contour C la relation

$$K\frac{dv}{dn} + v(H - aK\cos\alpha' - bK\cos\beta') = 0. \tag{55}$$

On obtiendra encore cette fonction v en ajoutant à une solution fondamentale $V(x, y; \xi, \eta)$ une intégrale v_1 de l'équation adjointe, régulière à l'intérieur du contour C, et satisfaisant sur ce contour à la relation

$$\left(\frac{dv_1}{dn} + \frac{dV}{dn}\right) + (v_1 + V)(l - a\cos\alpha' - b\cos\beta') = 0, \qquad l = \frac{H}{K};$$

ce qui est un cas particulier du problème général qu'il s'agit de résoudre. La connaissance de cette fonction $v(x, y; \xi, \eta)$ permettra encore de résoudre le problème mixte proposé, quelles que soient les valeurs de L dans la formule (54) qui exprime les conditions aux limites.

On conçoit ainsi l'existence d'une infinité de fonctions dépendant de deux couples de variables (x, y), (ξ, η), dont chacune joue le rôle de la fonction de Green pour un problème aux limites du type elliptique. Ces fonctions dépendent à la fois de l'équation, du contour C, et aussi de la nature même du problème, c'est-à-dire des coefficients H et K. Il est clair que ce sont là seulement des vues générales, qui ont besoin d'être précisées dans chaque cas particulier, et il peut arriver que les conditions auxquelles devrait satisfaire la fonction v soit incompatibles.

Un exemple simple de ce cas est fourni par le *Problème de Neumann* qui consiste à *déterminer une fonction $u(x, y)$, harmonique à l'intérieur d'un contour, connaissant la valeur de $\frac{du}{dn}$ sur le contour*. Soit $U'(M)$ la valeur donnée de $\frac{du}{dn}$ en chaque point M du contour C; d'après la propriété générale exprimée par la relation (12) (nº 506), cette fonction $u(x, y)$ ne peut exister que si la fonction donnée $U'(M)$ satisfait à la condition

$$\int_C U'(M)\, ds = 0. \tag{56}$$

Cela suffit pour prouver qu'il n'existe pas de solution de l'équation $\Delta v = 0$, dont la dérivée normale $\frac{dv}{dn}$ soit nulle sur C, et qui soit régulière à l'intérieur, sauf dans le domaine d'un point (ξ, η) qui est un infini logarithmique. En effet, cette fonction v serait harmonique dans le domaine limité par C et un cercle ρ de rayon très petit ρ décrit du point (ξ, η), pour centre, et l'on devrait avoir $\int_\gamma \frac{dv}{dn}\, ds = 0$, puisque $\frac{dv}{dn}$ est nul sur C. Or le calcul fait tout à l'heure prouve que cette intégrale tendrait vers 2π quand ρ tend vers zéro.

Lorsque la condition (56) est vérifiée, le problème de Neumann se ramène

au problème de Dirichlet; nous nous bornerons au cas d'une aire à contour simple. En effet, considérons sur le contour C la fonction

$$V(s) = \int_0^s U'(M)\,ds,$$

l'arc étant compté à partir d'une origine arbitraire; cette fonction $V(s)$ est continue et admet une valeur unique en chaque point, d'après la relation (56). Soit $V(x, y)$ la fonction harmonique dans le domaine D qui prend la valeur $V(s)$ sur C; à cette fonction $V(x, y)$ on peut associer une autre fonction harmonique $U(x, y)$ telle que $V + iU$ soit une fonction holomorphe de $x + iy$ à l'intérieur de C. En vertu des relations générales du n° 503, on a, sur ce contour, $\frac{dU}{dn} = \frac{dV}{ds} = U'(M)$ et par conséquent, la fonction $U(x, y)$ donne la solution du problème de Neumann. Cette fonction n'est déterminée qu'à une constante additive près, comme il était évident *a priori* (voir *Exercice* 12).

COMPLÉMENTS ET EXERCICES.

1. Déduire la formule générale (13) (n° 507) de l'intégrale de Cauchy (II, n° 291).

R. Soit $U(x, y) + iV(x, y)$ une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour C, En remplaçant dans la formule de Cauchy, x par $a + bi$, où a et b sont les coordonnées d'un point intérieur P, et en égalant les parties réelles, on obtient la relation

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\left(V\frac{d\log r}{ds} - U\frac{d\log r}{dn}\right)ds,$$

en observant que $\frac{dz}{z - a - bi} = \left(\frac{d\log r}{ds} - i\frac{d\log r}{dn}\right)ds$, le long de C. Il suffit d'une intégration par parties appliquée à la première intégrale pour parvenir à la formule (13), après avoir remplacé $\frac{dV}{ds}$ par $-\frac{dU}{dn}$.

2. Démontrer que la fonction $U(a, b)$, représentée par la formule (18), résout le problème de Dirichlet pour le cercle, en s'appuyant sur ce que le second membre est la différence de deux potentiels de double couche.

3. Démontrer, au moyen des théorèmes de Cauchy, que l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\psi\frac{d\log r}{dn}\,d\psi$$

est égale à l'argument de $(1 + a + bi)$, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; r est

la distance d'un point du cercle de rayon *un* ayant pour centre l'origine à un point (a, b) intérieur à ce cercle (*cf.* p. 185-187).

R. On commence par établir la relation

$$\int_C \operatorname{Log} z \frac{dz}{z - x} = 2\pi i \operatorname{Log}(1 + x),$$

où $x = a + bi$, l'argument de z étant compté de $-\pi$ à $+\pi$, et l'argument de $1 + x$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Pour cela, on applique le théorème des résidus au contour formé de C et des deux bords de la coupure joignant l'origine au point (-1).

4. Montrer, par une inversion, que la formule de Poisson (17) peut s'écrire

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi',$$

ψ' étant l'angle polaire du second point de rencontre de la droite PM avec le cercle C. Soient P et Q deux points quelconques intérieurs au cercle, ρ et ρ' leurs distances au centre, d leur distance, D l'oscillation de la fonction donnée $f(\psi)$ sur le cercle; on a l'inégalité

$$|V_Q - V_P| < \frac{2D}{\pi} \operatorname{Arc tang} \frac{Rd}{\sqrt{R^2 - \rho^2}\sqrt{R^2 - \rho'^2}}.$$

[Darboux, *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XXXIV, 1910, p. 287.]

5. *Exemple de M. Hadamard* (note de la page 198). La fonction

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2^n}}{2^n} \cos(2^n \theta)$$

est harmonique à l'intérieur du cercle C de rayon *un* et se réduit sur ce cercle à une fonction continue de θ, $\sum \frac{1}{2^n} \cos(2^n \theta)$. L'intégrale double

$$\iint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

étendue à l'aire d'un cercle concentrique de rayon $\rho < 1$, a pour valeur

$$\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^{2^{n+1}}$$

et augmente indéfiniment lorsque ρ tend vers l'unité.

6. Soit $U(x, y)$ une fonction harmonique dans la partie du plan extérieure à un contour C et régulière à l'infini. Démontrer qu'on doit remplacer, pour cette partie du plan, la formule générale (13) par la suivante

$$U(a, b) - U_\infty = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(\log r \frac{dU}{dn} - U\frac{d\log r}{dn}\right) ds,$$

les dérivées étant prises suivant la direction extérieure de la normale.

On applique d'abord la formule (13) au contour formé de C et d'un cercle Γ de centre (a, b), dont on fait ensuite croître le rayon indéfiniment.

7. Calculer les potentiels de simple couche

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos n\psi \log r \, d\psi, \qquad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin n\psi \log r \, d\psi,$$

où r est la distance des deux points de coordonnées polaires (ρ, ω) et $(1, \psi)$, n un nombre entier positif.

R. De la formule classique qui donne le développement de $\text{Log}(1-z)$, on tire, en posant $z = \rho e^{i\theta}$, où $\theta = \psi - \omega$, et supposant $\rho < 1$,

$$\log(1+\rho^2 - 2\rho\cos\theta)^{\frac{1}{2}} = -\rho\cos\theta - \rho^2\frac{\cos 2\theta}{2} - \ldots - \rho^n \frac{\cos n\theta}{n} - \ldots,$$

$\log r$ étant remplacé par son développement, on obtient, en intégrant terme à terme, $I_1 = -\frac{\pi}{n}\rho^n \cos n\omega$, $I_2 = -\frac{\pi}{n}\rho^n \sin n\omega$, si $\rho < 1$. On aura les valeurs de I_1 et de I_2 en remplaçant ρ par $\frac{1}{\rho}$, lorsque ρ est plus grand que 1. Le potentiel étant continu, les formules subsistent pour $\rho = 1$, ce qui donne les relations

$$\int_0^{2\pi} \cos n\psi \log\left\{2\left|\sin\frac{\psi-\omega}{2}\right|\right\} d\psi = -\frac{\pi}{n}\cos n\omega,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\psi \log\left\{2\left|\sin\frac{\psi-\omega}{2}\right|\right\} d\psi = -\frac{\pi}{n}\sin n\omega.$$

8. Vérifier que les seules fonctions $F(\psi)$ vérifiant une relation de la forme

$$\int_0^{2\pi} F(\psi)\log\left\{2\left|\sin\frac{\psi-\omega}{2}\right|\right\} d\psi = K\,F(\omega),$$

où K est constant, sont de la forme $A\cos n\psi + B\sin\psi$.

R. On considère le potentiel $V(\rho, \omega) = \int_0^{2\pi} F(\psi)\log r \, d\psi$ et, en cal-

culant $\frac{\partial V}{\partial \rho}$, on démontre, après quelques transformations faciles, que ce potentiel satisfait à une relation $\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\pi}{K} V = C$, C étant constant. Ce coefficient doit être nul puisque V est nul au centre du cercle, et par suite V est une fonction harmonique homogène.

9. Calculer les potentiels de double couche

$$\int_0^{2\pi} \cos n\psi \frac{\cos\varphi}{r} d\psi, \qquad \int_0^{2\pi} \sin n\psi \frac{\cos\varphi}{r} d\psi,$$

r et φ ayant la signification ordinaire.

10. Soit U une fonction continue le long d'un cercle C de rayon R; x étant l'affixe d'un point intérieur, l'intégrale

$$F(x) = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{U\,dz}{z-x} - \frac{1}{\pi}\int_C U \frac{ds}{2R}$$

représente une fonction holomorphe de x à l'intérieur du cercle C, dont la partie réelle tend vers U, lorsque le point x tend vers un point du cercle C.

R. On observe que cette partie réelle est un potentiel de double couche. On déduit de là la relation

$$F(x) - F(o) = \frac{x}{\pi i}\int_C U \frac{dz}{z(z-x)} = -\frac{x}{\pi R}\int_C U \frac{d\,\mathrm{Log}(z-x)}{dx} ds.$$

11. Soient u et v deux fonctions harmoniques conjuguées dans un cercle C ayant pour centre l'origine, telles que $u + iv = F(z)$. Démontrer que $\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}$ et $\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}$ sont aussi des fonctions harmoniques, conjuguées, et que l'on a

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + i\rho\frac{\partial v}{\partial \rho} = z\,F'(z).$$

12. *Problème de Neumann pour le cercle.* — Soit $u(a, b)$ une fonction harmonique dans le cercle C de rayon R, ayant pour centre l'origine, dont la dérivée $\frac{du}{dn}$ prend une valeur donnée en chaque point de C, telle que $\int_C \frac{du}{dn} ds = o$; $v(a, b)$ étant la fonction conjuguée, posons

$$f(x) = u + iv, \qquad x = a + ib.$$

On a, d'après l'Exercice 11,

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + i\rho\frac{\partial v}{\partial \rho} = x\,f'(x).$$

La partie réelle de la fonction holomorphe $xf'(x)$ est égale à $-\mathrm{R}\dfrac{du}{dn}$ sur C; on a donc (*Ex.* 10)

$$xf'(x) = \frac{x}{\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{du}{dn}\frac{d\,\mathrm{Log}(z-x)}{dx}\,ds, \qquad f'(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{du}{dn}\frac{d\,\mathrm{Log}(z-x)}{dx}\,ds$$

et, par suite,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{du}{dn}\,\mathrm{Log}(z-x)\,ds.$$

En prenant la partie réelle, on obtient la formule de Dini qui représente dans le cercle la fonction harmonique cherchée

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{du}{dn}\log r\,ds.$$

On vérifie aisément ce résultat en s'appuyant sur les propriétés des dérivées normales du potentiel de simple couche [n° 538, formules (54)], ou sur les formules de l'Exercice 7. (*Voir* un article de M. Tommaso Boggio, *Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 1911-1912).

13. *Généralisation.* — Déterminer une fonction harmonique u' dans un cercle C de rayon R, telle que l'on ait sur ce cercle

$$\frac{a}{\mathrm{R}}u' - \frac{du'}{dn} = \mathrm{U} \qquad \text{(fonction donnée sur C).}$$

[Tommaso Boggio, *Ibid.*]

R. Soit u la fonction harmonique égale à U sur C; on doit avoir

$$au' + \rho\frac{\partial u'}{\partial\rho} = \mathrm{R}\,u,$$

car les deux membres sont des fonctions harmoniques égales sur C. Soient v et v' les fonctions harmoniques conjuguées de u et u' respectivement; on peut supposer aussi que l'on a

$$av' + \rho\frac{\partial v'}{\partial\rho} = \mathrm{R}\,v.$$

Soient $u' + iv' = f(z)$, $u + iv = \mathrm{F}(z)$. On déduit de ces égalités que la fonction $f(z)$ satisfait à l'équation différentielle

$$af(z) + zf'(z) = \mathrm{R}\,\mathrm{F}(z),$$

qui admet une solution holomorphe dans C, pourvu que a ne soit pas un nombre entier négatif.

14. *Problème de Dirichlet pour une aire annulaire.* — Ce problème, dont on a déjà indiqué une solution (n° 510), a fait l'objet d'un travail étendu de M. Villat (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*,

t. XXXIII, 1912, p. 134). La fonction de Green correspondante peut s'exprimer assez simplement au moyen de transcendantes elliptiques.

Soit D le domaine compris entre les deux cercles C, C′ de rayon 1 et $R > 1$, ayant pour centre l'origine dans le plan de la variable z. En posant $u = i \operatorname{Log} z$, on fait correspondre au cercle C l'axe réel dans le plan de la variable u, au cercle C′ une parallèle à l'axe réel d'ordonnée $\log R$, et à la couronne circulaire correspond la bande indéfinie D′, de largeur $\log R$, comprise entre ces deux droites. A un point de D correspondent une infinité de points de la bande D′ qui ont même ordonnée et dont les abscisses forment une progression arithmétique de raison 2π. Considérons le système de périodes $2\omega = 2\pi$, $2\omega' = 2i \log R$; e_1, e_2, e_3, g_2, g_3 sont réels, et les fonctions σ, σ_1, σ_2, σ_3, formées avec ces périodes, sont représentées par des développements en séries entières à coefficients réels; η est réel, ainsi que $\frac{\eta'}{i}$ (*voir*, par exemple, Tannery et Molk, *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 188 et suivantes).

Soit $\alpha + \beta i$ un point pris dans la bande D′. Le quotient

$$\frac{\sigma(u - \alpha - \beta i)}{\sigma(u - \alpha + \beta i)}$$

a un module égal à l'unité lorsque u décrit l'axe réel; il est holomorphe dans D′ et n'y admet pas d'autres zéros que les points $\alpha + \beta i + 2k\pi$. Le produit

$$\varphi(u) = e^{\frac{2\beta\eta i u}{\pi}} \frac{\sigma(u - \alpha - \beta i)}{\sigma(u - \alpha + \beta i)}$$

possède aussi ces propriétés, mais de plus on voit aisément que cette fonction admet la période $2\omega = 2\pi$ en tenant compte de la relation entre σu et $\sigma(u + 2\omega)$. Le module de $\varphi(u)$ reste constant lorsque u décrit le bord supérieur de la bande D′. D'après les relations générales

$$\sigma(u + \omega') = e^{\eta' u} \sigma\omega' \sigma_3 u, \qquad \eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi}{2} i,$$

on a, en effet,

$$\varphi(u + \omega') = e^{-\beta} e^{\frac{2\beta\eta i u}{\pi}} \frac{\sigma_3(u - \alpha - \beta i)}{\sigma_3(u - \alpha + \beta i)},$$

et comme les coefficients de σ_3 sont réels, le module de $\varphi(u + \omega')$ est égal à $e^{-\beta}$ lorsque u est réel. Cela étant, posons $v = \operatorname{Log}[\varphi(u)]$; lorsque z décrit un contour fermé dans la couronne D, u augmente de $2k\pi$, $\varphi(u)$ reprend sa valeur initiale, et la partie réelle de v est une fonction uniforme des variables x, y dans ce domaine, qui est nulle sur C et égale à $-\beta$ sur C′, D'ailleurs la fonction v n'admet qu'un seul point singulier logarithmique dans D, le point $e^{-i(\alpha+\beta i)} = e^{\beta - \alpha i}$. En ajoutant à la partie réelle de v la partie réelle de $\frac{\beta}{\operatorname{Log} R} \operatorname{Log} z$, on a la fonction de Green demandée.

CHAPITRE XXVIII.

FONCTIONS HARMONIQUES DE TROIS VARIABLES.

I. — PROBLÈME DE DIRICHLET DANS L'ESPACE.

525. **Propriétés générales.** — La définition des fonctions harmoniques s'étend immédiatement aux fonctions de trois variables. Nous dirons qu'une fonction $u(x, y, z)$ de trois variables x, y, z est *harmonique* dans un domaine D de l'espace si elle est régulière, c'est-à-dire continue ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au second ordre, et si les dérivées partielles du second ordre vérifient l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

en tout point de ce domaine. La fonction $\frac{1}{r}$, où r est la distance du point variable $M(x, y, z)$ à un point fixe $P(a, b, c)$, est harmonique dans tout domaine ne renfermant pas le point P, et cette fonction joue le même rôle que $\log\frac{1}{r}$ dans la théorie de l'équation à deux variables. Les dérivées partielles de cette fonction, soit par rapport aux variables x, y, z, soit par rapport aux paramètres a, b, c, sont harmoniques dans le même domaine, et il en est de même de toute combinaison linéaire de ces dérivées, dont les coefficients sont indépendants de x, y, z. Par exemple, l'expression $\frac{\cos\varphi}{r^2}$, où φ désigne l'angle de la direction PM avec une direction quelconque issue de P, est une fonction harmonique, car elle est égale à la dérivée de $\frac{1}{r}$ prise suivant la direction considérée quand on regarde $\frac{1}{r}$ comme fonction des coordonnées (a, b, c) du point P.

De même $\frac{\cos\psi}{r^2}$, où ψ est l'angle de la direction MP avec une

direction *fixe*, indépendante de M, est encore harmonique, car c'est la dérivée de $\frac{1}{r}$, considérée comme fonction de x, y, z, prise suivant cette direction. Les propriétés des fonctions harmoniques, déduites de la théorie du potentiel ou de la formule de Green, s'étendent, avec quelques changements faciles à reconnaître, aux fonctions harmoniques de trois variables; on se bornera souvent à quelques indications, en laissant au lecteur le soin de développer les démonstrations, tout à fait pareilles à celles des n°s 505-507.

Au contraire, la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe et la théorie des transformations conformes n'ont pas d'analogues quand on passe de deux à trois variables. Toute fonction harmonique se change en une fonction harmonique quand on remplace x, y, z par kx, ky, kz, quand on effectue sur ces variables une substitution orthogonale quelconque, ou quand on change x, y, z en $x+a$, $y+b$, $z+c$ respectivement; la vérification est immédiate. De même, si $U(x, y, z)$ est harmonique, la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} U\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

est aussi hamonique ([1]). En combinant les transformations précédentes, on obtient toutes les transformations

$$Z = f_1(x, y, z), \quad Y = f_2(x, y, z), \quad Z = f_3(x, y, z), \quad U = \varphi(u, x, y, z)$$

par lesquelles l'équation $\Delta U = 0$ se change en une équation de même forme ([2]) $\Delta u = 0$.

On a vu (n° 503) que le polynome harmonique et homogène le plus général de degré n, à deux variables, dépend de *deux* constantes arbitraires. Un polynome homogène de degré n à trois variables renferme $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients; en écrivant qu'il satisfait à l'équation de Laplace, on établit $\frac{n(n-1)}{2}$ relations entre ces coefficients : il reste donc $\frac{(n+1)(n+2)-n(n-1)}{2} = 2n+1$

([1]) Cette propriété est due à Lord Kelvin [*Journal de Liouville*, t. X (1re série), 1845, p. 364). On la démontre aisément au moyen de l'équation de Laplace en coordonnées polaires (I, p. 159).

([2]) Painlevé, *Mémoires des Facultés de Lille*, t. I, 1889.

coefficients arbitraires. On peut encore le voir en observant que l'équation de Laplace et celles qu'on en déduit par dérivations permettent d'exprimer toutes les dérivées d'ordre n au moyen des dérivées de cet ordre où x ne figure pas ou figure une seule fois.

Dans un polynome harmonique homogène d'ordre n, on ne peut donc choisir arbitrairement que les coefficients des termes ne renfermant pas x ou renfermant x au premier degré; le nombre de ces termes est bien égal à $2n+1$. Ces polynomes harmoniques $V_n(x, y, z)$ peuvent se déduire des dérivées partielles de la fonction harmonique $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. En effet, toutes ces dérivées satisfont aussi à l'équation de Laplace, et une dérivée d'ordre n est de la forme $V_n(x, y, z)(x^2+y_2+z^2)^{-n-\frac{1}{2}}$, $V_n(x, y, z)$ étant un polynome homogène de degré n; la fonction harmonique qu'on en déduit par la transformation de Lord Kelvin est précisément le polynome $V_n(x, y, z)$. Tous ces polynomes se réduisent à $2n+1$ polynomes linéairement distincts, puisque le nombre des dérivées partielles d'ordre n linéairement distinctes d'une fonction harmonique est égal à $2n+1$. Pour $n=1, 2, 3$ on a respectivement

$$V_1(x, y, z) = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z,$$
$$V_2(x, y, z) = \lambda_1(x^2-z^2) + \lambda_2(y^2-z^2) + \lambda_3 xy + \lambda_4 xz + \lambda_5 yz,$$
$$V_3(x, y, z) = \lambda_1(x^3-3xy^2) + \lambda_2(x^3-3xz^2) + \ldots + \lambda_7 xyz,$$

les coefficients λ_i étant arbitraires, et les termes non écrits dans V_3 se déduisant des deux premiers par permutation circulaire.

526. **Potentiel newtonien de simple couche.** — Rappelons d'abord quelques définitions relatives aux surfaces. On dit qu'un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ d'une surface S est un point ordinaire si les coordonnées (x, y, z) d'un point voisin M de S sont des fonctions $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=\psi(u, v)$ de deux paramètres u, v, continues et admettant des dérivées partielles du premier ordre continues dans le voisinage du système de valeurs (u_0, v_0) qui correspond au point M_0, et si de plus les trois jacobiens $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ ne sont pas nuls à la fois pour ce système de valeurs. Une portion de surface est dite *régulière* si elle ne renferme que des points ordinaires. Les surfaces dont il

sera question dans la suite ne sont pas forcément analytiques, mais nous supposerons toujours qu'elles se composent d'un nombre fini de portions de surfaces régulières. Elles peuvent avoir un nombre fini d'arêtes, suivant lesquelles se rejoignent deux nappes de surfaces régulières avec deux points tangents distincts, et un nombre fini de points singuliers isolés, comme des points coniques, ou des sommets où aboutissent plusieurs arêtes. Il est clair qu'une intégrale de surface, étendue à une surface de cette nature, a toujours un sens si la fonction sous le signe d'intégration est continue, ou si elle est discontinue, en restant bornée, en certains points ou le long de certaines lignes, en nombre fini. Par exemple, si la fonction sous le signe intégral dépend de la direction de la normale, elle est discontinue le long des arêtes, mais si l'on a choisi une direction déterminée pour la normale sur chaque portion de surface, l'intégrale double a une valeur finie.

Soient Σ une surface de l'espèce considérée, fermée ou non, mais située tout entière à distance finie, et μ une fonction continue sur Σ. L'intégrale étendue à cette surface

$$V(a, b, c) = \int\int_{(\Sigma)} \frac{\mu}{r}\, d\sigma, \tag{2}$$

où r désigne la distance d'un point M de Σ à un point fixe P de coordonnées (a, b, c), est un *potentiel newtonien de simple couche*. On démontre comme au n° 505 que $V(a, b, c)$ est une fonction harmonique des coordonnées (a, b, c), dans tout domaine D n'ayant aucun point commun avec Σ, et *qu'elle est continue dans tout l'espace*. Il suffit, pour établir ce dernier point, de prouver que l'intégrale (2) est uniformément convergente dans le domaine de tout point M_0 de Σ (n° 504). Supposons que le point M_0 est un point ordinaire de Σ; prenons ce point pour origine et la normale pour axe des z. Soit Σ' une portion de Σ entourant M_0, qui n'est rencontrée qu'en un point par une parallèle à l'axe des z, et se projette sur le plan des xy à l'intérieur d'une courbe fermée γ entourant l'origine. L'intégrale

$$V'(a, b, c) = \int\int_{(\Sigma')} \frac{\mu\, d\sigma}{r} = \int\int \frac{\mu\sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

étendue à la portion du plan des xy intérieure à la courbe γ, est

inférieure en valeur absolue à

$$M\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}},$$

M désignant une limite supérieure de $\left|\mu\sqrt{1+p^2+q^2}\right|$ sur une portion de Σ renfermant Σ'. Si l'on passe aux coordonnées polaires en posant $x = a + \rho\cos\varphi$, $y = b + \rho\sin\varphi$, on voit que la valeur absolue de $V'(a, b, c)$ est plus petite que l'intégrale $M\int\int d\rho\, d\varphi$, et par conséquent plus petite que $2\pi M l$, si la courbe γ est située tout entière à l'intérieur d'un cercle de diamètre l. Ce nombre l pouvant être pris aussi petit qu'on le veut, il en est par suite de même de $|V'|$. La démonstration s'étend facilement au cas où le point M_0 serait situé sur une courbe double de Σ.

En dehors de Σ, $V(a, b, c)$ *est une fonction analytique de* a, b, c. Comme on peut prendre pour origine un point quelconque en dehors de Σ, il nous suffira de démontrer que U peut être développée en série entière suivant les puissances de a, b, c, lorsque l'origine est en dehors de Σ. La fonction $\frac{1}{r}$, où x, y, z sont les coordonnées d'un point de Σ, est une fonction holomorphe de a, b, c, dans le voisinage des valeurs $a = b = c = 0$. Considérons ces variables comme des variables complexes; si le module de chacune d'elles est inférieur à ρ, le module de r^2 est supérieur à

$$x^2+y^2+z^2-2\rho[|x|+|y|+|z|]-3\rho^2.$$

Le nombre ρ ayant été choisi assez petit pour que l'expression précédente ne s'annule pas lorsque le point (x, y, z) décrit Σ, la fonction $\frac{1}{r}$ des variables complexes a, b, c est holomorphe dans le domaine précédent, et son module reste inférieur à un nombre positif M quelle que soit la position du point (x, y, z) sur Σ. Par conséquent, si l'on développe cette fonction en série entière suivant les puissances de a, b, c, les modules des coefficients seront inférieurs (II, n° 352) aux coefficients correspondants du développement de

$$\frac{M}{\left(1-\frac{a}{\rho}\right)\left(1-\frac{b}{\rho}\right)\left(1-\frac{c}{\rho}\right)}.$$

Cette série est donc uniformément convergente lorsque le point (x, y, z) décrit Σ, pourvu que les valeurs absolues de a, b, c soient inférieures à ρ. En multipliant tous les termes par $\mu(x, y, z)$ et intégrant terme à terme le long de Σ, on obtient pour $V(a, b, c)$ une série entière ordonnée suivant les puissances de a, b, c; ce qui démontre la proposition.

Il est essentiel de remarquer que cette propriété n'est plus vraie pour un point de Σ; de part et d'autre d'une portion de cette surface, $V(a, b, c)$ représente deux fonctions analytiques distinctes, qui ne sont pas le prolongement analytique l'une de l'autre quand on traverse cette surface. Par exemple, dans le cas où Σ est une sphère de rayon R, si l'on a $\mu = 1$, à l'intérieur de la sphère on a $V = 4\pi R$, et $V = 4\pi \frac{R^2}{d}$ à l'extérieur, d étant la distance du point P au centre. La discontinuité des dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial a}, \cdots$ quand on traverse Σ, explique bien ce résultat (*voir* n° 538).

Pour étudier le potentiel $V(a, b, c)$ lorsque le point P s'éloigne indéfiniment, il suffit d'intervertir le rôle des deux systèmes de variables (x, y, z) et (a, b, c) dans le raisonnement précédent. Soit S une sphère de rayon ρ ayant pour centre l'origine, et contenant à l'intérieur la surface Σ; le point P étant extérieur à S, considérons $\frac{1}{r}$ comme fonction des variables complexes x, y, z, les modules de ces variables restant inférieurs à ρ. Dans ce domaine, le module de r^2 reste supérieur à

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 - 2\rho\{|a| + |b| + |c|\} - 3\rho^2 \\ &= \{|a| - \rho\}^2 + \{|b| - \rho\}^2 + \{|c| - \rho\}^2 - 6\rho^2; \end{aligned}$$

si l'on suppose le point $P(a, b, c)$ à l'extérieur d'une sphère S', concentrique à S, et de rayon $R = 5\rho$, on voit aisément que ce module est supérieur à $3\rho^2$. Par suite, la fonction $\frac{1}{r}$ des variables complexes x, y, z est holomorphe, et son module reste plus petit qu'un nombre positif déterminé, quelle que soit la position du point P en dehors de S', lorsque les modules de x, y, z sont inférieurs à ρ. On en conclut que $\frac{1}{r}$ peut être développée en une série entière ordonnée suivant les puissances de x, y, z, et *uniformé-*

ment convergente, lorsque le point (x, y, z) décrit la surface Σ

$$(3) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \Sigma A_{mnp} x^m y^n z^p,$$

le coefficient A_{mnp} ayant pour expression

$$A_{mnp} = (-1)^{m+n+p} \frac{\partial^{m+n+p}}{\partial a^m \, \partial b^n \, \partial c^p} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right) \frac{1}{m!\,n!\,p!}.$$

En multipliant les deux membres de la formule (3) par $\mu(x, y, z)$, et intégrant terme à terme, on obtient un développement de $V(a, b, c)$ qui est valable pour toute position du point P à l'extérieur de S'

$$(4) \quad V(a, b, c) = \frac{Q}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \Sigma B_{mnp} \frac{\partial^{m+n+p}}{\partial a^m \, \partial b^n \, \partial c^p} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right),$$

P et B_{mnp} étant des coefficients constants. On remarquera que tous les termes de ce développement sont des fonctions harmoniques de a, b, c, et que le coefficient Q est égal à l'intégrale $\int\int \mu \, d\sigma$, étendue à Σ.

Les mêmes calculs, appliqués au potentiel logarithmique de simple couche, prouvent que c'est une fonction analytique, mais le développement, pour des valeurs très grandes de a, b, commence par un terme en $Q \log\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)$.

527. Potentiel de double couche. — Soit MN une direction déterminée sur la normale en chaque point M d'une surface Σ, variant d'une manière continue avec la position du point M sur la surface entière, ou sur chaque position de surface; appelons φ l'angle de la direction MN avec la direction MP joignant le point M au point P de coordonnées (a, b, c). On démontre comme au n° 505 que l'intégrale double

$$(5) \qquad W(a, b, c) = \int\int_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos\varphi}{r^2} \, d\sigma = \int\int \mu \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} \, d\sigma,$$

où μ est une fonction qui varie d'une manière continue avec la position du point M sur Σ, est une fonction harmonique des coordonnées du point P, dans tout domaine n'ayant aucun point commun

avec Σ. On a donné à cette fonction le nom de *potentiel de double couche*, emprunté à la théorie du Magnétisme. C'est aussi une *fonction analytique*. Pour le démontrer, plaçons-nous dans les mêmes conditions qu'au numéro précédent; nous pouvons écrire

$$-\frac{\cos\varphi}{r^2} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a}\cos\alpha + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial b}\cos\beta + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial c}\cos\gamma,$$

α, β, γ étant les angles de la direction MN avec les axes.

Lorsque les modules des variables complexes a, b, c sont plus petits qu'un nombre positif convenable ρ, on a vu que la fonction $\frac{1}{r}$ pouvait être développée en une série entière, qui reste uniformément convergente lorsque le point (x, y, z) décrit Σ. Il en est évidemment de même des dérivées partielles de $\frac{1}{r}$ par rapport aux variables a, b, c, et par suite de $\frac{\cos\varphi}{r^2}$. Le raisonnement s'achève comme pour le potentiel de simple couche ([1]).

De la relation

$$\frac{\cos\varphi}{r^2} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\cos\gamma$$

on déduirait de même que la fonction $W(a, b, c)$ est développable en une série de la forme (4), lorsque $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ est supérieur à un nombre positif, convenablement choisi, mais il est à remarquer qu'il n'y aura pas de terme en $(a^2+b^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$, de sorte qu'à l'infini, W est de l'ordre de $(a^2+b^2+c^2)^{-1}$.

La fonction $W(a, b, c)$ est discontinue en un point de Σ. Prenons d'abord le cas simple où l'on a $\mu = 1$; l'intégrale ainsi obtenue

$$(6) \qquad W_1(a, b, c) = \int\int_{(\Sigma)} \mu\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma = \int\int_{(\Sigma)} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\,d\sigma,$$

appelée *intégrale de Gauss*, a une signification géométrique qui

---

([1]) Lorsque la surface Σ est analytique, si μ est aussi une fonction analytique sur Σ, les deux potentiels $V(a, b, c)$, $W(a, b, c)$ peuvent être prolongés analytiquement à travers la surface Σ (BRUNS, *Journal de Crelle*, t. 81; ERHARD SCHMIDT, *Matematische Annalen*, t. LXVIII).

met en évidence la discontinuité. Étant donnés un point O et une portion de surface σ, telle qu'une demi-droite issue de O ne puisse la rencontrer en plus d'un point, le lieu des demi-droites issues de O et passant par un point de σ est un cône solide; l'aire découpée par ce cône sur la sphère de rayon *un* et de centre O est la mesure de *l'angle solide* sous lequel on voit du point O la surface σ. Cela posé, l'expression $\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma$ est égale à $\pm$ l'angle solide sous lequel on voit du point P l'élément de surface $d\sigma$, car $\cos\varphi\,d\sigma$ est, au signe près, l'élément d'aire découpé sur la sphère de rayon r et de centre P par le cône élémentaire de sommet P, ayant pour base l'élément $d\sigma$. Quant au signe, il est fixé par la convention suivante : Appelons côté positif de Σ le côté qui correspond à la direction choisie sur la normale, et côté négatif le côté opposé; il est évident que $\cos\varphi\,\frac{d\sigma}{r^2}$ est positif si une demi-droite issue de P et traversant l'élément de surface passe du côté positif au côté négatif, et négatif dans le cas contraire. On voit immédiatement d'après cela quelle est la valeur de l'intégrale (6); c'est la somme des angles solides élémentaires, affectés d'un signe convenable, sous lesquels on voit du point P les divers éléments de Σ. Supposons en particulier que Σ soit une surface fermée et qu'on ait choisi pour direction de MN la normale intérieure; $W_1(a, b, c)$ est égal à 4π si le point P est à l'intérieur du domaine D limité par Σ, et à zéro si le point P est à l'extérieur. En un point non singulier P pris sur Σ, l'intégrale est égale à 2π; en un point où la surface n'admet pas un plan tangent unique, l'intégrale est égale à la mesure de l'angle solide α formé par les tangentes à la surface issues de ce point ([1]).

Revenons maintenant au cas général, en supposant toujours que la surface Σ est fermée, et qu'on a choisi la direction de la normale intérieure. On démontre comme plus haut (n° 505) que

---

([1]) Ces résultats se déduisent aussi très aisément des formules du n° 528. Si le point P est à l'extérieur du domaine D, $U = \frac{r}{1}$ est harmonique dans ce domaine, et la formule (12) donne $W_1 = 0$. Si le point P est à l'intérieur de D, la formule (14) appliquée à la fonction harmonique $U = 1$, donne $W_1 = 4\pi$. Si le point P est sur Σ, on appliquera la formule (12) à la fonction $U = \frac{r}{1}$ qui est harmonique dans la portion du domaine D extérieur à une sphère de rayon ρ ayant pour centre le point P, et l'on fera décroître indéfiniment le rayon ρ de cette sphère.

l'intégrale

$$I(P) = \int\int_{(\Sigma)} [\mu - \mu_0] \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma,$$

où μ_0 est la valeur de μ en un point M_0 de Σ, est une fonction continue des coordonnées du point P en ce point M_0, de sorte que la différence $I(P) - I(M_0)$ tend vers zéro en même temps que la distance M_0P. Cela étant, appelons W_0 la valeur de l'intégrale (5) elle-même lorsque le point P coïncide avec le point M_0, et W_{0i}, W_{0e} les limites vers lesquelles tend $W(a, b, c)$ lorsque le point P tend vers le point M_0 en restant à l'intérieur ou à l'extérieur de Σ.

Lorsque P est en M_0, I est égal à $W_0 - 2\pi\mu_0$; lorsque P tend vers M_0 en restant à l'intérieur de Σ, le premier terme de I a pour limite W_{0i}, tandis que le coefficient de μ_0 est constamment égal à -4π. Au contraire, lorsque P tend vers M_0 en étant à l'extérieur de Σ, le premier terme de I a pour limite W_{0e}, et le coefficient de μ_0 est nul. La fonction I étant continue au point M_0, on a donc $W_0 - 2\pi\mu_0 = W_{0i} - 4\pi\mu_0 = W_{0e}$, d'où l'on déduit les deux relations tout à fait pareilles à celles du n° 505 :

$$(7) \qquad W_{0i} = W_0 + 2\pi\mu_0, \qquad W_{0e} = W_0 - 2\pi\mu_0.$$

En un point singulier, ces relations doivent être remplacées par les suivantes

$$(8) \qquad W_{0i} = W_0 + (4\pi - \alpha)\mu_0, \qquad W_{0e} = W_0 - \alpha\mu_0,$$

α ayant la signification expliquée plus haut.

528. **Seconde formule de Green.** — Étant données deux fonctions quelconques $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, on a identiquement

$$\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Si les fonctions φ et ψ sont régulières dans un domaine borné D, limité par une ou plusieurs surfaces fermées, et continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre sur les surfaces qui limitent ce domaine, on a, d'après la première formule de

Green (J, n° **144**),

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint_{(D)} (\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi)\,dx\,dy\,dz \\ &\quad = \iint_{(\Sigma)} \varphi \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dy\,dz + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dz\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,dx\,dy\right), \\ &\qquad - \iint_{(\Sigma)} \psi \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy\,dz + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dz\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dx\,dy\right), \end{aligned}\right.$$

les intégrales doubles étant étendues au côté *extérieur* de la surface Σ qui limite D. Soient α, β, γ les angles que fait avec les axes la direction de la normale *intérieure* en un point de Σ; la première intégrale double peut s'écrire

$$-\iint_{(\Sigma)} \varphi \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cos\gamma\right) d\sigma = -\iint_{(\Sigma)} \varphi\,\frac{d\psi}{dn}\,d\sigma.$$

On peut transformer de même la seconde intégrale double, et la formule (9) devient

$$(10)\quad \iiint_{(D)} (\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi)\,dx\,dy\,dz + \iint_{(\Sigma)} \left(\varphi\,\frac{d\psi}{dn} - \psi\,\frac{d\varphi}{dn}\right) d\sigma = 0,$$

les dérivées $\frac{d\varphi}{dn}$, $\frac{d\psi}{dn}$ étant prises suivant la direction de la normale intérieure, c'est-à-dire qui pénètre dans le domaine D.

Lorsque les fonctions φ et ψ sont deux fonctions harmoniques dans D, U et V, l'intégrale triple disparaît et il reste la relation

$$(11)\quad \iint_{(\Sigma)} \left(U\,\frac{dV}{dn} - V\,\frac{dU}{dn}\right) d\sigma = 0.$$

On obtient encore deux formules importantes, en supposant $\psi = 1$, $\varphi = U$, ou $\varphi = U^2$, U étant une fonction harmonique,

$$(12)\quad \iint_{(\Sigma)} \frac{dU}{dn}\,d\sigma = 0,$$

$$(13)\quad \iiint_{(D)} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz + \iint_{(\Sigma)} U\,\frac{dU}{dn}\,d\sigma = 0;$$

la première caractérise les fonctions harmoniques (n° **506**).

Soient $P(a, b, c)$ un point du domaine D et $U(x, y, z)$ une fonction harmonique dans ce domaine. Les deux fonctions U et

$V = \frac{1}{r}$, où r est la distance du point P à un point variable (x, y, z), sont harmoniques dans la portion du domaine D extérieure à une sphère S de centre P et de rayon ρ assez petit pour qu'elle soit tout entière à l'intérieur de D. Appliquons la formule (11) à ce domaine limité par Σ et S; en faisant tendre ρ vers zéro et en raisonnant comme au n° 507, on obtient la formule

$$(14) \qquad U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int\int_{(\Sigma)} \left[U \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} - \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} \right] d\sigma,$$

toute pareille à la formule (13) du n° 507. Le facteur 2π a été remplacé par 4π, qui mesure l'aire d'une sphère de rayon *un*, et $\log\frac{1}{r}$ par $\frac{1}{r}$. En particulier, si la surface Σ est la surface d'une sphère S de rayon R ayant le point P pour centre, on a tout le long de cette sphère $r = R$, $\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = \frac{1}{R^2}$, et l'on obtient la *formule de la moyenne* pour les fonctions harmoniques de trois variables

$$(15) \qquad U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\int_{(S)} U \, d\sigma.$$

On en déduirait, comme plus haut (n° 507), qu'une fonction harmonique de trois variables ne peut avoir ni maximum, ni minimum.

Le second membre de la formule (14) est la somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche, c'est-à-dire de deux fonctions analytiques (n°s 526-527). On en conclut que *toute fonction harmonique est une fonction analytique*. En effet, étant donné un point P, pris dans le domaine D où la fonction U est harmonique, on peut toujours appliquer la formule (14) en prenant pour Σ une surface fermée entourant le point P et située tout entière dans ce domaine D. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point quelconque de D; dans le voisinage de ce point, la fonction harmonique $U(x, y, z)$ peut être développée en série entière ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. L'ensemble des termes de degré n est un polynome

$$V_n(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

en désignant par $V_n(x, y, z)$ un polynome harmonique homogène de degré n [1] (n° 525).

La formule (14) permet d'étendre aux fonctions harmoniques de l'espace le second théorème de M. Picard (p. 173). Soit $V(x, y, z)$ une fonction harmonique dans un domaine D, à l'exception d'un point O de ce domaine, où elle devient égale à $+\infty$. La famille de surfaces $V(x, y, z) = K$ est alors formée, pour des valeurs très grandes de K, de surfaces fermées entourant le point O et tendant vers ce point lorsque K augmente indéfiniment. La dérivée $\frac{dV}{dn}$ prise suivant le côté extérieur de l'une de ces surfaces est négative et l'intégrale $\int\int \frac{dV}{dn}\,d\sigma$, prise suivant le côté extérieur, a une valeur négative $-4\pi H$, indépendante de K, puisque la fonction V est harmonique dans la région comprise entre deux quelconques de ces surfaces. Cela posé, soient S une sphère de centre O située dans le domaine D, $M(a, b, c)$ un point quelconque intérieur à S autre que O, Σ une des surfaces $V = K$, intérieure à S, et laissant le point M à l'extérieur. La formule (14) donne pour $V(a, b, c)$ la somme de deux intégrales, l'une prise suivant le côté intérieur de S, l'autre suivant le côté extérieur de Σ. L'intégrale prise suivant le côté intérieur de S représente une fonction $U(a, b, c)$ harmonique dans S. L'intégrale prise suivant le côté extérieur de Σ se réduit à $-\frac{1}{4\pi}\int\int_{(\Sigma)} \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\,d\sigma$. La dérivée $\frac{dV}{dn}$ ayant un signe constant sur Σ, on peut appliquer à cette intégrale le théorème de la moyenne, lorsque la surface Σ se réduit au point O, cette intégrale se réduit à $\frac{H}{\rho}$, ρ désignant la distance OM. La fonction $V(a, b, c)$ est donc de la forme $\frac{H}{\rho} + U(a, b, c)$, où $U(a, b, c)$ est harmonique dans le domaine D.

La formule (14) permet aussi de répondre affirmativement à la question suivante : *Soit* U *une fonction continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans un domaine* D; *on sait de plus que les dérivées partielles du second ordre sont continues et satisfont à l'équation de Laplace en tous les points du domaine* D, *sauf* PEUT-ÊTRE *le long de certaines surfaces en nombre fini situées dans ce domaine. Peut-on en conclure que* U *est harmonique dans tout le domaine?*

Soit S une des surfaces du domaine D, le long desquelles les dérivées secondes de U peuvent être supposées discontinues. D'un point A de cette surface pour centre décrivons une sphère Σ de rayon assez petit pour qu'elle soit située tout entière dans D, et ne renferme pas d'autre surface analogue à S. La portion S' de S intérieure à Σ décompose l'intérieur de la sphère en deux domaines D' et D'', limités respectivemeet par S' et par deux portions Σ' et Σ'' de Σ. Dans chacun de ces deux domaines la fonction U est

[1] On a étendu aux séries de cette nature les théorèmes connus sur les séries entières d'une variable complexe (*voir* APPELL, *Acta mathematica*, t. IV, 1884, p. 313-374).

harmonique; désignons par U′ et U″ les deux fonctions harmoniques avec lesquelles elle coïncide dans les deux domaines D′ et D″ respectivement. Nous voulons montrer que ces deux fonctions U′ et U″ sont le prolongement analytique l'une de l'autre quand on traverse S′ ou, ce qui revient au même, qu'il existe une fonction harmonique dans le domaine D′ + D″, qui coïncide avec U′ dans D′ et avec U″ dans U″.

Soit P un point quelconque du domaine D′; U′ étant harmonique dans D′, on a, d'après la formule (14),

$$U'_P = -\frac{1}{4\pi}\int\int_{(\Sigma')}\left[\frac{1}{r}\frac{dU'}{dn} - U'\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right]d\sigma$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\int_{S'}\left[\frac{1}{r}\frac{dU'}{dn'} - U'\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn'}\right]d\sigma,$$

$\frac{d}{dn'}$ désignant la dérivée en un point de S′ suivant la normale intérieure à D′. Les deux fonctions U″ et $\frac{1}{r}$ étant harmoniques dans le domaine D″, le second membre de la formule précédente est nul quand on y remplace U′ par U″, Σ′ par Σ″, et $\frac{d}{dn'}$ par la dérivée $\frac{d}{dn''}$ prise suivant la normale intérieure à D″ en un point de S′. Or, la fonction donnée U étant continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre le long de S′, on a $\frac{dU'}{dn'} + \frac{dU''}{dn''} = 0$; en ajoutant les deux égalités supposées écrites, on a donc

$$U'_P = -\frac{1}{4\pi}\int\int_{(\Sigma')}\left[\frac{1}{r}\frac{dU'}{dn} - U'\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right]d\sigma$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\int_{(\Sigma'')}\left[\frac{1}{r}\frac{dU''}{dn} - U'\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right]d\sigma.$$

Il est clair qu'on aurait la même expression pour U''_P, P étant un point intérieur à D″. Or le second membre de cette formule, considéré comme fonction des coordonnées du point P, est harmonique à l'intérieur de Σ : ce qui démontre le résultat énoncé plus haut.

529. Problème intérieur et problème extérieur. — Le problème de Dirichlet intérieur dans l'espace se pose comme le problème analogue dans le plan. Étant donné un domaine borné D, limité par une ou plusieurs surfaces fermées, il s'agit de trouver une fonction harmonique dans D, prenant des valeurs données sur les surfaces limites, ces valeurs formant une suite continue sur chacune de ces surfaces. L'absence de maximum et de minimum pour une fonction harmonique prouve encore que ce problème admet

au plus une solution, et la démonstration de Riemann pour prouver l'existence d'une solution est soumise aux mêmes objections que dans le cas du plan. Le lecteur rétablira facilement de lui même cette démonstration.

Avant de nous occuper du *problème extérieur*, nous devons donner d'abord quelques définitions. Soit $U(x, y, z)$ une fonction harmonique dans le voisinage de tout point P situé en dehors d'une sphère de rayon R ayant pour centre l'origine. La fonction obtenue par la transformation de Lord Kelvin

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} U\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

est une solution de l'équation $\Delta V = 0$, régulière en tout point intérieur à la sphère de rayon $\frac{1}{R}$, ayant pour centre l'origine, sauf peut-être pour l'origine.

Si cette fonction $V(x, y, z)$ est régulière aussi à l'origine, elle est développable en série entière de la forme

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(x, y, z),$$

et par conséquent, la fonction $U(x, y, z)$, qui se déduit de $V(x, y, z)$, de la même façon que V se déduit de U, est développable en série de la forme

$$U(x, y, z) = \frac{A_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} V_n\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \dots\right),$$

pourvu que $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ soit supérieur à un nombre positif convenable. On dit alors que *la fonction harmonique* U *est régulière et nulle à l'infini*. Il en est ainsi, pour un potentiel de simple couche ou de double couche (nos 526-527). Les formules (4) et (16) ne diffèrent en effet que par les notations, car on a remarqué (no 525) que les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de $\frac{1}{r}$ sont de la forme

$$V_n(x, y, z)(x^2+y^2+z^2)^{-n-\frac{1}{2}},$$

$V_n(x, y, z)$ étant un polynome harmonique et homogène de degré n.

D'une façon générale, nous dirons qu'une fonction harmonique

$U(x, y, z)$ est *régulière à l'infini*, s'il existe une constante C, telle que la différence $U(x, y, z) - C$ soit régulière et nulle à l'infini. Cette fonction tend vers la valeur C lorsque la distance du point (x, y, z) à l'origine croît indéfiniment.

Cela posé, considérons, pour fixer les idées, une seule surface fermée Σ, et soit $\mathcal{D}$ le domaine indéfini extérieur à Σ. Le problème extérieur, relatif à la surface Σ, s'énonce ainsi : *Trouver une fonction harmonique dans $\mathcal{D}$, régulière et* NULLE *à l'infini prenant sur Σ une suite continue de valeurs données.*

Le problème ainsi posé se ramène immédiatement au problème intérieur. Supposons en effet que l'origine soit à l'intérieur de la surface Σ, et effectuons une inversion avec le point O pour pôle et l'unité pour module. La surface Σ est remplacée par une surface fermée Σ', et le domaine $\mathcal{D}$ par le domaine $\mathcal{D}'$ intérieur à Σ'. D'autre part, à la fonction harmonique cherchée $U(x, y, z)$, la transformation de Lord Kelvin fait correspondre une fonction $V(x, y, z)$, harmonique dans $\mathcal{D}'$, et prenant sur Σ' des valeurs connues qui se déduisent des valeurs données de U sur Σ. On obtiendra donc cette fonction $V(x, y, z)$, et par suite la fonction $U(x, y, z)$ elle-même, par la résolution du problème intérieur.

On voit par là qu'il y a une différence essentielle entre le problème extérieur dans le cas du plan et dans le cas de l'espace. Si, dans ce dernier cas, on n'imposait pas à la fonction harmonique $U(x, y, z)$ la condition d'être nulle à l'infini, le problème serait indéterminé.

Soit en effet $U(x, y, z)$ la fonction harmonique qui donne la solution du problème extérieur proprement dit pour la surface Σ; soit, d'autre part, $U_1(x, y, z)$ la fonction harmonique dans $\mathcal{D}$, régulière et nulle à l'infini, prenant la valeur *un* sur Σ. La fonction $U(x, y, z) + C[1 - U_1(x, y, z)]$ est harmonique dans $\mathcal{D}$, régulière à l'infini, et prend les mêmes valeurs que $U(x, y, z)$ sur Σ, quelle que soit la constante C; elle prend la valeur C à l'infini. Pour que le problème soit complètement terminé, il faut se donner la valeur de la fonction harmonique cherchée a l'infini; on obtient le problème extérieur ordinaire en choisissant *zéro* pour la valeur de U à l'infini. Par exemple, lorsque Σ est une sphère de rayon R, toutes les fonctions $1 + C\left(\frac{R}{r} - 1\right)$, où r désigne la distance au centre, sont harmoniques à l'extérieur, régulières à l'infini, et prennent la valeur *un* sur la sphère; il faut prendre $C = 1$ pour avoir celle qui est nulle à l'infini.

Remarque. — Soient U et V deux fonctions harmoniques à l'extérieur de Σ, régulières et *nulles* à l'infini. On peut encore appliquer à ces deux fonctions la formule (11), à condition de représenter par $\frac{d}{dn}$ la dérivée

prise suivant la normale *extérieure* à Σ. En effet, soit S une sphère ayant pour centre un point fixe O, et de rayon R assez grand pour que la surface Σ soit à l'intérieur de cette sphère. Les deux fonctions U et V étant harmoniques dans le domaine limité par S et Σ, on peut appliquer la formule (11) à l'ensemble des deux surfaces S et Σ. Si maintenant on fait croître indéfiniment R, l'intégrale double étendue à S est infiniment petite, puisque U et V sont nuls à l'infini, et que $\frac{dU}{dn}$ et $\frac{dV}{dn}$ sont de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$.

Considérons en particulier une fonction $U(x, y, z)$, harmonique à l'extérieur de Σ, nulle à l'infini. et la fonction $\frac{1}{r}$, r étant la distance du point (x, y, z) à un point fixe $P(a, b, c)$ extérieur à Σ. Ces deux fonctions sont régulières à l'extérieur de Σ et d'une sphère σ de centre P et de rayon ρ. Appliquons la formule (11) à l'ensemble des deux surfaces Σ et σ, puis faisons tendre vers zéro le rayon ρ de σ; nous vérifions encore que $U(a, b, c)$ est donnée par la formule (14), les dérivées étant prises suivant la normale extérieure à Σ (cf. *Exercice* 6, p. 238).

530. Solution du problème pour la sphère. — La solution du problème intérieur pour la sphère est donnée par une formule analogue à l'intégrale de Poisson. Soit $U(x, y, z)$ une fonction harmonique à l'intérieur d'une sphère S de rayon R, prenant des valeurs données sur la surface. Si l'on connaissait aussi la valeur de $\frac{dU}{dn}$ en chaque point de la surface, la valeur de cette fonction en un point intérieur de coordonnées (a, b, c) serait donnée par la formule (14). On élimine $\frac{dU}{dn}$ au moyen d'un artifice tout pareil à celui du n° 508.

Soient P_1 le point conjugué harmonique de P par rapport aux extrémités du diamètre passant par P, r_1 la distance de P_1 au point (x, y, z). La fonction $\frac{1}{r_1}$ étant harmonique à l'intérieur de S, on a la relation

$$(17) \qquad \frac{1}{4\pi}\iint_{(S)}\left[U\frac{d\left(\frac{1}{r_1}\right)}{dn} - \frac{1}{r_1}\frac{dU}{dn}\right]d\sigma = 0.$$

Mais on a, en tout point de la sphère S, $\frac{r_1}{r} = \frac{R}{\rho}$, ρ étant la distance du point P au centre de la sphère.

En ajoutant les formules (14) et (17), après avoir multiplié la seconde par $-\frac{R}{\rho}$, on obtient la relation

$$(18) \qquad U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\iint_{(S)} U\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} - \frac{R}{\rho}\frac{d\left(\frac{1}{r_1}\right)}{dn}\right]d\sigma,$$

où l'intégrale ne dépend plus que de la valeur de U sur la surface de la sphère. Soient ρ_1 la distance de P_1 au centre de S, φ et φ_1 les angles de la normale intérieure en un point M de la surface S avec MP et MP_1. Nous avons les relations

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = \frac{\cos\varphi}{r^2}, \qquad \frac{d\left(\frac{1}{r_1}\right)}{dn} = \frac{\cos\varphi_1}{r_1^2}, \qquad \rho\rho_1 = R^2, \qquad \frac{r_1}{r} = \frac{R}{\rho},$$
$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi, \qquad \rho_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\varphi_1,$$

d'où l'on déduit encore, en éliminant φ, φ_1, r_1, ρ_1,

$$\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{R}{\rho}\frac{\cos\varphi_1}{r_1^2} = \frac{R^2-\rho^2}{Rr^3},$$

et la formule (18) devient

$$(19) \qquad U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\int\int_{(S)} U\frac{R^2-\rho^2}{Rr^3}\,d\sigma.$$

La démonstration précédente suppose que le problème intérieur admet une solution, et de plus que $\frac{dU}{dn}$ existe sur la surface, ce qui n'a pas toujours lieu. Nous allons vérifier directement que *la fonction* U(a, b, c) *représentée par la formule* (19) *fournit la solution du problème de Dirichlet pour la sphère*, quelle que soit la fonction continue donnée U sur la surface. Cette formule peut, en effet, s'écrire

$$(20) \qquad U(a, b, c) = \frac{1}{2\pi}\int\int_{(S)} U\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma - \frac{1}{4\pi R}\int\int_{(S)}\frac{U}{r}\,d\sigma$$

d'après la relation $R^2 - \rho^2 = 2Rr\cos\varphi - r^2$. Le second membre est la différence entre un potentiel de double couche et un potentiel de simple couche, par conséquent une fonction harmonique. Soient K′ la valeur du potentiel de simple couche $\frac{1}{4\pi R}\int\int\frac{U}{r}\,d\sigma$ lorsque le point P coïncide avec un point M′ de la surface de la sphère et U′ la valeur donnée de U en ce point. Lorsque le point P intérieur à la sphère tend vers le point M′, le potentiel de double couche tend vers la limite U′ + K′ (n° 527), car on a $2R\cos\varphi = r$ pour un point quelconque M de la sphère lorsque P coïncide avec le point M′. D'autre part, la limite de la seconde intégrale est — K′, puisque le potentiel de simple couche est continu sur la surface (n° 526). La limite de U(a, b, c) est donc égale à U′ lorsque le point P tend vers le point M′ et la formule (20) donne bien la solution du problème *intérieur*. On verrait de même que la

formule

$$(21)\qquad U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi R}\iint_{(S)} U\,\frac{\rho^2 - R^2}{r^3}\,d$$

donne la solution du problème *extérieur* pour la sphère.

On déduit de la formule (19) les mêmes conséquences que de l'intégrale de Poisson (n° 508). Si la fonction donnée U est positive en tout point de la surface de la sphère, $U(a, b, c)$ est aussi positif pour tout point intérieur, et comme r varie entre $R - \rho$ et $R + \rho$, on aura deux limites pour $U(a, b, c)$ en remplaçant r par $R - \rho$, puis par $R + \rho$, dans la formule; d'ailleurs l'intégrale $\iint_{(S)} U\,d\sigma$ est égale, d'après le théorème de la moyenne, à $4\pi R^2 U_0$, U_0 étant la valeur de U au centre de la sphère. Nous avons donc les deux inégalités

$$\frac{R(R-\rho)}{(R+\rho)^2}U_0 < U_P < \frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}U_0$$

et comme U_0 est compris aussi entre les deux termes extrêmes, la valeur absolue de $U_P - U_0$ est inférieure à la différence de ces deux termes, c'est-à-dire à $U_0\,\frac{R(6R^2\rho + 2\rho^3)}{(R^2-\rho^2)^2}$. Les deux termes de cette fraction sont respectivement du troisième et du quatrième degré en R; elle tend donc vers zéro si, ρ restant fixe, on fait croître R indéfiniment. On en conclut *qu'une fonction harmonique dans tout l'espace, qui est toujours positive, est une constante*, et, par suite, qu'une fonction harmonique dans tout l'espace, dont la valeur absolue est bornée, se réduit à une constante (n° 508). Cette extension du théorème de Liouville est due à M. Picard. Le théorème de Harnack, dont la démonstration repose sur l'intégrale de Poisson, s'étend de même sans difficulté aux fonctions harmoniques de trois variables.

531. **Les fonctions de Laplace.** — Supposons que la sphère S ait pour centre l'origine O, et l'unité pour rayon. Modifiant un peu les notations, désignons par x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point P intérieur à la sphère, et par ρ, θ, ψ ses coordonnées polaires, liées aux premières par les relations

$$x = \rho\sin\theta\cos\psi,\qquad y = \rho\sin\theta\sin\psi,\qquad z = \rho\cos\theta.$$

La formule (19) prend la forme équivalente

$$(22)\quad U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{(1-2\rho\cos\gamma+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} f(\theta', \psi')\sin\theta'\, d\psi';$$

les coordonnées d'un point variable M de la sphère sont $(1, \theta', \psi')$, et $f(\theta', \psi')$ représente la fonction donnée U sur la surface de la sphère, exprimée au moyen des variables θ', ψ'; γ est l'angle du rayon OM avec la direction OP, et $\cos\gamma$ a pour expression, d'après la relation fondamentale de la Trigonométrie sphérique,

$$(23)\qquad \cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi' - \psi).$$

D'après une formule déjà démontrée (I, p. 464), on a

$$(24)\quad \frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\gamma+\rho^2}} = P_0 + P_1(\cos\gamma)\rho + \ldots + P_n(\cos\gamma)\rho^n + \ldots,$$

P_n étant le $n^{\text{ième}}$ polynome de Legendre. En ajoutant cette formule à celle qu'on obtient en différentiant par rapport à ρ, et multipliant les deux membres par 2ρ, il vient

$$(24)'\quad \frac{1-\rho^2}{(1-2\rho\cos\gamma+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = P_0 + 3P_1(\cos\gamma)\rho + \ldots + (2n+1)P_n(\cos\gamma)\rho^n + \ldots.$$

Cette série est *uniformément convergente*, lorsque le point M décrit la sphère S. En effet, d'après la formule rappelée tout à l'heure, $P_n(\cos\gamma)$ est égal au coefficient de ρ^n dans le développement du produit $(1-\rho e^{\gamma i})^{-\frac{1}{2}}(1-\rho e^{-\gamma i})^{-\frac{1}{2}}$. Si l'on développe chacun des facteurs séparément, les coefficients de $\rho^p e^{p\gamma i}$ et de $\rho^p e^{-p\gamma i}$ sont des nombres *positifs*, et, par conséquent, on ne peut qu'augmenter le module du coefficient d'une puissance quelconque de ρ en remplaçant $e^{\gamma i}$ et $e^{-\gamma i}$ par l'unité. La valeur absolue du coefficient de ρ^n dans le produit est donc inférieure au coefficient de ρ^n dans le développement de $(1-\rho)^{-1}$, c'est-à-dire à l'unité. Il s'ensuit que les termes de la série (24)' sont inférieurs en valeur absolue aux termes de la série $\Sigma(2n+1)\rho^n$, qui est convergente, puisqu'on suppose $\rho < 1$. En multiplant les deux membres de la formule (24)' par $f(\theta', \psi')\sin\theta'$, et intégrant terme à terme, il vient

$$(25)\quad U(x, y, z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\rho^n\int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma) f(\theta', \psi')\sin\theta'\, d\psi'.$$

Le polynome $P_n(\cos\gamma)$ ne contient que des termes en $\cos\gamma$ dont les exposants sont de même parité que n; on peut donc le transformer en un polynome homogène en $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, ne contenant que des puissances paires de $\sin\gamma$. En remplaçant $\sin^2\gamma$ par

$$\sin^2\theta(\cos^2\psi + \sin^2\psi) + \cos^2\theta - \cos^2\gamma,$$

et $\cos\gamma$ par son expression (23), on voit en définitive que $P_n(\cos\gamma)$ est une fonction entière et homogène de degré n en $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\psi$, $\sin\theta\sin\psi$, dont les coefficients sont fonctions de θ' et de ψ'. Le coefficient de ρ^n dans la série (25) est une expression de même nature, et l'on obtient ainsi un développement de la fonction cherchée $U(x, y, z)$ dont chaque terme et un polynome homogène en x, y, z d'un degré marqué par son indice. La fonction $U(x, y, z)$ étant harmonique, il est clair que tous ces polynomes sont aussi harmoniques. Nous écrirons ce développement

$$U(x, y, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) Y_n \rho^n, \tag{26}$$

Y_n étant un polynome homogène de degré n de $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\psi$, $\sin\theta\sin\psi$, qui se déduit d'un polynome harmonique et homogène V_n de degré n en y remplaçant x, y, z par $\sin\theta\cos\psi$, $\sin\theta\sin\psi$, $\cos\theta$ respectivement. Ces polynomes Y_n sont les fonctions de Laplace; d'après leur définition même, il y a $2n+1$ fonctions Y_n linéairement distinctes d'ordre n.

La formule (26) n'est démontrée que pour les points intérieurs à la sphère. Si la série du second membre est convergente en un point M de la surface, de coordonnées $(1, \theta, \psi)$, la fonction $U(x, y, z)$ a pour limite $f(\theta, \psi)$ lorsque le point P tend vers le point M; en supposant que le point P reste sur le rayon OM, on a donc, d'après le théorème d'Abel (I, n° 182),

$$f(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) Y_n(\theta, \psi), \tag{27}$$

$Y_n(\theta, \psi)$ étant égal à l'intégrale double

$$Y_n(\theta, \psi) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma) f(\theta', \psi') \sin\theta' \, d\theta'. \tag{28}$$

Cette formule nous donne un développement d'une fonction continue sur la surface d'une sphère, tout à fait analogue à la série de Fourier pour une fonction d'une variable. Laissant de côté pour le moment la question de convergence, nous remarquerons seulement qu'on a, d'après ce qui précède, quelle que soit la fonction continue donnée sur la surface de la sphère,

$$(29) \qquad f(\theta, \psi) = \lim_{\rho=1} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) Y_n(\theta, \psi) \rho^n \right].$$

Application. — M. Picard a déduit de cette formule (29) une extension élégante du théorème de Weierstrass (I, n° 206,), aux fonctions continues de deux variables. Soient U une fonction continue quelconque sur la surface de la sphère S, et $f(\theta, \psi)$ la fonction obtenue en l'exprimant au moyen des variables θ et ψ. La fonction qui est représentée par la série (26) à l'intérieur de la sphère, et qui est égale à $f(\theta, \psi)$ sur la surface, est continue dans tout ce domaine fermé, et par suite uniformément continue. Étant donné un nombre positif ε, on peut trouver un nombre $\rho_1 < 1$ tel que la différence

$$f(\theta, \psi) - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) Y_n(\theta, \psi) \rho_1^n$$

soit moindre en valeur absolue que $\frac{\varepsilon}{3}$ pour tous les points de la sphère. D'ailleurs, la série dont le terme général est $(2n+1) Y_n \rho_1^n$ est elle-même uniformément convergente, car, d'après l'expression (28) de Y_n, on a

$$|Y_n| < H,$$

H étant le maximum de $|f(\theta, \psi)|$. On peut donc prendre dans cette série la somme d'un nombre fini de termes

$$\Phi = Y_0 + 3 Y_1 + \ldots + (2n+1) Y_n,$$

qui diffère de la somme de la série de moins de $\frac{\varepsilon}{3}$, quels que soient θ et ψ.

Enfin, cette somme Φ peut elle-même être développée en série entière en θ et ψ, et l'on peut prendre un nombre fini de termes dans cette série, c'est-à-dire un polynome $Q(\theta, \psi)$ en θ et ψ tel qu'on ait

$$|\Phi - Q(\theta, \psi)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

pour tous les systèmes de valeurs de θ et de ψ compris entre 0 et 2π. Il est clair que la différence $f(\theta, \psi) - Q(\theta, \psi)$ sera inférieure en valeur absolue à ε pour tous ces systèmes de valeurs.

Si la fonction $f(\theta, \psi)$, au lieu d'être déterminée sur toute la sphère, n'est déterminée que sur une partie, on peut toujours compléter cette détermination sur le reste de la sphère en respectant la continuité, et cela d'une

infinité de manières. La conclusion précédente s'applique encore, et l'on en déduirait comme au n° 206 (t. I), que *toute fonction de deux variables, continue dans un domaine* A, *peut être représentée dans ce domaine par une série uniformément convergente de polynomes.*

532. Propriétés des fonctions Y_n. — Les polynomes $V_m(x, y, z)$ sont les seules fonctions homogènes qui soient harmoniques à l'intérieur d'une sphère ayant pour centre l'origine. En effet, toute fonction harmonique dans cette sphère est développable en série de polynomes V_m, et il est clair que la somme de cette série ne peut être homogène que si elle se réduit à un seul terme. Le long d'une sphère de centre O et de rayon R, la dérivée $\frac{dV_m}{dn}$ prise suivant la normale intérieure est égale, d'après l'homogénéité, à $-\frac{m}{R}V_m$. Si l'on applique la formule (11) à deux polynomes V_p, $V_q (p \lesseqgtr q)$, à l'intérieur d'une sphère de centre O, on voit que l'intégrale double $\int\int V_p V_q \, d\sigma$, étendue à la surface de la sphère, est nulle : ce qu'on peut encore écrire

$$(30) \qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_p(\theta, \psi)\, Y_q(\theta, \psi) \sin\theta \, d\theta \, d\psi = 0 \qquad (p \neq q).$$

La fonction harmonique $V_m(x, y, z) = \rho^m Y_m(\theta, \psi)$ se réduisant à $Y_m(\theta, \psi)$ sur la sphère S de rayon un, on a, d'après la formule générale (25), si ρ est inférieur à un,

$$\rho^m Y_m(\theta, \psi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \rho^n \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, Y_m(\theta', \psi') \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi',$$

ce qui entraîne les relations

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, Y_m(\theta', \psi') \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi' = 0, \qquad \text{si} \quad m \neq n,$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_m(\cos\gamma)\, Y_m(\theta', \psi') \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi' = \frac{4\pi}{2m+1} Y_m(\theta, \psi).$$

En rapprochant ces formules de la formule (24), qui donne le développement de $\frac{1}{r}$, on en conclut qu'on a, en supposant $\rho < 1$,

$$(31) \qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} Y_m(\theta', \psi') \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi' = \frac{4\pi\rho^m}{2m+1} Y_m(\theta, \psi);$$

cette égalité subsiste pour $\rho = 1$, car le premier membre, qui est un potentiel de simple couche, est une fonction continue sur la sphère elle-même. On a donc aussi

$$(32) \qquad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_m(\theta', \psi') \frac{\sin\theta'}{\sqrt{2 - 2\cos\gamma}} d\theta' \, d\psi' = \frac{4\pi}{2m+1} Y_m(\theta, \psi),$$

$\cos\gamma$ étant donné par la formule (23). Le potentiel de simple couche dû à une couche de densité $V_m(\theta', \psi')$, étendue sur la sphère est donc égal, à l'intérieur et sur la surface de la sphère, à $\frac{4\pi\rho^m}{2m+1} Y_m(\theta, \psi)$ (voir *Exercice* 7, p. 238).

Réciproquement, toute fonction $f(\theta, \psi)$ satisfaisant à une relation de la forme

$$(33) \qquad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta', \psi') \frac{\sin\theta'}{\sqrt{2 - 2\cos\gamma}} d\theta' \, d\psi' = 4\pi K f(\theta, \psi),$$

où K est un facteur constant, est une des fonctions $Y_m(\theta, \psi)$. Considérons, en effet, le potentiel de simple couche

$$V(\rho, \theta, \psi) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta', \psi') \sin\theta'}{r} d\theta' \, d\psi',$$

où r désigne la distance du point de coordonnées polaires (ρ, θ, ψ) au point $(1, \theta', \psi')$ de la sphère. C'est une fonction harmonique à l'intérieur de la sphère, qui se réduit à $4\pi K f(\theta, \psi)$ pour $\rho = 1$, d'après la relation (33). En calculant la dérivée $\frac{\partial V}{\partial \rho}$ par la règle habituelle de différentiation, on trouve, après quelques transformations faciles,

$$\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta', \psi') \left(\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{1}{r} \right) \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi';$$

le second membre est une fonction harmonique, puisque c'est la différence de deux potentiels. Sur la sphère, cette fonction est égale, d'après les propriétés des potentiels et la relation (33), à $2\pi(1 - K) f(\theta, \psi)$. Il s'ensuit que la différence $\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{1-K}{2K} V$ est une fonction harmonique nulle sur la surface de la sphère. Elle est donc nulle en tout point intérieur, et la fonction V est une fonction homogène de degré $\frac{1-K}{2K}$, ce qui exige que $\frac{1-K}{2K}$ soit

un nombre entier m, et la fonction V est une fonction de la forme $C\rho^m Y_m(\theta, \psi)$. La fonction $f(\theta, \psi)$ est elle-même identique à $Y_m(\theta, \psi)$, à un facteur constant près.

Remarque I. — Lorsque ρ est supérieur à un, le second membre de la formule (31) doit être remplacé par $\frac{4\pi}{(2m+1)\rho^{m+1}} Y_m(\theta, \psi)$, car c'est une fonction harmonique à l'extérieur de la sphère, d'après le théorème de Lord Kelvin, nulle à l'infini, et prenant les mêmes valeurs que le premier membre pour $\rho = 1$. Elle est donc identique au potentiel de simple couche représenté par le premier membre à l'extérieur de la sphère.

Remarque II. — On peut aussi déduire des formules précédentes la valeur du potentiel de double couche

$$W = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r^2} Y_m(\theta', \psi') \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi'$$

pour un point intérieur ou pour un point extérieur à la sphère. A l'intérieur, W est une fonction harmonique qui se réduit à

$$2\pi Y_m(\theta, \psi) + \frac{2\pi}{2m+1} Y_m(\theta, \psi),$$

d'après les relations (31) et (7), sur la sphère elle-même; elle est donc égale à

$$2\pi \frac{2m+2}{2m+1} \rho^m Y_m(\theta, \psi).$$

On verrait de même que ce potentiel est égal à $-\frac{4\pi m}{2m+1} \frac{Y_m(\theta, \psi)}{\rho^{m+1}}$ à l'extérieur de la sphère. En supposant $m = 0$, on retrouve les propriétés de l'intégrale de Gauss (n° 527).

533. Méthode de C. Neumann. — La méthode de Neumann, qui a été exposée en détail pour les contours convexes (n° 513), s'étend sans modification essentielle aux surfaces convexes.

Étant donnée une surface fermée S, le principe de la méthode de Neumann pour résoudre le problème intérieur consiste encore à représenter la fonction harmonique cherchée par un potentiel de double couche $\int\int_{(S)} \mu \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma$. Les propriétés de ce potentiel conduisent, pour déterminer la fonction inconnue μ, à l'équation fonctionnelle suivante (où l'on suppose $\lambda = 1$),

$$(34) \qquad \mu(M) = \int\int_{(S)} [\mu(M) - \mu(P)] \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma + \frac{1}{4\pi} U(M);$$

$F(M)$ désigne en général la valeur de la fonction F en un point M de la surface, U est la fonction continue donnée sur S, r est la distance de deux points M et P de cette surface, φ l'angle de la normale intérieure en P avec PM, et l'intégrale double est prise en considérant le point P comme variable, et le point M comme fixe.

On satisfait *formellement* à cette équation fonctionnelle en posant

$$(35) \qquad \mu(M) = \frac{1}{4\pi}[U_0(M) + \lambda U_1(M) + \ldots + \lambda^n U_n(M) + \ldots],$$

$U_0(M)$ étant égal à la fonction donnée $U(M)$, et les termes suivants se déduisant du premier par voie de récurrence au moyen de la formule

$$(36) \qquad U_m(M) = \frac{1}{4\pi}\int\int_{(S)}[U_{n-1}(M) - U_{n-1}(P)]\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma,$$

l'intégrale double étant toujours prise en faisant décrire la surface S au point P. On démontrerait absolument comme au n° 513, que toutes ces fonctions U_n sont continues sur S. Pour établir la convergence de la série (35) lorsque la surface est *convexe*, on s'appuie sur deux lemmes analogues à ceux qui ont été établis pour un contour convexe.

Lemme I. — Étant donnés sur la surface convexe S deux points quelconques M_1 et M_2 et une portion S' de cette surface, pouvant se composer de plusieurs morceaux séparés, la différence entre les angles solides sous lesquels on voit des points M_1 et M_2 les différentes parties de S', est inférieure à $2\pi h$, h étant un nombre positif inférieur à l'unité, qui ne dépend que de la surface convexe [1]. En effet, pour que cette différence fût égale à 2π, il

---

[1] La démonstration de Neumann repose sur un lemme un peu différent. La surface S étant décomposée en deux portions S', S'', α et β étant deux points quelconques de S, si l'on représente par I_Σ^γ l'angle solide sous lequel on voit du point γ la surface Σ, on a pour une surface convexe, *non biétoilée*, l'inégalité fondamentale

$$I_{S'}^\alpha + I_{S''}^\beta > 4\lambda\pi,$$

λ étant un nombre *positif* inférieur à *un* qui ne dépend que de S. Il est facile

faudrait que du point M, on vit S′ sous un angle solide égal à 2π, c'est-à-dire que S′ comprît la surface S tout entière, ou fût formée d'une surface limitée par une face plane, sur laquelle serait M_1. Dans les deux cas, l'angle solide sous lequel on voit S′ du point M_2 ne pourrait être nul, à moins que S ne se réduise à une pyramide.

Lemme II. — Soient F(M) une fonction positive ou nulle sur S, et J l'intégrale double :

$$J = \int\int_{(S)} F(P)\left[\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_1 - \left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2\right] d\sigma,$$

$\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_1$ désignant le cosinus de l'angle que fait la normale intérieure en P avec la direction PM_1, divisé par le carré de PM_1, et $\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2$ ayant une signification analogue.

Partageons S en deux parties S_1, S_2, telles qu'on ait

$$\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_1 \geqq \left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2$$

sur S_1, et $\left(\frac{\cos\varphi}{r_2}\right)_1 < \left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2$ sur S_2 et soient J_1 et J_2 les intégrales doubles étendues à S_1 et à S_2 respectivement. On a $J = J_1 + J_2$, et par suite $|J|$ est inférieur au plus grand des deux nombres J_1 et $|J_2|$. Soit L une limite supérieure de F(M); d'après le lemme précédent, chacun de ces nombres est inférieur à $2h\pi L$. On a donc aussi $|J| < 2h\pi L$, quels que soient les points M_1 et M_2.

Cela étant, soient L et l le maximum et le minimum de U sur S; M_1 et M_2 étant deux points quelconques de S, on peut

---

d'en déduire le lemme du texte. Supposons $I^{\alpha}_{S''} \geqq I^{\beta}_{S''}$; la somme $I^{\alpha}_{S'} + I^{\alpha}_{S''}$ étant au plus égale à 2π, l'inégalité de Neumann donne *a fortiori*

$$2\pi - I^{\alpha}_{S''} + I^{\beta}_{S''} > 4\lambda\pi \qquad \text{ou} \qquad I^{\alpha}_{S''} - I^{\beta}_{S''} < 2\pi(1 - 2\lambda).$$

Le facteur $1 - 2\lambda$ est certainement inférieur à *un*, et l'on peut aussi en conclure que le facteur λ de Neumann est inférieur à $\frac{1}{2}$. Mais la seconde inégalité s'applique aussi aux surfaces convexes biétoilées.

écrire

$$U_1(M_1)-U_1(M_2)=\frac{1}{4\pi}\left[\quad U(M_1)\int\int_{(S)}\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_1 d\sigma \right.$$
$$\left. -U(M_2)\int\int_{(S)}\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2 d\sigma\right]$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\int_{(S)}[U(P)-l]\left[\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2-\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_1\right]d\sigma$$
$$+\frac{l}{4\pi}\int\int_{(S)}\left[\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_2-\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)_1\right]d\sigma.$$

Si les points M_1 et M_2 sont des points ordinaires de S, la dernière intégrale est nulle, et la valeur absolue du premier terme

$$\frac{1}{2}[U(M_1)-U(M_2)]$$

est inférieure à $\frac{L-l}{2}$. D'autre part, $U(P)-l$ reste compris entre o et $L-l$, et par suite, d'après le second lemme, la valeur absolue des termes de la troisième ligne est inférieure à

$$\frac{L-l}{4\pi}2\pi h=\frac{L-l}{2}h.$$

La valeur absolue de $U_1(M_1)-U_1(M_2)$ est donc elle-même inférieure à $(L-l)\left(\frac{1+h}{2}\right)=(L-l)\rho$, *$\rho$ étant un nombre positif inférieur à un*. La fonction $U_1(M)$ étant continue, cette inégalité subsiste pour toutes les positions des points M_1 et M_2; donc, en désignant par L_1 et l_1 le maximum et le minimum de U_1, on a encore $L_1-l_1<(L-l)\rho$, et l'on en déduit de proche en proche que l'on a $L_i-l_i<(L-l)\rho_i$, L_i et l_i étant le maximum et le minimum de U_i. Le raisonnement s'achève comme au n° 513.

Remarque. — La méthode de C. Neumann, appliquée à la sphère, ne semble pas conduire immédiatement à la formule (19), comme dans le cas du cercle (n° 513). Cependant il est possible de rattacher à cette méthode la solution obtenue directement. L'équation intégrale qu'il s'agit de résoudre peut en effet s'écrire

$$\text{(E)}\qquad \mu(M)+\frac{1}{4\pi R}\int\int_{(S)}\frac{\mu(P)}{r}d\sigma=\frac{U(M)}{2\pi},$$

en observant qu'on a $2R\cos\varphi=r$, r étant la distance des deux points M et P de la surface. En posant $\mu(M)=\frac{U(M)}{2\pi}-V(M)$, cette équation

devient

$$(E)' \qquad 2\pi V(M) + \int\int_{(S)} V(P)\frac{d\sigma}{2Rr} = \frac{1}{4\pi R}\int\int_{(S)} U(P)\frac{d\sigma}{r};$$

c'est une équation de même forme que la première, où la fonction inconnue est $V(M)$. Or, pour avoir la solution du problème de Dirichlet, il n'est pas nécessaire de connaître $V(M)$, mais seulement le potentiel de double couche

$$\int\int_{(S)} V(P)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma,$$

pour un point quelconque intérieur à la sphère. La relation (E)′ exprime précisément que la valeur vers laquelle tend ce potentiel lorsque ce point intérieur tend vers un point M de la sphère est égale à la valeur du potentiel de simple couche $\frac{1}{4\pi R}\int\int_{(S)} U(P)\frac{d\sigma}{r}$ en ce même point. Ces deux fonctions harmoniques, prenant les mêmes valeurs en tous les points de la sphère, sont identiques à l'intérieur, et la solution du problème de Dirichlet est représentée par la différence entre un potentiel de double couche et un potentiel de simple couche. On retrouve bien la formule (20).

534. **Fonction de Green.** — Étant donné un domaine borné D limité par une surface Σ, formée d'une ou plusieurs surfaces fermées distinctes, la fonction de Green correspondante est une fonction $G(x, y, z; a, b, c)$, nulle sur Σ, et harmonique dans le voisinage de tout point de D, sauf dans le domaine du point intérieur $P(a, b, c)$, où elle est de la forme $\frac{1}{r} + g(x, y, z; a, b, c)$, la fonction g étant harmonique. La connaissance de cette fonction de Green permet de résoudre le problème de Dirichlet intérieur; il suffit pour cela de rapprocher les deux formules

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\int\int_{(\Sigma)}\left[U\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dU}{dn}\right]d\sigma,$$

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int\int_{(\Sigma)}\left[U\frac{d\left(G-\frac{1}{r}\right)}{dn} - \left(G-\frac{1}{r}\right)\frac{dU}{dn}\right]d\sigma,$$

d'où l'on déduit en les ajoutant, et observant que G est nul sur Σ,

$$(37) \qquad U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\int\int_{(\Sigma)} U\frac{dG}{dn}\,d\sigma.$$

La démonstration suppose que la fonction harmonique cherchée

$U(x, y, z)$ a des dérivées partielles continues sur la surface Σ.

On appelle de même fonction de Green pour le problème extérieur une fonction harmonique dans le domaine de tout point extérieur à Σ, sauf dans le domaine d'un point (a, b, c) où elle est infinie comme $\frac{1}{r}$, régulière et nulle à l'infini, et nulle sur Σ. Les formules (11) et (14) s'étendant aux fonctions harmoniques à l'extérieur de Σ, et nulles à l'infini, il n'y a rien à changer aux calculs qui précèdent, et la formule (37) donne encore la solution du problème extérieur, la dérivée $\frac{dG}{dn}$ étant prise suivant la normale *extérieure*.

Dans le cas d'une sphère de rayon R, soient P un point à une distance d du centre, P_1 le point conjugué harmonique de P par rapport aux extrémités du diamètre passant par P, r et r_1 les distances d'un point M aux points P et P_1 respectivement. Pour le problème intérieur, la fonction de Green est

$$\frac{1}{r} - \frac{R}{d}\frac{1}{r_1}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} - \frac{R}{d}\frac{1}{r_1}$$

pour le problème extérieur. Dans le premier cas, on a $d < R$, et $d > R$ dans le second cas.

En appliquant la formule générale (37) à ce cas particulier, on retrouve les résultats établis directement au n° 530.

On peut aussi étendre la définition de la fonction de Green à des équations linéaires à trois variables, plus générales que l'équation de Laplace, comme on l'a fait dans le cas de deux variables (n° 523). Les deux équations [1]

$$(38) \qquad \mathcal{F}(u) = \Delta u + a\frac{du}{dx} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + gu = 0,$$

$$(39) \qquad \mathcal{G}(v) = \Delta v - \frac{\partial(av)}{dx} - \frac{\partial(bv)}{dy} - \frac{\partial(cv)}{dz} + gv = 0,$$

---

[1] L'équation $\mathcal{F}(u) = 0$ ne représente pas la forme générale d'une équation linéaire du type elliptique à trois variables. Une équation de ce type étant donnée, il n'existe en général aucun choix de variables indépendantes permettant de ramener l'équation à la forme (38). La condition de possibilité de cette réduction résulte des recherches de M. Cotton (Thèse, n°s 15-17).

sont adjointes l'une de l'autre et donnent lieu à l'identité

$$(40)\qquad v\mathcal{F}(u)-u\mathcal{G}(v)=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}+auv\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial y}+buv\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}+cuv\right).$$

Supposons les deux fonctions u et v régulières dans un domaine borné D et continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre sur la surface Σ qui limite ce domaine. On tire de l'identité (40) la nouvelle relation

$$\iiint_{(\mathrm{D})}[v\mathcal{F}(u)-u\mathcal{G}(v)]\,dx\,dy\,dz+\iint_{(\Sigma)}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}+auv\right)dy\,dz+\ldots=0,$$

l'intégrale double étant prise suivant le côté *intérieur* de la surface Σ. Soient α, β, γ les angles de la normale intérieure avec les axes; la formule précédente prend la forme plus simple

$$(41)\qquad \iiint_{(\mathrm{D})}[v\mathcal{F}(u)-u\mathcal{G}(v)]\,dx\,dy\,dz+\iint_{(\Sigma)}\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)d\sigma+\iint_{(\Sigma)}(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)uv\,d\sigma=0.$$

Cela étant, soient $u(x, y)$ une intégrale de l'équation

$$\mathcal{F}(u)=f(x,y,z)$$

régulière dans le domaine D et v une intégrale de l'équation adjointe

$$\mathcal{G}(v)=0$$

régulière dans le domaine D, sauf dans le voisinage d'un point (a, b, c) de ce domaine où elle est de la forme $\frac{\mathrm{I}}{r}+\mathrm{V}$, U et V étant des fonctions régulières et $\mathrm{U}(a, b, c)$ étant égal à un [1]; r désigne toujours la distance d'un point (x, y, z) au point (a, b, c). Nous pouvons appliquer la formule générale (41) au domaine D', limité par Σ et par une sphère S de centre (a, b, c) et de rayon très petit ρ. En faisant tendre vers zéro le

[1] Des solutions de cette forme ont été obtenues par M. Holmgren (*Arkiv för Matematik*, t. I, 1903). *Voir* aussi le Mémoire cité plus haut de M. Hadamard.

rayon ρ, l'intégrale de surface, étendue à S, a encore pour limite

$$4\pi u(a, b, c)$$

(n° 528), et la formule (41) nous donne, en passant à la limite,

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} u(a, b, c) = &-\frac{1}{4\pi}\int\int_{(\Sigma)} \left[v\frac{bu}{dn} - u\frac{dv}{dn} + (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)uv \right] d\sigma \\ &-\frac{1}{4\pi}\int\int\int_{(D)} vf(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \end{aligned} \right.$$

Cette formule permettra de résoudre le problème de Dirichlet, si l'intégrale $v(x, y, z;\ a, b, c)$ est nulle sur Σ. On pourra de même étendre aux problèmes mixtes relatifs à cette équation les considérations générales qui ont été exposées plus haut pour une équation à deux variables (n° 524).

II. — POTENTIEL NEWTONIEN.

On s'est déjà servi plusieurs fois des potentiels de simple couche ou de double couche. Nous allons résumer rapidement les principales propriétés du potentiel newtonien, qui seront utilisées dans la suite; l'extension de ces propriétés au potentiel logarithmique ne présente pas de difficulté.

535. **Potentiel de volume.** — Soient D un domaine borné de l'espace à trois dimensions, limité par une ou plusieurs surfaces fermées S, $\mu(x, y, z)$ une fonction continue dans ce domaine et r la distance d'un point variable $M(x, y, z)$ à un point déterminé $P(a, b, c)$. La fonction représentée par l'intégrale triple

$$(43)\quad V(a, b, c) = \int\int\int_{(D)} \frac{\mu(x, y, z)}{r}\, dx\, dy\, dz = \int\int\int_{(D)} \frac{\mu}{r}\, dv$$

est une fonction continue, ainsi que toutes ses dérivées partielles jusqu'à un ordre quelconque, des coordonnées (a, b, c) du point P, dans toute région de l'espace n'ayant aucun point commun avec D; de plus, c'est une fonction harmonique, comme la fonction $\frac{1}{r}$ elle-même (n° 483). Les dérivées partielles de cette fonction

$$(44)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial a} = \int\int\int_{(D)} \mu\frac{x-a}{r^2}\, dv, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = \int\int\int_{(D)} \mu\frac{y-b}{r^3}\, dv, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial c} = \int\int\int_{(D)} \mu\frac{z-c}{r^3}\, dv \end{aligned} \right.$$

sont égales à un facteur constant près, aux composantes de l'attraction qu'exercerait sur un point matériel de masse un placé en P une masse de densité variable $\mu(x, y, z)$ répandue dans le domaine D, en supposant que l'attraction ait lieu suivant la loi de Newton; ce qui explique le nom de potentiel newtonien donné à la fonction $V(a, b, c)$ [1].

Les intégrales (43) et (44) ont encore un sens lorsque le point P est dans le domaine D; il suffit de vérifier que ces intégrales, étendues à l'intérieur d'une sphère de centre P, ont une valeur finie.

En effet, si l'on remplace les coordonnées rectangulaires par les coordonnées polaires r, θ, ψ, l'origine étant au point P, l'intégrale (43) étendue à la sphère devient

$$(43)' \qquad \int_0^\rho dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \mu(a + r\sin\theta\cos\psi, \ldots) r \sin\theta \, d\psi,$$

---

[1] Pour une attraction proprement dite, μ est essentiellement positif; s'il s'agit d'actions électriques, μ peut être positif ou négatif.

Considérons une droite indéfinie homogène, et soit μ la masse de l'unité de longueur. Une portion AB de cette droite exerce sur un point P, en dehors de la droite, une attraction qui est dans le plan PAB, et dont il est facile de calculer les composantes. Lorsque les deux points A et B s'éloignent indéfiniment dans deux sens différents, la composante parallèle à la barre devient nulle, tandis que la composante normale tend vers une limite, indépendante de la façon dont les points A et B s'éloignent indéfiniment, et cette limite est en raison inverse de la distance du point à la droite. D'une façon générale, on peut dire que les composantes de l'attraction exercée par une droite homogène indéfinie sur un point P, de coordonnées (a, b, c), sont égales, à un facteur constant près, aux dérivées partielles par rapport à a, b, c de la fonction $\mu \log\left(\frac{1}{r}\right)$, r étant la distance du point P à la droite. De même, l'attraction d'un cylindre plein indéfini sur un point a une valeur déterminée si l'on suppose la densité μ constante tout le long d'une parallèle aux génératrices. Supposons que l'on ait pris l'axe Oz parallèle aux génératrices, le plan des xy étant le plan perpendiculaire passant par le point attiré. La section du cylindre par le plan des xy est une courbe fermée C, limitant un domaine D. En décomposant ce domaine en éléments de surface, et le cylindre lui-même en cylindres infiniment petits ayant pour bases ces éléments de surface, on voit que les composantes de l'attraction exercée sur le point P de coordonnées (a, b) sont égales, à un facteur près, aux dérivées partielles par rapport à a et b de l'intégrale double $\iint_{(D)} \mu \log \frac{1}{r} \, dx \, dy$. C'est un potentiel logarithmique de surface, qui se trouve ainsi rattaché au potentiel newtonien de volume. Les potentiels logarithmiques de simple couche ou de double couche peuvent, d'une façon analogue, être rattachés aux potentiels newtoniens du même nom.

ρ étant le rayon de la sphère; la première des intégrales (44) s'écrit de même

$$(44)' \quad \int_0^{\rho} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \mu(a + r\sin\theta\cos\psi, \ldots)\cos\psi \sin^2\theta \, d\psi.$$

On voit que ces intégrales ne présentent aucun élément infini. Si H est une limite supérieure de $|\mu|$ dans le domaine D, la valeur absolue de l'intégrale $(43)'$ est évidemment inférieure à $2\pi H\rho^2$.

D'une façon générale, l'intégrale triple $\iiint \frac{\mu}{r}\,dv$, étendue à un domaine D' renfermant le point P et dont la plus grande corde est inférieure à l, est elle-même inférieure en valeur absolue à $2\pi H l^2$, car ce domaine D' est intérieur à une sphère de rayon l ayant pour centre le point P. On en déduit que l'intégrale triple (43) est uniformément convergente dans le domaine de tout point P_0 intérieur au domaine D, ou sur sa frontière. En effet, si du point P_0 pour centre on décrit une sphère Σ de rayon ρ, l'intégrale triple $\iiint \frac{\mu}{r}\,dv$, étendue au volume limité par cette sphère, est inférieure en valeur absolue à $8\pi H\rho^2$, pour un point quelconque P intérieur à Σ. On en conclut que le potentiel $V(a, b, c)$ est une fonction continue dans tout l'espace (n° 504). On voit de même que l'intégrale $(44)'$ est en valeur absolue inférieure à $4\pi H\rho$, et par suite que l'intégrale $\iiint \mu \frac{x-a}{r^2}\,dv$, étendue à un domaine D' entourant le point P et dont la plus grande corde est inférieure à l, est elle-même inférieure en valeur absolue à $4\pi H l$. Il en résulte encore que les intégrales (44) sont uniformément convergentes dans le domaine de tout point P_0 intérieur à D, ou sur la frontière de D, et par suite ces intégrales sont des fonctions continues des coordonnées (a, b, c) dans tout l'espace.

Les formules (44) sont encore vraies dans le domaine D. Nous l'établirons pour la première, en reprenant une fois de plus le raisonnement classique. Étant donné un point P du domaine D, de coordonnées (a, b, c), décrivons de ce point pour centre une sphère Σ de rayon ρ, qui décompose D en deux domaines D_1, D_2, l'un intérieur, l'autre extérieur à la sphère. Soit P_1 un point de coordonnées $(a + \Delta a, b, c)$ pris dans D_1; en appelant r_1 la distance de ce point P_1 à un point variable M, nous pouvons

écrire

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{V}(a+\Delta a, b, c)-\mathrm{V}(a, b, c)-\iiint_{(\mathrm{D})} \mu \frac{x-a}{r^3} dv \\ &=\frac{\Delta \mathrm{V}_1}{\Delta a}-\iiint_{(\mathrm{D}_1)} \mu \frac{x-a}{r^3} dv+\left[\frac{\Delta \mathrm{V}_2}{\Delta a}-\iiint_{(\mathrm{D}_2)} \mu \frac{x-a}{r^3} dv\right], \end{aligned}\right.$$

V_1 et V_2 désignant les potentiels relatifs aux domaines D_1 et D_2 respectivement. Développons $\frac{\Delta V_1}{\Delta a}$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathrm{V}_1}{\Delta a} &= \frac{1}{\Delta a}\iiint_{(\mathrm{D}_1)} \mu(x, y, z)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right) dv \\ &= \frac{1}{\Delta a}\iiint_{(\mathrm{D}_1)} \mu(x, y, z) \frac{r-r_1}{r r_1} dv. \end{aligned}$$

En observant qu'on a

$$|r-r_1| \leqq |\Delta a|, \qquad \frac{1}{r r_1}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}\right),$$

on voit que la valeur absolue de $\frac{\Delta V_1}{\Delta a}$ est inférieure à

$$\delta=\frac{\mathrm{H}}{2}\iiint_{(\mathrm{D}_1)}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}\right) dv;$$

or il est facile de vérifier, en employant des coordonnées polaires, que l'intégrale $\iiint \frac{dv}{r^2}$, étendue à un domaine situé tout entier à l'intérieur d'une sphère de rayon l ayant pour centre un point P, est inférieure en valeur absolue à $4\pi l$. Le nombre δ est donc plus petit que $\frac{H}{2}(4\pi\rho+8\pi\rho)=6\pi H\rho$. La somme des deux premiers termes du second membre de la formule (45) est donc inférieure en valeur absolue à $4\pi H\rho+6\pi H\rho=10\pi H\rho$. Cela posé, choisissons d'abord le nombre ρ de telle façon que $10\pi H\rho$ soit plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$, ε étant un nombre positif arbitraire. L'intégrale V_2 est alors une fonction continue des coordonnées du point P dans le domaine D_1, dont la dérivée est égale à $\iiint_{(D_2)} \mu \frac{x-a}{r^3} dv$. Le dernier terme du second membre de la formule (45) tend donc vers zéro avec Δa, et, en achevant le raisonnement comme d'habitude, on en conclut que le premier membre a aussi zéro pour limite. Les

formules (44) qui donnent *les dérivées premières* du potentiel s'appliquent donc dans tout l'espace.

536. Formule de Poisson. — En différentiant de nouveau les formules (44), on aboutit à des intégrales triples dépourvues de sens, lorsque le point P est dans le domaine D. Pour établir l'existence des dérivées secondes, on transforme d'abord les intégrales qui représentent les dérivées premières au moyen de la formule de Green. Soient $P_0(a_0, b_0, c_0)$ un point *intérieur* à D et Σ une sphère ayant pour centre le point P_0 et de rayon ρ assez petit pour être tout entière dans le domaine D; nous appellerons encore D_1 et D_2 les deux portions de D séparées par Σ, V_1 et V_2 les potentiels correspondants. Le potentiel $V_2(a, b, c)$, est une fonction barmonique à l'intérieur de Σ. Quant au potentiel $V_1(a, b, c)$, nous venons de voir qu'il admet dans ce domaine des dérivées du premier ordre continues. En observant qu'on a $\mu\frac{x-a}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{r}\right) + \frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{1}{r}$, nous pouvons écrire $\frac{\partial V_1}{\partial a}$, par exemple, en appliquant la première formule de Green pour les intégrales triples (I, n° 144)

$$\frac{\partial V_1}{\partial a} = \iiint_{(D_1)} \frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{dv}{r} - \iint_{(\Sigma)} \frac{\mu}{r}\,dy\,dz,$$

l'intégrale double étant étendue au côté extérieur de Σ. L'intégrale triple du second membre représente un potentiel et, par suite, admet des dérivées continues du premier ordre dans tout l'espace. Il en est de même de la fonction représentée par l'intégrale de surface lorsque le point (a, b, c) est à l'intérieur de Σ. Le potentiel $V(a, b, c)$ admet donc des dérivées continues du second ordre dans tout le domaine D, les frontières exclues, puisque P_0 est un point quelconque intérieur à D. Calculons ΔV pour le point P_0; en ce point $\Delta V_2 = 0$ et, par suite, $\Delta V = \Delta V_1$. Les formules habituelles de différentiation nous donnent

$$\begin{aligned}(\Delta V_1)_0 = &\iiint_{(D_1)} \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{x-a_0}{r_0^3} + \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{y-b_0}{r_0^3} + \frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{z-c_0}{r_0^3}\right) dv \\ &- \iint_{(\Sigma)} \mu\left(\frac{x-a_0}{r_0^3}\,dy\,dz + \frac{y-b_0}{r_0^3}\,dz\,dx + \frac{z-c_0}{r_0^3}\,dx\,dy\right),\end{aligned}$$

r_0 étant la distance du point P_0 à un point variable M. Le premier

membre est indépendant du rayon ρ; il suffit donc de chercher la limite du second membre lorsque ρ tend vers zéro. Or, si l'on désigne par K une limite supérieure de la valeur absolue des dérivées partielles de μ, la valeur absolue de l'intégrale triple est, d'après une remarque antérieure, inférieure à $12K\pi\rho$ et, par suite, tend vers zéro avec ρ. Quant à l'intégrale de surface, on a $r_0 = \rho$ sur Σ, et $\frac{x-a_0}{\rho}, \frac{y-b_0}{\rho}, \frac{z-c_0}{\rho}$ représentent précisément les cosinus directeurs de la normale extérieure. Cette intégrale se réduit à

$$-\frac{1}{\rho^2}\int\int_{(\Sigma)}\mu(x,y,z)\,d\sigma = -\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\mu(a_0+\rho\sin\theta\cos\psi,\ldots)\sin\theta\,d\theta\,d\psi,$$

et il est clair qu'elle a pour limite

$$-\mu(a_0,\,b_0,\,c_0)\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\psi,$$

ou $-4\pi\mu_0$. Pour tout point (a, b, c) *intérieur au domaine* D, on a donc, entre les dérivées du second ordre du potentiel, la relation

$$(46)\qquad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = -4\pi\mu(a,\,b,\,c);$$

c'est la *formule de Poisson*, qui comprend, si l'on veut, la formule de Laplace comme cas particulier. Il suffit en effet de prendre $\mu(a, b, c) = 0$ en un point extérieur pour retrouver la relation $\Delta V = 0$, qui s'applique à tous les points extérieurs au domaine D. Il résulte de la comparaison de ces deux formules que les dérivées secondes, ou du moins quelques-unes, doivent éprouver des discontinuités quand on traverse la frontière S du domaine D. Il importe aussi d'observer que la démonstration précédente suppose que la densité $\mu(x, y, z)$ admet des dérivées continues, ou tout au moins bornées et intégrables [1].

Toutes les propriétés précédentes s'étendent sans difficulté au potentiel logarithmique que nous écrirons, en remplaçant $\frac{1}{r}$

---

[1] La formule de Poisson a été étendue par différents géomètres à des cas plus généraux. *Voir*, par exemple, deux Mémoires de M. PETRINI [*Acta mathematica*, t. XXXI, 1908, p. 127; *Journal de Liouville*, 6e série, t. V, 1909, p. 117].

par $\log \frac{1}{r}$,

$$V(a, b) = \int\int_{(D)} \mu(x, y) \log \frac{1}{r} \, dx \, dy,$$

l'intégrale double étant étendue à un domaine D à deux dimensions du plan, dans lequel $\mu(x, y)$ est une fonction continue; $V(a, b)$ est une fonction continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans tout le plan, et ses dérivées s'obtiennent en appliquant la formule habituelle de différentiation sous le signe intégral. A l'extérieur de D, V est harmonique; à l'intérieur de D, elle admet des dérivées continues du second ordre qui vérifient la relation

(47) $$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = -2\pi\mu(a, b).$$

En résumé, le potentiel $V(a, b, c)$ est une fonction des trois variables (a, b, c) possédant les propriétés suivantes :

1° Elle est continue et admet des dérivées partielles du premier ordre continues, dans tout l'espace, et elle s'annule à l'infini (ce point s'établit comme au n° 526);

2° Elle est harmonique à l'extérieur d'un domaine borné D, limité par une ou plusieurs surfaces fermées;

3° A l'intérieur de D, elle admet des dérivées continues du second ordre qui satisfont à la relation de Poisson $\Delta V = -4\pi\mu$.

Ces propriétés caractérisent complètement la fonction $V(a, b, c)$. Soit, en effet, $V_1(a, b, c)$ le potentiel dû à l'action de masses de densité $\mu(x, y, z)$, répandues dans le domaine D. La différence $V - V_1$ est continue dans tout l'espace, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, et elle est harmonique en tout point de l'espace, sauf peut-être sur les surfaces S. Mais on a démontré plus haut (n° 528) que les dérivées secondes restent continues sur ces surfaces, de sorte que $V - V_1$ est harmonique dans tout l'espace et, comme cette différence est nulle à l'infini, elle est identiquement nulle.

On peut, dans certains cas, se servir de ces propriétés pour faciliter le calcul du potentiel. Par exemple, supposons qu'on veuille calculer le potentiel d'une sphère homogène de densité μ et de rayon R. La fonction V, définie par les égalités

$$V = 2\pi\mu\left(R^2 - \frac{d^2}{3}\right)$$

à l'intérieur de la sphère,

$$V = \frac{4}{3}\pi\mu\frac{R^3}{d}$$

à l'extérieur, d étant la distance du point P au centre, satisfait aux mêmes conditions que le potentiel cherché. Elle est continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre, et nulle à l'infini ; à l'extérieur de la sphère, on a $\Delta V = 0$ et $\Delta V = 4\pi\mu$ à l'intérieur. Elle est donc identique à ce potentiel. Lejeune-Dirichlet a donné un exemple moins élémentaire en calculant d'une façon synthétique le potentiel dû à l'attraction d'un ellipsoïde homogène (*Journal de Crelle*, t. 32).

537. **Formule de Gauss.** — De la formule de Poisson, on déduit facilement la valeur de l'intégrale $\int\int_{(\Sigma)} \frac{dV}{dn} d\sigma$, prise le long d'une surface fermée quelconque Σ, la dérivée $\frac{dV}{dn}$ étant prise suivant la normale *extérieure*. Supposons, pour fixer les idées, que le domaine intérieur à Σ se compose de deux parties seulement, un domaine D_1 qui fait partie de D et un domaine D_2 extérieur à D. Le domaine D_1 est limité par une portion Σ_1 de Σ et par une partie S' des surfaces S qui limitent D. Le domaine D_2 est lui-même limité par S' et par une portion Σ_2 de Σ. La formule de Green (10), appliquée au domaine D_1, donne, en tenant compte de la formule de Poisson, et faisant $\varphi = 1$, $\psi = V$,

$$\int\int_{(\Sigma_1)} \frac{dV}{dn_1} d\sigma + \int\int_{(S')} \frac{dV}{dn_1} d\sigma = -4\pi \int\int\int_{(D_1)} \mu \, dv,$$

$\frac{dV}{dn_1}$ désignant la dérivée suivant la direction extérieure de la normale ; V étant harmonique dans D_2, on a d'autre part

$$\int\int_{(\Sigma_2)} \frac{dV}{dn_2} d\sigma + \int\int_{(S')} \frac{dV}{dn_2} d\sigma = 0,$$

$\frac{dV}{dn_2}$ ayant une signification analogue. Mais, à cause de la continuité des dérivées premières de V, on a, tout le long de S',

$$\frac{dV}{dn_1} + \frac{dV}{dn_2} = 0;$$

en ajoutant les formules précédentes, il vient

$$(48) \qquad \int\int_{(\Sigma)} \frac{dV}{dn} d\sigma = -4\pi M,$$

M étant égal à l'intégrale triple $\int\int\int_{D_1} \mu \, dv$, c'est-à-dire à la somme des masses attirantes contenues à l'intérieur de Σ.

528. **Dérivées normales d'un potentiel de simple couche.** — Le potentiel de simple couche peut être regardé comme un cas limite d'un potentiel de volume. Considérons le volume compris entre une surface Σ et une surface parallèle infiniment voisine, à une distance ε de la première, et supposons ce volume rempli d'une matière dont la densité ρ est la même tout le long d'une normale commune. Un élément de ce volume, formé par les portions de normale menées en tous les points d'un élément $d\sigma$ de Σ a pour expression $\varepsilon\, d\sigma$. Si l'on admet maintenant que ε décroisse indéfiniment, et en même temps que δ augmente de telle façon que le produit $\delta\varepsilon$ tende en chaque point vers une limite μ, le potentiel dû à l'action du volume précédent devient à la limite une intégrale de surface $\int\int_{(\Sigma)} \frac{\mu}{r}\, d\sigma$: ce qui justifie le nom de *potentiel de simple couche* donné à cette intégrale. Le nombre μ est la densité superficielle de cette couche. Les propriétés générales de ce potentiel ont été établies plus haut; il ne nous reste qu'à étudier la discontinuité des dérivées quand on traverse Σ.

Supposons que la surface Σ soit fermée, et soit M_0 un point ordinaire de cette surface. Sur la normale en M_0 prenons deux points infiniment voisins P_i, P_e, de part et d'autre de M_0. Les dérivées du potentiel en ces deux points, prises suivant la direction intérieure de la normale en M_0, tendent respectivement vers des limites, que nous représenterons par $\frac{dV_i}{dn_i}$ et $\frac{dV_e}{dn_i}$, lorsque les points P_i et P_e se rapprochent indéfiniment de M_0 [1]. Prenons pour origine des coordonnées le point M_0, la direction de la normale intérieure pour la direction positive de l'axe des z, et deux

[1] D'après la formule de la moyenne, $\frac{dV_i}{dn_i}$ est la limite du rapport $\frac{V(P_i) - V(M_0)}{M_0 P_i}$ lorsque le point P_i se rapproche du point M_0 en restant sur la normale intérieure, tandis que $\frac{dV_e}{dn_i}$ est la limite du rapport $\frac{V(M_0) - V(P_e)}{M_0 P_e}$, lorsque P_e se rapproche de M_0 en restant sur la normale extérieure. D'une façon générale, lorsqu'un point P de coordonnées a, b, c se rapproche de M_0, les dérivées $\frac{\partial V}{\partial a}$, $\frac{\partial V}{\partial b}$ tendent vers des limites qui sont les mêmes, que le point P soit intérieur ou extérieur à Σ; seule la dérivée $\frac{\partial V}{\partial c}$ a deux limites différentes, si l'on a pris l'axe des z parallèle à la normale en M_0 (*voir* POINCARÉ, *Le potentiel newtonien*).

droites orthogonales du plan tangent pour axes des x et des y; nous admettrons que la portion de Σ, voisine de M_0, est représentée, en coordonnées semi-polaires, par une équation de la forme $z = \rho^{1+\alpha} f(\rho, \omega)$, α étant positif et la fonction f étant continue, ainsi que ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial \rho}$, $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ dans le voisinage de l'origine. Ces conditions sont certainement vérifiées, lorsque z admet des dérivées secondes continues dans le voisinages de l'origine. Les formules du changement de variables (I, p. 148) montrent immédiatement que les dérivées p et q sont de la forme $\rho^\alpha f_1(\rho, \omega)$, f_1 étant continue pour $\rho = 0$.

La dérivée $\frac{dV}{dz}$ en un point quelconque P de l'axe des z, intérieur ou extérieur à Σ, a pour expression

$$\frac{dV}{dz} = \int\int_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos \psi_1}{r^2} d\sigma, \tag{49}$$

ψ_1 étant l'angle de la direction Pz avec la direction PM, allant de P à un point quelconque M de Σ. Si le point P coïncide avec le point M_0 lui-même, cette intégrale devient

$$V'_0 = \int\int_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos \psi}{r_0^2} d\sigma, \tag{50}$$

r_0 étant la distance de M_0 à un point quelconque M de Σ, et ψ l'angle de la normale intérieure en M_0 avec la direction M_0M. Pour s'assurer que cette intégrale a une valeur finie, il suffit de considérer une petite portion Σ' de Σ entourant l'origine et se projetant sur le plan des xy à l'intérieur d'une courbe fermée γ. Un élément de l'intégrale (50) étendue à Σ' s'écrit, en prenant des coordonnées polaires, $\frac{\pi(\rho, \omega)\, d\rho\, d\omega}{\rho^{1-\alpha}}$, la fonction $\pi(\rho, \omega)$ étant bornée dans le domaine de l'origine. Il n'en résulte pas que $\frac{dV}{dz}$ ait pour limite V'_0 lorsque le point P tend vers le point M_0, car rien ne prouve la continuité de cette intégrale dans le domaine du point M_0. Nous allons montrer, au contraire, qu'elle est discontinue en ce point comme un potentiel de double couche. Pour cela, considérons l'intégrale auxiliaire

$$I = \int\int_{(\Sigma)} \left(\mu \frac{\cos \psi_1}{r^2} + \mu_0 \frac{\cos \varphi}{r^2} \right) d\sigma, \tag{51}$$

φ étant l'angle de la direction intérieure de la normale en M avec MP; employant un raisonnement tout à fait analogue à celui des nos 505, 527, nous allons prouver tout d'abord que cette intégrale est continue pour le point M_0. Pour cela, considérons le trièdre ayant pour sommet un point quelconque M de Σ et pour arêtes la direction MP, la direction intérieure MN de la normale en M et la parallèle Mz' à l'axe des z. L'angle de MP avec Mz' est $\pi - \psi_1$, l'angle de MP et de MN est φ; appelons θ l'angle de MN et de Mz', et Ω l'angle plan du dièdre qui a pour arête MN; on a, d'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$\cos(\pi - \psi_1) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos\Omega,$$

et l'intégrale I peut s'écrire

$$(52)\qquad I = -\int\int_{(\Sigma)} (\mu\cos\theta - \mu_0)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma - \int\int_{(\Sigma)} \mu\sin\varphi\cos\Omega\,\frac{\sin\theta\,d\sigma}{r^2}.$$

La première intégrale double du second membre est continue au point M_0; si l'on considère, en effet, le potentiel de double couche $\int\int\frac{\nu\cos\varphi\,d\sigma}{r^2}$, où $\nu = \mu\cos\theta$, cette intégrale double n'est autre que $-\int\int_{(\Sigma)}(\nu - \nu_0)\frac{\cos\varphi}{r^2}d\sigma$, et l'on a démontré plus haut que cette intégrale était continue au point M_0 (nos 505, 527). Pour prouver qu'il en est de même de la seconde intégrale, il suffit de prouver que cette intégrale est uniformément convergente dans le domaine du point M_0 (n° 504), ou que l'intégrale $\int\int\frac{\sin\theta\,d\sigma}{r^2}$, étendue à une portion infiniment petite Σ' de Σ, entourant l'origine, est elle-même infiniment petite. Or, si l'on passe aux coordonnées polaires, un élément de cette intégrale est de la forme $\rho^{\alpha-1}\pi(\rho, \omega)\,d\rho\,d\omega$, la fonction $\pi(\rho, \omega)$ restant bornée. L'intégrale étendue à un domaine infiniment petit est donc elle-même infiniment petite.

Ce point étant acquis, supposons d'abord que le point P de l'axe des z soit un point intérieur P_i; la limite de l'intégrale I lorsque ce point P_i tend vers l'origine est évidemment $\frac{dV_i}{dn_i} + 4\pi\mu_0$; au contraire, si le point P était un point extérieur P_e, la limite serait $\frac{dV_e}{dn_i}$. Enfin, si le point P est au point M_0 lui-même, I est

égal à $V'_0 + 2\pi\mu_0$. En égalant ces trois nombres, on obtient les valeurs cherchées

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dV_i}{dn_i} &= -2\pi\mu_0 + \iint_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos\psi}{r_0^2}\, d\sigma, \\ \frac{dV_e}{dn_i} &= 2\pi\mu_0 + \iint_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos\psi}{r_0^2}\, d\sigma; \end{aligned}\right.$$

ces relations ([1]) peuvent encore s'écrire, en supprimant l'indice de r_0,

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dV_e}{dn_i} - \frac{dV_i}{dn_i} &= 4\pi\mu_0, \\ \frac{dV_e}{dn_i} + \frac{dV_i}{dn_i} &= 2\iint_{(\Sigma)} \mu \frac{\cos\psi}{r^2}\, d\sigma. \end{aligned}\right.$$

On a, pour les dérivées normales d'un potentiel logarithmique de simple couche, $V = \int_C \mu \log\frac{1}{r}\, ds$, en un point M_0 de la courbe C (n° 505), des formules toutes pareilles, qui s'établissent de la même façon,

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dV_i}{dn_i} &= -\pi\mu_0 + \int_{(C)} \mu \frac{\cos\psi}{r}\, ds, \\ \frac{dV_e}{dn_i} &= \pi\mu_0 + \int_{(C)} \mu \frac{\cos\psi}{r}\, ds, \end{aligned}\right.$$

r étant la distance de M_0 à un point variable M de C, et ψ l'angle de M_0M avec la direction intérieure de la normale en M_0.

539. **Potentiel newtonien de double couche.** — Nous montrerons encore comment la théorie du magnétisme conduit aux intégrales de surface qu'on appelle *potentiels de double couche* (n° 527). Imaginons une couche de densité positive μ étalée sur une surface Σ et une couche de densité négative $-\mu'$ étalée sur une surface parallèle Σ', à une distance infiniment petite ε de la première. Les normales à Σ menées par le contour d'un élément $d\sigma$ de Σ découpent sur la surface Σ' un élément de surface $d\sigma'$; nous supposerons qu'on a choisi μ' de telle façon qu'on ait constamment $\mu\, d\sigma = \mu'\, d\sigma'$. La somme des potentiels de ces deux couches sur un point extérieur P

---

[1] La seconde des relations (54) a été rétablie par M. Plemelj en 1904 (*Monatshefte für mathematik und Physik*).

est égale à l'intégrale de surface

$$\int\int_{(\Sigma)} \mu\, d\sigma \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

r et r' étant les distances du point P aux éléments $d\sigma$ et $d\sigma'$. Si la distance ε tend vers zéro, et si en même temps la densité μ augmente de telle façon que le produit $\mu\varepsilon$ reste égal à μ_1, cette intégrale a pour limite l'intégrale double

$$\int\int_{(\Sigma)} \mu_1 \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\sigma,$$

la dérivée $\frac{d}{dn}$ étant prise suivant la direction de la normale qui va de Σ vers Σ'. On retrouve l'expression que nous avions prise pour définition d'un potentiel de double couche.

La dérivée normale de ce potentiel se comporte tout autrement que celle d'un potentiel de simple couche, quand on traverse la surface Σ. Soient M_0 un point de Σ; P, P' deux points voisins sur la normale en M_0, de part et d'autre de ce point et à la même distance h de ce point. Les dérivées

$$\left(\frac{dW}{dn}\right)_P, \quad \left(\frac{dW}{dn}\right)_{P'},$$

prises suivant une direction déterminée choisie sur la normale en M_0, ne tendent pas forcément vers une limite lorsque h tend vers zéro, mais on a démontré que *leur différence tend vers zéro avec h.*

COMPLÉMENTS ET EXERCICES.

1. Déduire de la formule qui donne la solution du problème de Dirichlet pour la sphère, la valeur de l'intégrale de surface

$$\int\int_S \frac{d\sigma}{r^3},$$

r désignant la distance d'un point fixe P, intérieur ou extérieur à la sphère S, à un point variable M de la sphère.

2. Démontrer, par une inversion, que la formule (19) peut s'écrire

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\int\int_{(S)} U' \frac{d\sigma}{Rr},$$

U′ étant la valeur donnée de U au point M′ de la sphère où la droite MP rencontre de nouveau la sphère (cf. *Exercice* 4, p. 237).

3. Étant donné un cylindre homogène de densité μ, de rayon R et de hauteur h, calculer le potentiel de volume pour un point de l'axe et la dérivée de ce potentiel suivant la direction de l'axe. En déduire la discontinuitée de la dérivée d'un potentiel de simple couche dû à une couche circulaire homogène, en faisant tendre h vers zéro et croître μ de façon que μh ait une limite μ'.

4. *Lemme de Poincaré.* — Soient S une sphère de rayon R et de centre O, A un point extérieur et P un point intérieur. Le point A étant supposé fixe, $\frac{1}{\text{AP}}$ est une fonction harmonique des coordonnées du point P à l'intérieur de S, et par suite on a, d'après la formule (19) (p. 259),

$$\Delta = \frac{1}{\text{AP}} - \int\int_{\text{S}} \frac{1}{\text{AM}} \frac{\text{R}^2 - \overline{\text{OP}}^2}{4\pi\text{R}.\overline{\text{PM}}^3} d\sigma = 0. \tag{1}$$

La même formule (10), où l'on suppose $\text{U} = 1$, nous donne la relation

$$\int\int_{\text{S}} \frac{\text{R}^2 - \overline{\text{OP}}^2}{4\pi\text{R}.\overline{\text{PM}}^3} d\sigma = 1. \tag{2}$$

Enfin, considérons le point P comme fixe et le point A comme variable; la différence Δ devient nulle en tout point de S, d'après la continuité du potentiel de simple couche. Cette différence Δ est harmonique à l'intérieur de S, sauf au point P où elle est égale à $+\infty$. Étant nulle sur la sphère elle est donc positive en tout point intérieur. En réunissant tous ces résultats, on obtient la proposition suivante sur laquelle est fondée la méthode de balayage de Poincaré :

Étant donnée une masse égale à l'unité placée en un point P *de l'intérieur d'une sphère, si l'on répartit cette masse sur toute la surface de la sphère, de manière que la densité en un point quelconque* M *de celle-ci soit inversement proportionnelle au cube de* MP, *la couche sphérique ainsi obtenue aura même potentiel que la masse primitive en tout point extérieur et un potentiel plus petit en tout point intérieur.*

CHAPITRE XXIX.

ÉQUATION DE LA CHALEUR.

Les équations linéaires du type parabolique participent à la fois des propriétés des équations du type elliptique et de celles du type hyperbolique. Je me bornerai, dans ce Chapitre, à exposer les principales propriétés de l'équation de la propagation de la chaleur, dont il a déjà été question à plusieurs reprises (¹) (nᵒˢ 486, 487, 488).

540. **Généralités. Intégrales particulières.** — L'équation aux dérivées partielles

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

est, parmi les équations à deux variables du type parabolique, l'analogue de l'équation de Laplace parmi les équations du type elliptique. Nous représentons, dans ce Chapitre, par $u(x, y)$ toute intégrale de cette équation; $v(x, y)$ représentera de même une intégrale de l'équation adjointe (nᵒ 497) qui est ici

$$\mathcal{G}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

(¹) Depuis Fourier, cette équation a fait l'objet d'un assez grand nombre de Mémoires :

POISSON, *Théorie mathématique de la chaleur*, Chap. VI, Paris; 1835.

SCHLAEFLI, *Journal de Crelle*, t. 72.

BETTI, *Memorie delle Soc. italiana delle Scienze*, 3ᵉ série, t. I.

APPELL, *Journal de Liouville*, 4ᵉ série, t. VIII.

VOLTERRA, *Leçons professées à Stockholm* (Upsal; 1906).

Les principaux problèmes aux limites ont été résolus dans divers travaux, dus principalement à MM. Holmgren et E.-E. Levi. Les derniers paragraphes de ce Chapitre (nᵒˢ 544, 546, 547) sont extraits presque complètement pour le fond des travaux de M. Holmgren.

Les équations générales du type parabolique ont été étudiées dans d'importants Mémoires par E. LEVI (*Annali di Matematica*, 1908), H. BLOCK (*Arkiv. de Stockholm*, t. V), M. GEVREY (*Journal de Mathématiques*, 6ᵉ série, t. IX, 1913; t. X, 1914; *Ann. de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. XXXV, 1918).

Ces deux équations admettent une seule famille de caractéristiques, qui se compose des parallèles à l'axe Ox. Nous dirons qu'une de ces fonctions $u(x, y)$ ou $v(x, y)$ est *régulière* dans un domaine D, si elle est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, dans ce domaine. Il suffirait même de dire que la dérivée par rapport à y est continue; car si $\frac{\partial u}{\partial y}$, par exemple, est une fonction continue, l'équation (1) prouve qu'il en est de même de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et, par suite, de $\frac{\partial u}{\partial x}$.

L'équation (1), étant à coefficients constants, admet des intégrales particulières de la forme e^{ax+by} (nº 483); la relation entre a et b est, dans ce cas, $b = a^2$ [1]. De l'intégrale ainsi obtenue e^{ax+a^2y} on peut en déduire une infinité d'autres en prenant ses dérivées successives par rapport au paramètre a, ou, ce qui revient au même, en prenant les coefficients successifs du développement de cette intégrale, suivant les puissances de a. Écrivons ce développement sous la forme

$$(3) \qquad e^{ax+a^2y} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} V_n(x, y);$$

$V_n(x, y)$ est un polynome de degré n en x, y, homogène en x et $\sqrt{y}$,

$$(4) \quad \begin{cases} V_n(x, y) = x^n + n(n-1)x^{n-2}y + \ldots \\ \qquad + \dfrac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{p!} x^{n-2p} y^p + \ldots, \end{cases}$$

qui se termine par un terme en $y^{\frac{n}{2}}$ si n est pair et par un terme en $xy^{\frac{n-1}{2}}$, si n est impair. Ces polynomes V_n sont des intégrales de l'équation (1), d'après leur définition même. On le vérifie aisément en remarquant que l'équation (3), différentiée par rapport à x et à y, donne les relations

$$(5) \qquad \frac{\partial V_n}{\partial x} = n V_{n-1}, \qquad \frac{\partial V_n}{\partial y} = n(n-1) V_{n-2},$$

d'où l'on déduit immédiatement que V_n satisfait à l'équation (1).

---

[1] En remplaçant a par αi, on retrouve les intégrales $e^{-\alpha^2 y} \cos \alpha x$, $e^{-\alpha^2 y} \sin \alpha x$ (nº 487).

Tout polynome U_n de degré n en x, y, vérifiant cette équation (1), *est une combinaison linéaire à coefficients constants des polynomes* $V_0 = 1, V_1, \ldots, V_n$. En effet, tout polynome qui satisfait à l'équation (1) est complètement déterminé si l'on connaît les coefficients des termes indépendants de y, puisqu'au moyen de l'équation (1) et de celles qu'on en déduit par des dérivations, on peut exprimer toutes les dérivées d'une intégrale au moyen des seules dérivées prises par rapport à x. Si donc on choisit les coefficients $C_0, C_1, \ldots, C_n$, de façon que le polynome

$$C_0 V_0 + C_1 V_1 + \ldots + C_n V_n$$

ait les mêmes termes indépendants de y que U_n, ces polynomes sont forcément identiques.

Les polynomes $V_n(x, y)$ s'expriment aisément au moyen des polynomes $P_n(z)$ de M. Hermite, définis par l'égalité

$$\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2}) = e^{-z^2} P_n(z).$$

Écrivons, en effet, la formule qui donne le développement de $e^{-(z+h)^2}$, en divisant les deux membres par e^{-z^2}

$$e^{-2hz-h^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} P_n(z);$$

pour identifier le premier membre avec le premier membre de la formule (3), il suffit de remplacer h par $a\sqrt{-y}$ et z par $-\frac{x}{2\sqrt{-y}}$. En écrivant que les seconds membres des deux formules sont identiques après cette transformation, on obtient l'expression suivante de $V_n(x, y)$:

$$V_n(x, y) = (-y)^{\frac{n}{2}} P_n\left(\frac{-x}{2\sqrt{-y}}\right).$$

Le théorème de Rolle prouve facilement que l'équation $P_n(z) = 0$ a ses n racines réelles et distinctes, deux à deux égales en valeur absolue. Il s'ensuit que l'équation $V_n(x, y) = 0$ représente $\frac{n}{2}$ paraboles si n est pair, $\frac{n-1}{2}$ paraboles et l'axe des y si n est impair.

Il est évident que l'équation (1) ne change pas de forme par le changement de variables $x' = kx + \alpha$, $y' = k^2 y + \beta$, quelles que

soient les constantes k, α, β. Si $u(x, y)$ est une intégrale, il en est donc de même de $u(kx+\alpha, k^2y+\beta)$. Il existe aussi pour l'équation (1) une transformation analogue à l'inversion, qui est définie par les formules

$$x' = \frac{x}{y}, \qquad y' = -\frac{1}{y}, \qquad u = \frac{u'}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}};$$

en faisant le calcul, on trouve que l'équation (1) est remplacée par une équation de même forme ([1]) $\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \frac{\partial u'}{\partial y'}$. Par suite, si $u(x, y)$ est une intégrale de l'équation (1), il en est de même de la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} u\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y}\right).$$

541. Intégrales analytiques. — Nous allons d'abord compléter ce qui a été dit déjà (n° **471**) des intégrales analytiques de l'équation (1), en nous bornant d'ailleurs au domaine réel. Soit $u(x, y)$ une intégrale analytique holomorphe dans le domaine d'un point (x_0, y_0), se réduisant pour $x = x_0$ à une fonction holomorphe $\varphi(y)$, et dont la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ est égale à $\psi(y)$, pour la même valeur de x. Le développement de $u(x, y)$ suivant les puissances de $x - x_0$ est, comme on l'a déjà vu,

$$(6) \qquad u(x, y) = \varphi(y) + \frac{(x-x_0)}{1}\psi(y) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\varphi'(y) + \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}\psi'(y) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{2n}}{(2n)!}\varphi^{(n)}(y) + \frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)}\psi^{(n)}(y) + \ldots.$$

Pour transformer cette série (6) en une série entière à double entrée T, il suffira de remplacer $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ et leurs dérivées par leurs développements suivant les puissances de $y - y_0$. Soit R le

---

([1]) M. Appell a démontré que toutes les transformations de la forme

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y), \quad u = \lambda(x, y)u',$$

par lesquelles l'équation (1) se change en elle-même, se ramène à des combinaisons des transformations simples (*Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. VIII, 1892, p. 187).

rayon du cercle de convergence des deux séries entières en $y-y_0$, qui est le plus petit; r étant un nombre positif quelconque inférieur à R, les séries $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ admettent pour fonction majorante une expression $\dfrac{M}{1-\dfrac{y-y_0}{r}}\cdot$ Si donc on remplace dans la série (6) $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ par cette fonction, la série à double entrée T′ ainsi obtenue sera certainement majorante pour la série à double entrée T déduite de (6) sans aucune modification.

Le Tableau auxiliaire T′ est absolument convergent pourvu que la valeur absolue de $y-y_0$ soit inférieure à r. En effet, remplaçons $x-x_0$ et $y-y_0$ par leurs valeurs absolues, et groupons ensemble les termes de même degré en $|x-x_0|$; il est clair que les coefficients de $|x-x_0|^{2n}$ et de $|x-x_0|^{2n+1}$ seront respectivement

$$\frac{M\,n!}{(2n)!\left[1-\dfrac{|y-y_0|}{r}\right]^{n+1}r^n}, \qquad \frac{M\,n!}{(2n+1)!\left[1-\dfrac{|y-y_0|}{r}\right]^{n+1}r^n};$$

et par suite ce Tableau est absolument convergent quel que soit x si l'on a $|y-y_0|<r$. Le nombre r pouvant être pris aussi voisin de R qu'on le voudra, on en conclut que la série double

$$(7)\qquad u(x,y)=\Sigma\, a_{ik}(x-x_0)^i(y-y_0)^k,$$

qui représente la fonction $u(x,y)$ dans le domaine du point (x_0,y_0), est absolument convergente dans la bande B du plan des xy limitée par les deux caractéristiques $y=y_0+R$, $y=y_0-R$. Elle ne peut être convergente dans une bande plus étendue, puisque l'une au moins des séries entières qui représentent $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ est divergente en dehors de l'intervalle $(y_0-R,\ y_0+R)$. Soit x_1 une valeur quelconque de x; les fonctions $u(x_1,y)$, $\dfrac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_1}$ peuvent être développées en séries entières en $y-y_0$, qui sont certainement convergentes dans l'intervalle $(y_0-R,\ y_0+R)$; on les obtient en effet en remplaçant x par x_1 dans $u(x,y)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot$ Elles ne peuvent être convergentes toutes les deux dans un intervalle plus grand, car, en raisonnant dans l'ordre inverse, on en déduirait que les séries $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont elles-mêmes convergentes dans un inter-

valle plus étendu. Il résulte de cette remarque que, dans l'étude du prolongement analytique de la fonction $u(x, y)$ définie par la série (7), on peut donner à la variable x une valeur constante quelconque et considérer u comme fonction de la seule variable y. Supposons que les deux fonctions $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ puissent être prolongées analytiquement dans un intervalle (α, β), comprenant le premier $(y_0 - R, y_0 + R)$, en donnant à y des valeurs *réelles* : alors l'intégrale $u(x, y)$ est analytique et régulière dans la bande limitée par les caractéristiques $y = \alpha$, $y = \beta$, mais elle ne peut être prolongée analytiquement en dehors de cette bande, du moins si l'on exclut les valeurs complexes pour la variable y. Il peut d'ailleurs arriver que l'un des nombres α, β, ou les deux à la fois, soient infinis; dans ce dernier cas, l'intégrale est holomorphe dans tout le plan. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, en prenant

$$\varphi(y) = \frac{1}{1 + y^2}, \qquad \psi(y) = 0.$$

L'étude des intégrales analytiques soulève une autre question. Une intégrale de cette nature est déterminée si l'on se donne la fonction $F(x)$ à laquelle elle se réduit pour une valeur donnée de y, pour $y = 0$ par exemple. Cette fonction $F(x)$ est nécessairement une fonction entière de x, mais ce n'est pas une fonction entière quelconque. Pour trouver une propriété caractéristique, écrivons son développement suivant les puissances de x :

$$(8) \qquad \begin{aligned} F(x) = \varphi(0) + x\,\psi(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi'(0) + \frac{x^3}{1.2.3}\psi'(0) + \dots \\ + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\psi^{(n)}(0) + \dots, \end{aligned}$$

$\varphi(y)$ et $\psi(y)$ désignant toujours les fonctions auxquelles se réduisent u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $x = 0$. Les lettres M et r ayant la même signification que tout à l'heure, $F(x)$ admet pour fonction majorante la série

$$\begin{aligned} F_1(x) = M\Big[1 + x + \frac{x^2}{1.2.r} + \frac{x^3}{1.2.3.r} + \dots \\ + \frac{n!}{(2n)!}\frac{x^{2n}}{r^n} + \frac{n!}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{r^n} + \dots \Big]. \end{aligned}$$

Cette nouvelle série a ses termes respectivement inférieurs à ceux

de la série $L(1+x)e^{Kx^2}$, pourvu que les deux nombres L et K vérifient les inégalités

$$L > \frac{M(n!)^2}{(2n)!(Kr)^n},$$

dont le second membre est le terme général d'une série convergente si l'on a choisi K de façon que $4Kr$ soit supérieur à 1. La fonction $F(x)$ admet donc elle-même pour fonction majorante une expression de la forme $L(1+x)e^{Kx^2}$, L et K étant deux nombres positifs.

Réciproquement, si une série entière $F(x)$ satisfait à cette condition, l'équation (1) admet une intégrale holomorphe dans le domaine de l'origine se réduisant à $F(x)$ pour $y=0$. Si cette solution existe, on a pour $u(0, y)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ les développements suivant les puissances de y (n° 471)

$$\varphi(y) = F(0) + \frac{F''(0)}{1.2}y + \ldots + \frac{F^{(2n)}(0)}{n!}y^n + \ldots,$$

$$\psi(y) = F'(0) + F'''(0)y + \ldots + \frac{F^{(2n+1)}(0)}{n!}y^n + \ldots,$$

et il suffit de montrer que ces deux séries entières ont un rayon de convergence différent de zéro. Or la première, par exemple, a pour fonction majorante la série

$$L\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}K^n y^n,$$

qui est convergente si l'on a $|4Ky| < 1$, et il en est de même de la seconde. En résumé, *pour que l'équation* (1) *admette une intégrale holomorphe dans le domaine de l'origine, se réduisant, pour* $y=0$, *à une fonction entière* $F(x)$, *il faut et il suffit que* $F(x)$ *admette une fonction majorante de la forme*

$$L(1+x)e^{Kx^2},$$

L *et* K *étant deux nombres positifs.*

Cette condition peut être remplacée par une autre où n'intervient que l'ordre de grandeur des coefficients de la série $F(x)$ (voir *Exercice* 1).

Remarquons aussi que, si les deux fonctions $\varphi(y)$, $\psi(y)$ sont

holomorphes dans l'intervalle réel (α, β), la série (6) représente l'intégrale dans toute la bande limitée par les droites $y = \alpha$, $y = \beta$. Au contraire, la série (7) n'est en général convergente que dans une bande plus étroite comprise dans la première.

542. Solution fondamentale. — Les transformations définies à la fin du n° 540 permettent de déduire de l'intégrale $u(x, y) = 1$ une intégrale dépendant de deux paramètres arbitraires ξ, η,

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}$$

qui joue vis-à-vis de l'équation (1) un rôle analogue à celui de $\log r$ dans la théorie des fonctions harmoniques. On peut aussi la déduire de l'intégrale particulière $e^{-\alpha^2(y-\eta)} \cos \alpha(x-\xi)$, qui dépend de trois paramètres α, ξ, η, par une quadrature (*cf.* n° 486). Cette fonction n'a une valeur réelle que si l'on a $y > \eta$; mais il est commode pour la suite de faire la convention suivante. Nous désignerons par $U(x, y; \xi, \eta)$ la fonction définie par les égalités

$$(9) \qquad \begin{cases} U(x, y; \xi, \eta) = \dfrac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} & \text{pour} \quad y > \eta, \\ U(x, y; \xi, \eta) = 0 & \text{pour} \quad y \leqq \eta. \end{cases}$$

La fonction ainsi définie est une intégrale de l'équation (1) qui est régulière pour tous les systèmes de valeurs réelles de x et de y, sauf au point $(x = \xi, y = \eta)$; en effet, toute dérivée partielle de la fonction $u(x, y)$ est une somme de termes de la forme

$$\frac{P(x)}{(y-\eta)^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}},$$

$P(x)$ étant un polynome, et cette expression tend vers zéro en même temps que $y - \eta$ pourvu que $x - \xi$ ne tende pas aussi vers zéro.

Considérée comme fonction de (ξ, η), $U(x, y; \xi, \eta)$ est de même une intégrale de l'équation adjointe, régulière dans tout le plan sauf au point $\xi = x$, $\eta = y$, et identiquement nulle pour $\eta \geqq y$. En différentiant un nombre quelconque de fois U par rapport à x, y, ξ, η, on obtient de nouvelles fonctions $U^{(i)}(x, y; \xi, \eta)$ qui

jouissent des mêmes propriétés que la fonction U. Chacune de ces fonctions, considérée comme fonction du couple de variables (x, y), est une solution de l'équation (1), régulière dans tout le plan sauf au point $x = \xi$, $y = \eta$; considérée comme fonction de (ξ, η), c'est une solution de l'équation adjointe

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0,$$

admettant dans tout le plan le seul point singulier $\xi = x$, $\eta = y$. Toutes ces fonctions sont identiquement nulles si l'on a $\eta \geqq y$.

De la solution fondamentale $U(x, y; \xi, \eta)$ on peut aussi déduire par des quadratures de nouvelles intégrales analogues au potentiel logarithmique de simple couche. Soient $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ deux fonctions continues quelconques des coordonnées (ξ, η) d'un point M le long d'un arc de courbe C situé à distance finie. L'intégrale curviligne

$$(10) \qquad u(x, y) = \int_C U(x, y; \xi, \eta)\,[P(\xi, \eta)\,d\xi + Q(\xi, \eta)\,d\eta]$$

représente une intégrale de l'équation (1) qui est régulière, ainsi que toutes ses dérivées partielles, dans tout domaine D n'ayant aucun point commun avec la courbe C; on peut, en effet, appliquer les formules habituelles de différentiation un nombre quelconque de fois si le point (x, y) reste dans le domaine D. Remarquons que, d'après la définition de $U(x, y; \xi, \eta)$. on ne doit prendre pour le calcul de $u(x, y)$ que la portion de l'arc C situé au-dessous de la caractéristique passant par le point (x, y). Il en résulte qu'au-dessous de la caractéristique passant par le point de C d'ordonnée minimum, $u(x, y)$ est nul; il en est de même en tous les points de cette caractéristique qui n'appartiennent pas à C. Au-dessus d'une caractéristique $y = y_0$, laissant l'arc C tout entier au-dessous, $u(x, y)$ est une fonction analytique holomorphe des deux variables x, y. En effet, regardons pour un moment x et y comme des variables complexes; ξ, η désignant les coordonnées d'un point quelconque de l'arc C, $U(x, y; \xi, \eta)$ est une fonction holomorphe des variables x et y quel que soit le domaine où se meut la variable complexe x, pourvu que la partie réelle de y soit supérieure à y_0 (on prend pour $\sqrt{y - \eta}$ la détermination positive

lorsque y est réel). Il s'ensuit que $u(x, y)$ représente une fonction holomorphe des deux variables x, y au-dessus de la caractéristique $y = y_0$ [1].

Pour étudier ce que devient $u(x, y)$ lorsque le point (x, y) se rapproche d'un point M du contour C, il est nécessaire de faire des hypothèses sur la forme de ce contour.

343. **Formule de Poisson.** — Nous étudierons d'abord le cas où la courbe C est un segment de caractéristique. L'intégrale définie

$$(11) \qquad u(x, y) = \int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} d\xi,$$

où $\varphi(\xi)$ est une fonction continue dans l'intervalle (a, b), représente, d'après les propriétés déjà établies, une intégrale de l'équation (1), qui est régulière en tout point du plan non situé sur le segment AB de la caractéristique $y = h$, limité par les deux points A et B, d'abscisses a et b. Nous supposons, pour fixer les idées, $a < b$. Cette fonction $u(x, y)$ est nulle en tout point au-dessous de la caractéristique $y = h$, et en tout point de cette caractéristique en dehors du segment AB. Dans la portion du plan située au-dessus, elle est une fonction holomorphe des variables x, y. Il nous reste à rechercher quelle est la limite de $u(x, y)$ lorsque le point (x, y), supposé au-dessus de AB, tend vers un point de ce segment. Nous nous appuierons pour cela sur quelques lemmes d'un usage fréquent dans cette théorie.

Soit $F(u)$ une fonction continue, ou tout au moins bornée et intégrable, et n'ayant que des discontinuités de première espèce dans un intervalle (a, b). Proposons-nous de trouver la limite de l'intégrale

$$(12) \qquad I = \int_a^b \frac{F(u)}{\sqrt{y}} e^{-\frac{u^2}{4y}} du$$

lorsque le nombre *positif* y tend vers zéro.

---

[1] Il suffit de reprendre le raisonnement du n° 353 (II), en observant que l'hypothèse que F est analytique par rapport à la variable d'intégration ne joue aucun rôle dans la démonstration.

Premier cas. — Supposons d'abord que a et b soient tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs, par exemple $0 < a < b$. Si M est une limite supérieure de $|F(u)|$, dans l'intervalle (a, b), on a évidemment

$$|I| < \frac{M}{\sqrt{y}}(b-a)e^{-\frac{a^2}{4y}},$$

et cette expression tend vers zéro avec y. On a donc $\lim I = 0$.

Deuxième cas. — Supposons qu'une des limites soit nulle, par exemple $a = 0$, $b > 0$. Soit β un nombre positif inférieur à b tel que $|F(u) - F(+0)|$ soit inférieur à un nombre donné η dans l'intervalle $(0, \beta)$; on peut choisir β assez petit pour que le nombre η soit lui-même plus petit que tout le nombre donné à l'avance. Nous pouvons écrire

$$I = F(+0)\int_0^\beta e^{-\frac{u^2}{4y}}\frac{du}{\sqrt{y}}$$
$$+\int_0^\beta [F(u) - F(+0)]e^{-\frac{u^2}{4y}}\frac{du}{\sqrt{y}} + \int_\beta^b \frac{F(u)}{\sqrt{y}}e^{-\frac{u^2}{4y}}du,$$

ou encore, en posant $u = 2t\sqrt{y}$ dans les deux premières intégrales,

$$I = F(+0)\int_0^{\frac{\beta}{2\sqrt{y}}} 2e^{-t^2}dt$$
$$+2\int_0^{\frac{\beta}{2\sqrt{y}}}\left[F(2\sqrt{y}t) - F(+0)\right]e^{-t^2}dt + \int_\beta^b \frac{F(u)}{\sqrt{y}}e^{-\frac{u^2}{4y}}du.$$

D'après la façon dont on a choisi le nombre β, la valeur absolue de la seconde intégrale est inférieure à

$$2\eta\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \eta\sqrt{\pi}.$$

Supposons β pris de telle façon qu'on ait $\eta\sqrt{\pi} < \varepsilon$, ε étant un nombre positif donné à l'avance; ce nombre β étant ainsi fixé, faisons diminuer y indéfiniment : la première intégrale a pour limite $\sqrt{\pi}F(+0)$, et la dernière a zéro pour limite. Il est donc

possible de trouver un nombre positif h tel qu'on ait

$$|I - \sqrt{\pi}\,F(+0)| < \varepsilon,$$

lorsqu'on a $y < h$ et, par suite, I a pour limite $\sqrt{\pi}\,F(+0)$. On verrait de même que, lorsque a est nul et $b < 0$, la limite de I est $-\sqrt{\pi}\,F(-0)$.

Troisième cas. — Supposons a et b de signes différents, par exemple, $a < 0$, $b > 0$. On a

$$I = \int_0^b \frac{F(u)}{\sqrt{y}} e^{-\frac{u^2}{4y}} du - \int_0^a \frac{F(u)}{\sqrt{y}} e^{-\frac{u^2}{4y}} du;$$

les deux intégrales du second membre ont respectivement pour limites $\sqrt{\pi}\,F(+0)$, $-\sqrt{\pi}\,F(-0)$. La limite de I est donc

$$\sqrt{\pi}[F(+0) + F(-0)].$$

En particulier, si la fonction $F(u)$ est continue pour $u = 0$, la limite de I est $2\sqrt{\pi}\,F(0)$.

Cela posé, cherchons la limite de l'intégrale (11) lorsque le point (x, y), au-dessus de AB, se rapproche d'un point de coordonnées (x_0, h) de ce segment $(a < x_0 < b)$. Nous supposerons d'abord que le point (x, y) se déplace sur la parallèle à Oy. Nous avons à chercher la limite de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4(y-h)}} d\xi = \int_{a-x_0}^{b-x_0} \frac{\varphi(x_0+u)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{u^2}{4(y-h)}} du$$

lorsque $y - h$ tend vers zéro. La limite $a - x_0$ est négative, l'autre $b - x_0$ est positive; si $\varphi(\xi)$ est continue au point x_0, la limite est, nous venons de le voir, $2\sqrt{\pi}\,\varphi(x_0)$. Aux extrémités A et B du segment, la limite serait $\sqrt{\pi}\,\varphi(a)$ ou $\sqrt{\pi}\,\varphi(b)$.

Supposons maintenant que le point (x, y) tende d'une façon *quelconque* vers un point intérieur (x_0, h) du segment AB. L'intégrale dont on cherche la limite peut s'écrire

$$\int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(x+u)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{u^2}{4(y-h)}} du$$
$$= \int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{u^2}{4(y-h)}} du + \int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(x+u) - \varphi(x_0)}{\sqrt{y-h}} e^{-\frac{u^2}{4(y-h)}} du;$$

la première intégrale du second membre se met sous la forme

$$(13) \qquad 2\int_{\frac{a-x}{2\sqrt{y-h}}}^{\frac{b-x}{2\sqrt{y-h}}} \varphi(x_0)e^{-t^2}\,dt$$

et a pour limite $2\sqrt{\pi}\varphi(x_0)$ lorsque x tend vers le nombre x_0, *compris entre a et b* et que y tend vers h.

Quant à la seconde intégrale, il est facile de prouver qu'elle tend vers zéro en la décomposant comme il suit :

$$\int_{a-x}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{b-x},$$

ε étant un nombre positif très petit. Soit η une limite supérieure de $|\varphi(x+u)-\varphi(x_0)|$, lorsque x varie de $x_0-\varepsilon$ à $x_0+\varepsilon$ et u de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$; la valeur absolue de la seconde intégrale est inférieure à $2\eta\sqrt{\pi}$ et, par suite, peut être rendue plus petite que tout nombre positif donné en prenant ε assez petit. Ce nombre ε ayant été choisi de cette façon, on démontre, comme plus haut, que la première et la troisième intégrale tendent vers zéro, lorsque $y-h$ tend vers zéro et x vers x_0.

Il est à remarquer que la démonstration ne s'applique plus lorsque le point (x, y) tend vers l'une des extrémités du segment AB, car l'intégrale (13) est indéterminée lorsque x tend vers a et y vers h; la limite de cette intégrale dépend de la façon dont le point (x, y) se rapproche du point A (voir *Exercice* 2).

En résumé, la valeur de l'intégrale définie

$$(14) \qquad u(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{y-h}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\,d\xi$$

tend vers $\varphi(x_0)$ lorsque le point (x, y) se rapproche d'une façon quelconque du point (x_0, h) intérieur au segment AB de caractéristique, en restant au-dessus de ce segment.

L'intégrale (14) conserve un sens lorsque l'une des limites devient infinie pourvu que la fonction $\varphi(\xi)$ satisfasse à certaines conditions. S'il existe un nombre positif K tel que le produit

$$\varphi(\xi)e^{-K\xi^2}$$

soit borné pour toutes les valeurs de ξ, de a à $+\infty$, l'intégrale

définie

$$(15)\qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_a^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{y-h}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}d\xi$$

a un sens lorsque le point (x, y) reste dans un domaine borné D situé entre les deux caractéristique $y = h + \varepsilon$, $y = h + \frac{1-H}{4K}$, H étant un nombre positif inférieur à un.

Un élément quelconque de l'intégrale est, en effet, plus petit en valeur absolue que l'élément correspondant de l'intégrale

$$(16)\qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_a^{+\infty}\frac{M}{\sqrt{y-h}}e^{\frac{-H\xi^2+2x\xi-x^2}{4(y-h)}}d\xi,$$

M étant une limite supérieure de $|\varphi(\xi)e^{-K\xi^2}|$. Or l'intégrale auxiliaire (16) est uniformément convergente dans le domaine D; il en est donc de même de l'intégrale (15), qui représente par suite une solution de l'équation (1) régulière au-dessous de la droite $y = h + \frac{1-H}{4K}$, sauf sur la portion de la droite $y = h$ qui s'étend du point (a, h) à l'infini dans le sens positif. Cette fonction est nulle au-dessous de cette caractéristique et sur la portion à gauche du point (a, h). Au-dessus de la caractéristique, elle est holomorphe en x et y (II, n° 353). Lorsque le point (x, y) tend vers un point de coordonnées (x_0, h), où $x_0 > a$, la limite de l'intégrale (15) est égale à $\varphi(x_0)$, car on peut partager l'intégrale en deux, l'une prise de a jusqu'à un nombre $b < x_0$, l'autre prise de b à $+\infty$. La première, nous venons de le voir, a pour limite $\varphi(x_0)$, tandis que la seconde tend vers zéro. En conservant les mêmes hypothèses sur la fonction $\varphi(\xi)$, les conclusions s'étendent évidemment à l'intégrale $\int_{-\infty}^{a}$, et par suite à l'intégrale [1]

$$(17)\qquad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{y-h}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}d\xi;$$

$\varphi(\xi)$ étant une fonction continue telle que $\varphi(\xi)e^{-K\xi^2}$ reste borné; l'intégrale définie (17) représente une solution de l'équation (1)

---

[1] On opérerait de la même façon pour démontrer rigoureusement que la formule (28) du n° 486 (p. 108) représente l'intégrale cherchée lorsque la fonction $f(x, y, z)$ reste bornée.

qui est holomorphe dans la bande limitée par les caractéristiques

$$y = h, \qquad y = h + \frac{1}{4K},$$

et qui tend vers $\varphi(x_0)$ lorsque le point (x, y) de cette bande tend vers le point (x_0, h) de la caractéristique; le nombre H peut, en effet, être supposé aussi petit qu'on le veut.

Si le produit $\varphi(\xi)e^{-K\xi^2}$ est borné quelle que soit la constante positive K, la fonction $u(x, y)$ est holomorphe dans toute la région située au-dessus de la caractéristique $y = h$. Il en est ainsi en particulier si la fonction $\varphi(\xi)$ est elle-même bornée. On pourrait étendre ces propriétés au cas où $\varphi(\xi)$ admet des discontinuités de première espèce, mais, en un point de discontinuité x_0 $u(x, y)$ ne tend pas forcément vers $\varphi(x_0)$ lorsque le point (x, y) tend vers le point (x_0, h); il tend toujours vers cette limite lorsque le point (x, y) tend vers le point de discontinuité en se déplaçant sur la parallèle à Oy.

La formule (17) donne la solution générale d'un problème de la théorie de la chaleur, dont nous avons déjà traité un cas particulier (n° 487). Étant donné un fil homogène indéfini dans les deux sens, de très faible section, supposons que l'on connaisse au temps h la température $\varphi(x)$ de la tranche d'abscisse x, et qu'on demande la température d'une tranche quelconque à une époque consécutive. La lettre y représentant le temps, la température demandée est une fonction $u(x, y)$ des variables x et y qui, avec un choix convenable d'unités, satisfait à l'équation (1); cette fonction doit être régulière dans toute la portion du plan (x, y) située au-dessus de la droite $y = h$, et se réduire à $\varphi(x)$ pour $y = h$. D'après sa signification physique, la fonction $\varphi(x)$ est évidemment bornée, et par suite la fonction $u(x, y)$ représentée par la formule (17) satisfait à toutes les conditions de l'énoncé. On verra plus loin (n° 545) que c'est la seule. Ceci permet de généraliser la remarque faite plus haut (n° 487) dans le cas particulier où la fonction φ est périodique; le fonction $u(x, y)$ qui exprime la température de la tranche d'abscisse x à une époque y_1 consécutive à l'époque h est une fonction entière de x qui ne peut être prise arbitrairement.

Remarque. — Nous avons établi plus haut (page 52), moyennant

certaines hypothèses sur la fonction $F(x)$, une formule qui représente une intégrale de l'équation (1) se réduisant pour $y=h$, à la fonction $F(x)$. Poisson a montré que cette formule et la formule (17) pouvaient se déduire l'une de l'autre. Supposons, pour simplifier, $h=0$; la formule (17) devient, en posant $\xi = x + 2\sqrt{y}\,t$,

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+2\sqrt{y}\,t)e^{-t^2}\,dt.$$

Remplaçons $\varphi(x+2\sqrt{y}\,t)$ par son développement suivant les puissances de $2\sqrt{y}\,t$; le terme général de l'intégrale a pour expression

$$\frac{2^n y^{\frac{n}{2}} \varphi^{(n)}(x)}{n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt.$$

Si n est impair, ce terme est nul; n étant supposé pair, remplaçons n par $2n$. En tenant compte d'une formule antérieure (I, n° 115), ce terme se réduit à $\frac{y^n \varphi^{(2n)}(x)}{n!}$, et nous trouvons la formule de la page 52 où l'on aurait remplacé F par φ, et y_0 par zéro.

Malgré tout l'intérêt de cette transformation, le raisonnement est évidemment dépourvu de rigueur. D'ailleurs, les deux formules sont bien loin d'être équivalentes. La première suppose que $F(x)$ est une fonction entière d'une certaine espèce et nous donne la valeur de u de part et d'autre de la caractéristique $y=y_0$. Au contraire, la formule (17) ne suppose nullement la fonction $\varphi(x)$ analytique, mais elle n'est applicable qu'au-dessus de la droite $y=h$.

544. Intégrales analogues au potentiel. — Prenons maintenant pour chemin d'intégration un arc AB représenté par l'équation

$$x = \chi(y),$$

la fonction $\chi(y)$ étant continue dans l'intervalle (a, b), où $a < b$. La fonction $\varphi(y)$ étant continue dans le même intervalle, on a vu que l'intégrale définie

$$(18)\qquad \Phi(x,y) = \int_a^y \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\, e^{-\frac{[x-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}}\,d\eta$$

représente une solution de l'équation (1) qui est régulière, ainsi que toutes ses dérivées partielles d'ordre quelconque dans toute région du plan n'ayant aucun point commun dans l'arc AB. Cette fonction est encore continue lorsque le point (x,y) vient sur l'arc AB, car l'intégrale (18) reste uniformément convergente dans le voisinage d'un point quelconque de cet arc (n° 504).

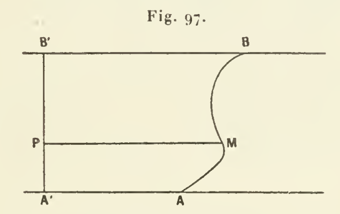
En effet, cette intégrale prise le long d'un arc CD infiniment petit est elle-même infiniment petite, quelle que soit la position du point voisin (x, y); en désignant par H une limite supérieure de $|\varphi(\eta)|$, on a évidemment pour limite supérieure de la valeur absolue de l'intégrale le long de cet arc une expression de la forme

$$H\int_{\alpha}^{y} \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}$$

qui est infiniment petite avec la différence $y - \alpha$. On verra un peu plus loin que $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ est discontinue lorsque le point (x, y) traverse l'arc AB.

Les caractéristiques $y = a$, $y = b$, passant par le point le plus bas et le plus haut de l'arc AB, divisent le plan en plusieurs régions. Au-dessous de la droite A′A et sur cette droite elle-même (*fig.* 97),

Fig. 97.



on a $\Phi(x, y) = 0$; au-dessus de B′B, $\Phi(x, y)$ est une fonction analytique holomorphe des deux variables x et y (n° 542). Il nous reste à étudier la nature de cette fonction dans la bande comprise entre ces deux caractéristiques, à droite ou à gauche de l'arc AB. Supposons que le point (x, y) se déplace sur la parallèle A′B′ à l'axe Oy, comprise entre les deux caractéristiques, et n'ayant aucun point commun [1] avec AB. Soit x_0 l'abscisse de A′;

---

[1] Cette hypothèse ne dimiuue pas la généralité. Soit en effet A_1B_1 un segment de parallèle à Oy, compris entre les caractéristiques

$$y = \alpha, \qquad y = \beta \qquad (a < \alpha < \beta < b),$$

et n'ayant aucun point commun avec l'arc AB. L'intégrale (18) le long de AB se décompose en trois parties : l'intégrale de a à α, qui représente une fonction holomorphe de y le long de A_1B_1, l'intégrale de β à b qui est nulle pour tout point de ce segment, et enfin l'intégrale de α à β, étudiée dans le texte.

$\Phi(x_0, y)$ est une fonction continue de y, ainsi que toutes ses dérivées partielles, dans l'intervalle (a, b), mais *ce n'est pas en général une fonction analytique de* y, si $\varphi(\eta)$ est une fonction continue quelconque. En effet, la valeur de cette fonction en un point P de A′B′ ne dépend que des valeurs de $\varphi(\eta)$ le long de l'arc AM. Si donc on remplace $\varphi(\eta)$ par une autre fonction continue $\varphi_1(\eta)$ qui coïncide avec $\varphi(\eta)$ le long de AM, mais qui en diffère le long de MB, la nouvelle intégrale $\Phi(x, y)$ coïncidera avec $\Phi(x_0, y)$ le long de A′P, mais sera différente de $\Phi(x_0, y)$ le long de PB′. Le point P étant un point quelconque de A′B′, il s'ensuit que $\Phi(x_0, y)$ ne peut être une fonction holomorphe de y le long de A′B′, ni même le long d'une portion quelconque de A′B′. si la fonction $\varphi(\eta)$ est une fonction continue quelconque. Cependant, les dérivées de cette fonction $\Phi(x_0, y)$ vérifient certaines inégalités analogues à celles qui caractérisent les fonctions analytiques [1] (I, n° 197; II, n° 343, notes),

Nous allons d'abord démontrer que, quand on donne à y une valeur fixe. comprise entre a et b, $\Phi(x, y)$ est une fonction holomorphe de la variable complexe $x = x' + ix''$ dans le domaine de la valeur $x = x_0$. Nous avons

$$[x' + ix'' - \chi(\eta)]^2 = [x' - \chi(\eta)]^2 - x''^2 + 2ix''[x' - \chi(\eta)],$$

soit 2ρ le minimun de $|\chi(\eta) - x_0|$ lorsque η varie de a à b. Si l'on a $|x' - x_0| < \rho$. $|x''| < \rho$, la partie réelle de $[x - \chi(\eta)]^2$ est positive et par suite le module du facteur exponentiel dans l'intégrale (18) est inférieur à l'unité. Le module d'un élément quelconque de cette intégrale est donc inférieur à l'élément correspondant de l'intégrale

$$\int_a^y \frac{H}{\sqrt{y - \eta}}\, d\eta,$$

H étant une limite supérieure de $|\varphi(\eta)|$. Il s'ensuit que si l'on donne à x des valeurs complexes telles que $|x - x_0|$ ne dépasse pas le nombre ρ, l'intégrale (18) est uniformément convergente et représente par conséquent une fonction holomorphe de x dans ce

---

[1] E. Holmgren, *Comptes rendus*, 30 décembre 1907 et 9 janvier 1908; *Arkiv. för Matematik*, Band IV, n°s 14 et 18.

domaine. Le module de cette fonction est inférieur à $2H\sqrt{y-a}$ et par conséquent à $2H\sqrt{b-a}$. En résumé, quand on attribue à y une valeur quelconque entre a et b, $\Phi(x, y)$ est une fonction holomorphe de x dans un cercle de rayon ρ décrit du point x_0 pour centre, dont le module reste inférieur à un nombre positif M, lorsqu'on a $|x-x_0| \leqq \rho$, *les deux nombres* M *et* ρ *étant indépendants de la valeur attribuée à* y.

En un point quelconque de A′B′, de coordonnées (x_0, y), on a donc

$$(19) \qquad \left|\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}\right| < \frac{M\, n!}{\rho^n};$$

mais, d'après l'équation (1) et celles qu'on en déduit par des dérivations successives, une intégrale quelconque de cette équation satisfait aussi à la relation $\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}$. Par suite, en posant pour abréger $f(y) = \Phi(x_0, y)$, et $r = \rho^2$, la fonction $f(y)$ satisfait aux conditions suivantes :

1° Elle est continue, ainsi que toutes ses dérivées partielles, dans l'intervalle (a, b);

2° En un point quelconque de cet intervalle, les dérivées successives satisfont aux conditions

$$(9') \qquad f^{(n)}(y) < \frac{M(2n)!}{r^n},$$

M et r étant deux nombres positifs *indépendants* de y.

Nous dirons pour abréger qu'une fonction $f(y)$ satisfaisant à ces conditions est de la classe 2 dans l'intervalle (a, b), la classe 1 étant formée par les fonctions holomorphes. Il est clair d'ailleurs que ces dernières sont comprises parmi les fonctions de la classe 2. On voit aisément que la somme d'un nombre quelconque de fonctions de la classe 2 est aussi une fonction de cette classe; en particulier, la somme d'une fonction de la classe 2 et d'une fonction holomorphe est une fonction de même espèce.

La dérivée par rapport à x de l'intégrale (18) a pour expression $-\frac{1}{2}\Psi(x, y)$, en posant

$$(20) \qquad \Psi(x, y) = \int_a^y \varphi(\eta)\frac{x-\chi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} d\eta = -2\int_a^y \varphi(\eta)\frac{\partial U}{\partial x} d\eta.$$

La fonction $\Psi(x, y)$ est encore une intégrale de l'équation (1), régulière dans toute la bande comprise entre les droites $y = a$, $y = b$, sauf sur l'arc d'intégration Γ. On peut étendre la définition à tout le plan en convenant de prendre $\varphi(\eta) = 0$ pour $\eta > b$. Cette fonction est aussi une fonction analytique de x, quand on donne à y une valeur constante; d'après la façon dont on la déduit de la fonction $\Phi(x, y)$, elle satisfait à des inégalités de même forme que les inégalités (19), en tout point d'un segment $A'B'$ et, par suite, c'est une fonction de y de classe 2 le long de ce segment.

L'intégrale (20) est l'analogue du potentiel de double couche [1] et présente le long de Γ une discontinuité dont l'étude a été faite par M. Holmgren. Nous supposerons que la fonction $\chi(y)$ admet une dérivée continue $\chi'(y)$ dans l'intervalle (a, b).

Suivant la même marche qu'au n° 505, nous étudierons d'abord le cas simple où $\varphi(\eta) = 1$. L'intégrale

$$(21) \qquad F(x, y) = \int_a^y \frac{x - \chi(\eta)}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} d\eta$$

n'a plus, comme dans le cas de l'intégrale de Gauss, une signification géométrique simple qui rende intuitive la discontinuité; une étude directe est donc nécessaire. L'intégrale (21) conserve un sens quand le point $M(x, y)$ coïncide avec un point P de coordonnées (X, Y) de l'arc Γ :

$$(22) \qquad F(X, Y) = \int_a^Y \frac{X - \chi(\eta)}{(Y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[X-\chi(\eta)]^2}{4(Y-\eta)}} d\eta;$$

mais $F(x, y)$ tend vers des limites différentes lorsque le point (x, y) tend vers le point (X, Y), suivant que le point (x, y) est à droite ou à gauche de l'arc Γ. Pour le démontrer, considérons l'intégrale auxiliaire

$$(23) \qquad F_1(x, y) = \int_a^y \frac{-2\chi'(\eta)}{\sqrt{y - \eta}} e^{-\frac{[x-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} d\eta,$$

qui est continue sur l'arc Γ, car elle est de la forme de celles qui ont été étudiées au début de ce paragraphe. On a, comme le prouve un calcul élémentaire,

$$(24) \qquad F(x, y) + F_1(x, y) = 4 \int_\alpha^\beta e^{-u^2} du,$$

[1] Les directions caractéristiques étant confondues, la caractéristique issue d'un point quelconque de Γ peut être considérée comme conjuguée de la tangente par rapport à l'ensemble de ces deux directions.

où $u = \frac{x-\chi(\eta)}{2\sqrt{y-\eta}}$, les limites α et β étant déterminées d'après la position du point (x, y). Supposons d'abord ce point à droite de Γ, ou $x > \chi(y)$; lorsque η varie de a à y, u varie de $\frac{x-\chi(a)}{2\sqrt{y-a}}$ à $+\infty$. Si le point (x, y) était à gauche de Γ, la limite β serait $-\infty$. On a donc, lorsque le point (x, y) n'est pas sur Γ,

$$F(x, y) + F_1(x, y) = 4\int_{\frac{x-\chi(a)}{2\sqrt{y-a}}}^{\pm\infty} e^{-u^2}\,du,$$

relation qui devient, en faisant tendre le point (x, y) vers le point (X, Y),

$$(25)\qquad \lim F(x, y) + \lim F_1(x, y) = 4\int_{\frac{X-\chi(a)}{2\sqrt{Y-a}}}^{\pm\infty} e^{-u^2}\,du,$$

le signe $+$ correspondant au cas où le point (x, y) est à droite de Γ, et le signe $-$ au cas contraire.

Si l'on a $x = X$, $y = Y$, les limites pour u sont $\frac{X-\chi(a)}{2\sqrt{Y-a}}$ et zéro; la formule (24) donne

$$(26)\qquad F(X, Y) + F_1(X, Y) = 4\int_{\frac{X-\chi(a)}{2\sqrt{Y-a}}}^{0} e^{-u^2}\,du.$$

En retranchant membre à membre les relations (25) et (26), et observant que $F_1(x, y)$ est continue au point (X, Y), il vient

$$(27)\quad \lim F(x, y) = F(X, Y) + 4\int_0^{\pm\infty} e^{-u^2}\,du = F(X, Y) \pm 2\sqrt{\pi}.$$

On doit prendre dans cette formule le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que le point (x, y) est à droite ou à gauche de Γ.

Considérons maintenant une intégrale quelconque de la forme (20), qu'on peut écrire

$$(20')\qquad \Psi(x, y) = \int_a^y [\varphi(\eta) - \varphi(y)]\frac{x-\chi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}}\,d\eta + \varphi(y)\int_a^y \frac{x-\chi(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x-\chi(\eta)]^2}{4(y-\eta)}}\,d\eta.$$

Si la fonction $\varphi(y)$ satisfait à la condition de Lipschitz dans l'intervalle (a, b), la valeur absolue d'un élément quelconque de la première intégrale est inférieure à l'élément correspondant d'une intégrale

$$\int_a^y \frac{H\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}}.$$

Par suite, cette intégrale est uniformément convergente dans le domaine d'un point quelconque (X, Y) de Γ et représente une fonction continue dans le voisinage de Γ. La discontinuité de $\Psi(x, y)$ lorsque le point (x, y) tend vers un point (X, Y) se déduit immédiatement de la discontinuité de la seconde intégrale qui vient d'être étudiée et l'on a, en définitive, la formule générale

$$(28)\quad \lim \Psi(x, y) = \pm 2\sqrt{\pi}\,\varphi(Y) + \int_a^Y \varphi(\eta)\frac{X-\chi(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[X-\chi(\eta)]^2}{4(Y-\eta)}}\,d\eta,$$

le signe devant être pris comme on l'a dit plus haut.

Dans le cas particulier où l'arc Γ est un segment de droite $x = x_0$, intégrale qui figure dans le second membre est identiquement nulle. On en conclut que *la limite de l'intégrale*

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_a^y \varphi(\eta)\frac{x-x_0}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4(y-\eta)}}\,d\eta$$

est égale à $\pm\varphi(Y)$ *lorsque le point* (x, y) *tend vers un point* (x_0, Y) *de cette droite*

545. **Extension de la formule de Green. Applications.** — Considérons deux fonctions quelconques $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ des variables x, y, admettant des dérivées jusqu'au second ordre; on a identiquement $\mathcal{F}(\quad)$ et $\mathcal{G}(\quad)$ ayant la même signification que plus haut (n° 540),

$$(29)\qquad \psi\mathcal{F}(\varphi) - \varphi\mathcal{G}(\psi) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi).$$

Si les fonctions φ et ψ sont continues, ainsi que les dérivées partielles de ces fonctions qui figurent dans la formule précédente, à l'intérieur d'un domaine borné D limité par un contour C, on déduit de cette formule (29) la relation suivante, qui est l'équivalente de la formule de Green (n° 506) :

$$(30)\quad \iint_{(D)} [\psi\mathcal{F}(\varphi) - \varphi\mathcal{G}(\psi)]\,dx\,dy = \int_C \varphi\psi\,dx + \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dy,$$

l'intégrale curviligne étant prise dans le sens direct. On en tire facilement une série de conséquences toutes pareilles à celles qui ont été développées pour l'équation de Laplace. En remplaçant ψ par l'unité et φ par une intégrale u de l'équation (1) régulière

dans D, on obtient la nouvelle relation

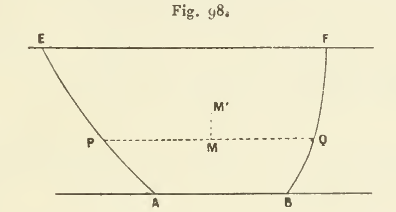
$$(31) \qquad \int_C u\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = 0,$$

qui est évidemment équivalente à l'équation (1) elle-même, d'après la première formule de Green. De même, en remplaçant ψ par l'unité et φ par le carré u^2 d'une intégrale régulière dans D, il vient

$$(32) \qquad 2\int\int_{(D)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = \int_C u^2\,dx + 2u\frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$$

De cette formule, analogue à la formule (12bis) du n° 506, on déduit une conséquence importante. Soit $u(x, y)$ une intégrale régulière à l'intérieur d'un contour ABFE tel que celui de la figure 98, formé de deux segments AB, EF de caractéristiques, et

Fig. 98.



de deux arcs AE, BF, dont chacun ne peut être rencontré qu'en un point par une caractéristique; le segment EF est au-dessus de AB, et l'un ou l'autre de ces segments, ou même les deux, peuvent se réduire à un point. *Si cette intégrale est nulle le long des deux arcs* AE, BF *et du segment* AB, *elle est nulle dans tout ce domaine.*

Soient en effet M un point quelconque de ce domaine, PQ le segment de caractéristique passant par M et compris entre les arcs AE et BF. La relation (32) appliquée au domaine D' limité par le contour ABQPA donne

$$2\int\int_{(D')} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,dy + \int_{PQ} u^2\,dx = 0,$$

puisque u est nul par hypothèse le long de PABQ. Tous les élé-

ments de ces deux intégrales étant positifs ou nuls, il faut donc qu'on ait $u = 0$ tout le long de PQ, et par suite u est nul dans tout le domaine D, puisque M est un point quelconque de ce domaine. On conclut de là qu'il ne peut exister deux intégrales régulières dans le domaine D et prenant des valeurs données le long de AB, de AE et de BE. Le problème qui consiste à déterminer cette intégrale est l'analogue du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace. Le raisonnement qui précède prouve qu'il ne peut admettre plus d'une solution, mais ne démontre pas qu'il existe *une* solution.

Pour obtenir une relation analogue à la formule fondamentale (13) du n° 507, il suffit d'appliquer la même méthode en remplaçant la fonction $\log r$ par la solution fondamentale $U(x, y; \xi, \eta)$. Soient M un point de coordonnées (x_0, y_0) dans le domaine précédent, M' un point voisin du même domaine, de coordonnées x_0, $y_0 + h$, h étant un nombre positif. Appliquons la formule générale (30), en remplaçant les lettres x et y par les lettres ξ, η respectivement, en prenant pour φ une intégrale $u(\xi, \eta)$ de l'équation (1) régulière dans D, et pour ψ la fonction

$$U_0 = U(x_0, y_0 + h; \xi, \eta)$$

qui est une solution de l'équation adjointe régulière dans le même domaine. Cette formule nous donne la relation

$$\int_C u(\xi, \eta) U(x_0, y_0 + h; \xi, \eta)\, d\xi + \left(U_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right) d\eta = 0,$$

en représentant par C le contour ABQPA, ce qu'on peut encore écrire

$$(33)\quad \begin{aligned} &\int_{PQ} u(\xi, y_0)\, e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4h}} \frac{d\xi}{\sqrt{h}} \\ &= \int_{PABQ} u(\xi, \eta) U(x_0, y_0 + h; \xi, \eta)\, d\xi + \left(U_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right) d\eta. \end{aligned}$$

On a vu plus haut (n° 543) que le premier membre de cette égalité a pour limite $2\sqrt{\pi}\, u(x_0, y_0)$ lorsque le nombre positif h tend vers zéro, puisque x_0 est compris entre les abscisses des points P et Q. La limite du second membre s'obtient immédiatement, puisque $U(x_0, y_0 + h; \xi, \eta)$ et $\frac{\partial U_0}{\partial \xi}$ sont des fonctions continues de h le long du contour PABQ. En supprimant les indices des

lettres x_0, y_0, nous obtenons donc la relation

$$(34)\quad u(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{(\mathrm{PABQ})} u(\xi,\eta)\mathrm{U}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi+\left(\mathrm{U}\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\xi}\right)d\eta,$$

qui est l'analogue de la relation (13) du n° 507. Elle s'écrit encore, en remplaçant U par son expression,

$$(35)\quad u(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{(\mathrm{PABQ})}\frac{e^{-\frac{(\eta-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[u(\xi,\eta)\,d\xi+\frac{\partial u}{\partial\xi}\,d\eta\right.$$
$$\left.-u(\xi,\eta)\frac{x-\xi}{2(y-\eta)}\,d\eta\right]\quad(^1).$$

La formule (35) ne donne pas la solution du problème aux limites dont il a été question tout à l'heure, car le second membre ne peut être calculé que si l'on connaît les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial\xi}$ le long des arcs AE et BF. On peut cependant éliminer la valeur de $\frac{\partial u}{\partial\xi}$ sur toute portion du contour composé d'un segment de droite (voir *Exercice* 3).

La formule de Poisson du n° 543 se déduit comme cas limite de la formule générale (35). Supposons que, dans la portion de la bande limitée par les deux caractéristiques d'ordonnées h et $h+\delta$ passant par A et E, située à droite de l'arc AE, l'intégrale $u(x,y)$ soit régulière et de plus qu'il existe un nombre positif K tel que les produits

$$u(x,y)\,e^{-\mathrm{K}x^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x}\,e^{-\mathrm{K}x^2}$$

soient bornés dans ce domaine. Nous allons chercher ce que donne la formule (35) quand on prend pour BF un segment de la droite $x=\mathrm{R}$, R étant un nombre positif qu'on fera croître indéfiniment. La portion de l'intégrale curviligne provenant de BQ est égale à

$$(36)\qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y\frac{e^{-\frac{(x-\mathrm{R})^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{\mathrm{R}}-u(\mathrm{R},\eta)\frac{x-\mathrm{R}}{2(y-\eta)}\right]d\eta.$$

(1) Toute intégrale de l'équation $\mathcal{F}(u)=f(x,y)$, régulière dans D, vérifie une relation qui ne diffère de la relation (35) que par l'addition au second membre du terme

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint_{(\mathrm{D}')}f(\xi,\eta)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}}.$$

Nous allons démontrer que cette intégrale tend vers zéro lorsque R augmente indéfiniment, pourvu que les nombres K et δ vérifient une certaine condition. Prenons la première partie; par hypothèse le produit $\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_R e^{-KR^2}$ est borné, et par suite la valeur absolue de cette intégrale est inférieure à

$$\frac{M}{2\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon R^2} \int_h^y \frac{e^{(K+\varepsilon)R^2 - \frac{(x+R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\, d\eta,$$

M étant un nombre fixe et ε un nombre positif arbitraire. Le facteur $e^{-\varepsilon R^2}$ tendant vers zéro lorsque R augmente indéfiniment, il suffira de montrer que la valeur absolue de l'intégrale

$$(37) \qquad \int_h^y \frac{e^{\frac{4(K+\varepsilon)(y-\eta)R^2 - (x-R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\, d\eta.$$

conserve une valeur finie. Or, le numérateur de l'exposant est plus petit que $4(K+\varepsilon)\delta R^2 - (x-R)^2$, et ce numérateur sera négatif pour des valeurs très grandes de R si le coefficient de R^2, c'est-à-dire $4(K+\varepsilon)\delta - 1$, est négatif; la valeur absolue de l'intégrale (37) est alors inférieure à $\int_h^y \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}$ qui a une valeur finie. La première partie de l'intégrale (36) tend donc vers zéro lorsque R croît indéfiniment, pourvu que δ soit inférieur à $\frac{1}{4(K+\varepsilon)}$; et, comme ε est un nombre positif arbitraire, cette condition sera vérifiée si les nombres K et δ vérifient la relation $4K\delta < 1$. On démontrera de la même façon que la seconde partie de l'intégrale (36) tend aussi vers zéro lorsque R augmente indéfiniment et, dans la formule (35), le contour d'intégration PABQ doit être remplacé par le segment PA et le segment de caractéristique s'étendant du point A à l'infini vers la droite.

Si l'intégrale $u(x, y)$ est régulière dans toute la bande limitée par les deux caractéristiques $y = h$, $y = h + \delta$, et si dans cette bande les produits ue^{-Kx^2}, $\frac{\partial u}{\partial x} e^{-Kx^2}$ restent bornés, les deux nombres positifs K et δ vérifiant la relation $4K\delta < 1$, on peut prendre de même pour la courbe AE un segment de la droite $x = -R$,

R étant un nombre positif qu'on fera croître indéfiniment. On vérifie comme tout à l'heure que la portion de l'intégrale curviligne (35) provenant de PA tend vers zéro, et la formule (35) devient à la limite

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{38}$$

$\varphi(x)$ étant la valeur de l'intégrale $u(x, h)$ le long de la caractéristique $y = h$; nous retrouvons la formule (17) de Poisson (n° 543). Si les produits $u(x, y)\, e^{-Kx^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x} e^{-Kx^2}$ restent bornés dans la partie du plan située au-dessus de la caractéristique $y = h$, aussi petit que soit le nombre positif K, le nombre δ peut être pris aussi grand qu'on le veut, et par suite la formule (38) est applicable dans toute cette partie du plan.

546. **Propriétés des intégrales.** — La formule (35) permet de démontrer quelques propriétés importantes des intégrales de l'équation (1). Soit $u(x, y)$ une intégrale régulière dans un domaine D. Prenons à l'intérieur de D un domaine partiel limité comme celui du numéro précédent, par exemple un rectangle R limité par deux segments de caractéristiques AB, EF, et deux parallèles AE, BF à l'axe Oy. En appliquant la formule (35) à un point quelconque M de ce rectangle, de coordonnées x, y, la fonction $u(x, y)$ est exprimée par une somme d'intégrales curvilignes prises le long de AB, AP, BO respectivement. L'intégrale le long de AB est une fonction analytique des deux variables x, y dans le rectangle R (n° 543); chacune des intégrales, prises le long des segments AP, BQ, est la somme d'une fonction $\Phi(x, y)$ et d'une fonction $\Psi(x, y)$ (n° 544). L'intégrale $u(x, y)$ jouit donc dans le rectangle R des mêmes propriétés que ces fonctions elles-mêmes : toutes ses dévivées partielles sont régulières dans ce rectangle; si l'on donne une valeur constante y_0 à y, $u(x, y_0)$ est une fonction holomorphe de x, tandis que, si l'on donne à x une valeur constante x_0, $u(x_0, y)$ est une fonction de y de classe 2.

Tout segment de droite parallèle à l'un des axes, et situé tout entier dans le domaine D, pouvant être renfermé à l'intérieur d'un rectangle tel que le précédent compris lui-même dans D, nous

pouvons donc énoncer les propositions suivantes : *Si une intégrale* $u(x, y)$ *est régulière dans un domaine* D, 1° *toutes ses dérivées partielles sont régulières dans le même domaine;* 2° *le long d'un segment de caractéristique intérieur à* D, $u(x, y)$ *est une fonction holomorphe de* x; 3° *le long d'un segment de droite parallèle à* Oy *intérieur à* D, $u(x, y)$ *est une fonction de* y *de classe* 2.

Ces propriétés appartiennent aussi aux dérivées partielles de $u(x, y)$, puisqu'elles sont elles-mêmes des intégrales de l'équation (1). En particulier, $\frac{\partial u}{\partial x}$ est une fonction de y de classe 2 le long de tout segment parallèle à Oy situé dans l'intérieur d'un domaine où $u(x, y)$ est régulière. Inversement, étant données deux fonctions de classe 2 dans un intervalle (a, b), $\varphi(y)$, $\psi(y)$, il existe une intégrale satisfaisant aux conditions de Cauchy pour $x = x_0$:

$$u(x_0, y) = \varphi(y), \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0} = \psi(y),$$

et régulière dans le rectangle limité par les droites $y = a$, $y = b$, $x = x_0 \pm r$, r étant un nombre positif convenable. En effet, les dérivées partielles des fonctions $\varphi(y)$, $\psi(y)$ vérifient par hypothèse les inégalités

$$(39) \qquad |\varphi^{(n)}(y)| < \frac{M(2n)!}{\rho^n}, \qquad |\psi^{(n)}(y)| < \frac{M(2n)!}{\rho^n},$$

pour toute valeur de y de l'intervalle (a, b); M et ρ sont deux nombres positifs qu'on peut évidemment prendre les mêmes pour les deux fonctions. La série (6), considérée au n° 541, ainsi que celles qu'on en déduit en dérivant deux fois par rapport à x ou une fois par rapport à y, sont uniformément convergentes, d'après les relations (39), quelle que soit la valeur de y dans l'intervalle (a, b), pourvu qu'on ait $(x - x_0) < \rho^{\frac{1}{2}}$. La somme de cette série représente donc une intégrale de l'équation (1) satisfaisant aux conditions de Cauchy. C'est d'ailleurs la seule intégrale vérifiant ces conditions qui soit régulière dans un domaine D renfermant à l'intérieur le segment de droite considéré. En effet, s'il en existait deux, leur différence serait une intégrale régulière dans D, et nulle ainsi que sa dérivée par rapport à x tout le long de ce

segment de droite. Toutes les dérivées partielles de cette intégrale seraient donc nulles le long du même segment et, comme cette intégrale est une fonction analytique de x, il s'ensuit qu'elle est identiquement nulle ([1]).

On a généralisé les propriétés précédentes en considérant, au lieu d'un segment de droite parallèle à Oy, un arc de courbe AB, représenté par une équation $x = \chi(y)$, $\chi(y)$ étant une fonction holomorphe de y dans l'intervalle (a, b). Si une intégrale $u(x, y)$ est régulière dans un domaine D renfermant l'arc AB à l'intérieur, la fonction $u[\chi(x), y]$, à laquelle elle est égale le long de cet arc est de classe 2. Inversement, étant données deux fonctions $\varphi(y)$, $\psi(y)$, de classe 2 dans un intervalle (a, b), il existe une intégrale et une seule de l'équation (1), régulière dans un domaine renfermant l'arc AB et limité par les droites $y = a$, $y = b$, et les deux courbes $x = \chi(y) \pm r$ (où r est un nombre positif) satisfaisant aux conditions de Cauchy le long de l'arc AB

$$(40) \qquad u(x, y) = \varphi(y), \qquad \frac{du}{dx} = \psi(y), \qquad \text{pour} \quad x = \chi(y).$$

Nous renverrons pour les démonstrations aux travaux de M. Holmgren. Le théorème de Schwarz sur le prolongement analytique d'une fonction harmonique a également été étendu par M. Holmgren aux intégrales de l'équation (1). Soit $u(x, y)$ une intégrale régulière dans un domaine D; on dit qu'elle peut être prolongée dans un domaine D' contigu au premier s'il existe une intégrale $U(x, y)$, régulière dans le domaine D + D', qui coïncide avec $u(x, y)$ dans D. Si le domaine D est limité en partie par un arc AB, qui n'est rencontré qu'en un point par une caractéristique, le prolongement de $u(x, y)$ à travers cet arc AB ne peut être possible que d'une seule manière puisque, le long d'une caractéristique, $u(x, y)$ est une fonction holomorphe de x. On a observé plus haut qu'il n'en était plus de même à travers un segment de caractéristique (n° 544). Cela posé, supposons que l'arc AB soit représenté par l'équation $x = \chi(y)$, la fonction $\chi(y)$ étant holomorphe pour toute valeur de y comprise entre a et b, et que $u(x, y)$ soit une intégrale régulière d'un côté de cet arc, à droite par exemple, et prenant sur AB une suite de valeurs donnée $f(y)$. Pour que

---

([1]) Si les fonctions $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ vérifient les inégalités

$$(39') \qquad |\varphi^{(n)}(y)| < \frac{M\Gamma[n(1+\alpha)]}{\rho^n}, \qquad |\psi^{(n)}(y)| < \frac{M\Gamma[n(1+\alpha)]}{\rho^n},$$

où α est un nombre positif *inférieur* à 1, pour toute valeur de y dans l'intervalle (a, b), la formule (6) représente une intégrale satisfaisant aux conditions de Cauchy, qui est régulière dans la bande comprise entre les caractéristiques $y = a$, $y = b$.

cette intégrale $u(x, y)$ puisse être prolongée à gauche à travers l'arc AB, *il faut et il suffit que dans un intervalle quelconque* (α, β), *compris dans l'intervalle* (a, b), *la fonction* $f(y)$ *soit de classe* 2 [1].

547. Problèmes aux limites. — Soit D un domaine limité comme au nº 545 par deux segments AB, EF, de caractéristiques d'ordonnées h et l $(l > h)$, et deux arcs de courbe AE, BF, compris entre ces caractéristiques, définis respectivement par les deux équations $x = \chi_1(y)$. $x = \chi_2(y)$; les fonctions χ_1, χ_2, χ'_1, χ'_2 sont supposées continues dans l'intervalle (h, l) et $\chi_1 > \chi_2$. Nous nous proposons de démontrer qu'il existe une intégrale et une seule, régulière dans le domaine D, se réduisant sur chacun des arcs AE, BF à une fonction continue donnée $f_1(y)$ ou $f_2(y)$, et sur AB à une autre fonction continue $g(x)$ qui concorde avec les premières aux points A et B. On peut supposer, sans diminuer la généralité, $g(x) = 0$; on a vu, en effet (nº 543), comment on peut former, d'une infinité de manières, une intégrale régulière au-dessus de l'arc AB et prenant les valeurs données sur AB. Soit $u_1(x, y)$ une de ces intégrales : en posant $u - u_1 = z$, la nouvelle fonction inconnue $z(x, y)$ doit se réduire à zéro le long de l'arc AB et à des fonctions continues données de y le long des arcs AE, BF. Nous supposerons donc qu'on a fait tout d'abord cette transformation et par suite qu'on a $g(x) = 0$.

D'après ce qui a été dit au nº 545, ce problème ne peut admettre plus d'une solution. Pour démontrer que cette solution existe, il suffit d'employer une méthode analogue à celle de Neumann (nº 513)

---

[1] On déduit de cette proposition une conséquence analogue à celle qui a été indiquée (note de la page 195) relativement au problème de Cauchy *généralisé*. Soit à déterminer une intégrale $u(x, y)$, satisfaisant aux conditions de Cauchy (40) et définie d'un côté seulement de l'arc analytique AB qui porte les données. Ce problème est en général impossible si les fonctions $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont des fonctions continues quelconques. Soit en effet $u_1(x, y)$ une intégrale régulière du même côté de l'arc AB et satisfaisant à la première condition de Cauchy (*voir* nº 547); la différence $u(x, y) - u_1(x, y)$ étant nulle le long de AB peut être prolongée de l'autre côté et par conséquent

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} = \psi(y)\,\frac{\partial u_1}{\partial x}$$

doit être une fonction de y de classe 2 le long de tout segment de l'arc AB ne renfermant pas les extrémités.

en essayant de représenter l'intégrale cherchée par une somme de fonctions $\Psi(x, y)$ (n° 544). Posons pour cela

$$(41)\qquad u(x, y) = \int_h^y \mu_1(\eta)\frac{x-\chi_1(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[x-\chi_1(\eta)]^2}{4(y-\eta)}}d\eta + \int_h^y \mu_2(\eta)\frac{x-\chi_2(\eta)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[x-\chi_2(\eta)]^2}{4(y-\eta)}}d\eta,$$

μ_1 et μ_2 étant des fonctions continues à déterminer dans l'intervalle (h, l). D'après ce qu'on a démontré plus haut, $u(x, y)$ est une intégrale régulière dans D, nulle le long de AB. Lorsque le point (x, y) se rapproche d'un point (X, Y) de l'arc AE, en restant à droite de cet arc, $u(x, y)$ doit tendre vers $f_1(Y)$, ce qui exige qu'on ait [formule (28)]

$$(42)\quad 2\sqrt{\pi}\,\mu_1(Y) + \int_h^Y \mu_1(\eta)\frac{\chi_1(Y)-\chi_1(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\chi_1(Y)-\chi_1(\eta)]^2}{4(Y-\eta)}}d\eta + \int_h^Y \mu_2(\eta)\frac{\chi_1(Y)-\chi_2(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\chi_1(Y)-\chi_2(\eta)]^2}{4(Y-\eta)}}d\eta = f_1(Y).$$

De même, en écrivant que $u(x, y)$ tend vers $f_2(Y)$, lorsque le point (x, y) tend vers un point d'ordonnée Y de l'arc BF, en restant à gauche de cet arc, on obtient une relation toute pareille :

$$(43)\quad -2\sqrt{\pi}\,\mu_2(Y) + \int_h^Y \mu_1(\eta)\frac{\chi_2(Y)-\chi_1(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\chi_2(Y)-\chi_1(\eta)]^2}{4(Y-\eta)}}d\eta + \int_h^Y \mu_2(\eta)\frac{\chi_2(Y)-\chi_2(\eta)}{(Y-\eta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{[\chi_2(Y)-\chi_2(\eta)]^2}{4(Y-\eta)}}d\eta = f_2(Y).$$

Les deux relations (42) et (43) forment un système d'équations intégrales de la forme

$$(44)\quad \begin{cases} \mu_1(Y) + \displaystyle\int_h^Y \mu_1(\eta)K_1(Y, \eta)\,d\eta + \int_h^Y \mu_2(\eta)K_2(Y, \eta)\,d\eta = F_1(Y), \\ \mu_2(Y) + \displaystyle\int_h^Y \mu_1(\eta)H_1(Y, \eta)\,d\eta + \int_h^Y \mu_2(\eta)H_2(Y, \eta)\,d\eta = F_2(Y), \end{cases}$$

K_1, K_2, H_1, H_2, F_1, F_2 étant des fonctions données, et μ_1, μ_2 les

fonctions inconnues. On démontrera au Chapitre suivant que ce système admet une solution et une seule, sous certaines conditions qui sont vérifiées ici.

Au lieu de se donner la valeur de la fonction inconnue en chaque point des arcs AE, BF, on peut se donner la valeur de $\frac{\partial u}{\partial x}$ ou, plus généralement, supposer que, sur chacun de ces arcs, on connaît la valeur de $u(x, y)$, ou que cette fonction vérifie une relation de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda(y) u = f(y), \tag{45}$$

$\lambda(y)$ et $f(y)$ étant des fonctions connues de y. On arrive encore à un système de deux équations intégrales de la forme (44) en cherchant à représenter la fonction inconnue par la somme d'une fonction $\Phi(x, y)$ et d'une fonction $\Psi(x, y)$, ou par la somme de deux fonctions $\Phi(x, y)$ (n° 544). Il suffit de remplacer dans la formule (41) une fonction $\Psi(x, y)$ par une fonction $\Phi(x, y)$, définie par une intégrale prise le long de celui des arcs pour lequel la fonction inconnue vérifie une relation de la forme (45), et d'observer que $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ est une fonction $\Psi(x, y)$. L'application de la relation (28) conduit encore à un système de deux équations intégrales. Nous avons résolu directement un problème de ce genre au n° 488, car l'équation (35) (p. 112) ne diffère que par les notations de l'équation (1). La solution obtenue étant une fonction impaire de r, les données du problème font connaître la valeur de la fonction inconnue v dans l'intervalle $(-R, +R)$ pour $t = 0$ et l'on a, de plus, une relation linéaire entre $\frac{\partial v}{\partial r}$ et v pour $r = \pm R$.

Considérons le domaine $\mathcal{D}$ formé par la portion de la bande comprise entre deux caractéristiques, située à droite ou à gauche d'un arc Γ, défini par une équation $x = \chi(y)$. En supposant que l'un des arcs AE, BF de la figure 98 s'éloigne indéfiniment, on est conduit comme cas limite au problème suivant : *Déterminer une intégrale régulière dans $\mathcal{D}$, nulle le long de la portion de caractéristique qui limite inférieurement ce domaine, connaissant la valeur de cette intégrale en chaque point de Γ, ou sachant que, le long de Γ, u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ vérifient une relation de la forme* (45).

On cherchera encore à représenter, suivant les cas, la fonction inconnue $u(x, y)$ par une fonction $\Phi(x, y)$ ou par une fonction $\Psi(x, y)$, ce qui conduira à *une* équation intégrale pour déterminer l'inconnue auxiliaire qui figure sous le signe $\int$. Prenons, par exemple, le premier cas et posons

$$u(x, y) = \int_h^y \mu(\eta) \frac{x - \chi(\eta)}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x - \chi(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} d\eta;$$

la fonction $\mu(\eta)$ est déterminée par l'équation intégrale

$$(46) \quad \pm 2\sqrt{\pi}\,\mu(y) + \int_h^y \mu(\eta) \frac{\chi(y) - \chi(\eta)}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[\chi(y) - \chi(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} d\eta = f(y).$$

Cette équation se résout immédiatement si la courbe Γ se réduit à un segment de la droite $x = x_0$, car on a alors $\chi(y) = \chi(\eta)$ et l'on en tire $\pm 2\sqrt{\pi}\mu(y) = f(y)$. Ce résultat a déjà été signalé à la fin du n° 544.

La résolution de ces différents problèmes se ramène aussi à la détermination d'une intégrale de l'équation adjointe jouant le même rôle que la fonction de Green. Nous nous bornerons, pour fixer les idées, au premier de ces problèmes, celui où l'on se donne les valeurs de u le long du contour EABF (*fig.* 98), cette intégrale étant nulle le long de AB. Si l'on connaissait aussi les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}$ le long des arcs AE, BF, la valeur de u en un point (x, y) du domaine D serait donnée par la formule (35), qui devient ici

$$(47) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{(\text{PA}+\text{BQ})} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y - \eta}} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} - u(\xi, \eta) \frac{x - \xi}{2(y - \eta)} \right] d\eta + u\, d\xi \right\}.$$

Soit $g(x, y; \xi, \eta)$ une intégrale de l'équation adjointe

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0,$$

dépendant des deux paramètres (x, y), régulière à l'intérieur du contour PABQ, prenant la valeur zéro en chaque point du seg-

ment PQ et les mêmes valeurs que $\frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}$ le long de PA et de BQ. Les deux fonctions $u(\xi, \eta)$, $g(x, y; \xi, \eta)$ étant régulières à l'intérieur du contour ABQPA, la formule générale (30) donne, puisque $u = 0$ le long de AB et $g = 0$ le long de PQ,

$$(48) \quad 0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{(PA+BQ)} \left[g(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} - u(\xi, \eta) \frac{\partial g}{\partial \xi} \right] d\eta + ug\, d\xi.$$

En retranchant membre à membre les deux égalités précédentes (47) et (48), $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ disparaît, d'après l'hypothèse relative aux valeurs de g le long des arcs AP, BQ, et il reste

$$(49) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{(PA+BQ)} u(\xi, \eta) \left[\frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{x-\xi}{2(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} \right] d\eta$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{(PA+BQ)} u(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial \xi} d\eta,$$

en posant

$$(50) \qquad G(x, y; \xi, \eta) = g(x, y; \xi, \eta) - \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}.$$

On remarquera l'analogie de la formule (49) avec la formule (37) (n° 518) qui donne la solution du problème de Dirichlet.

COMPLÉMENTS ET EXERCICES.

1. Les conditions obtenues au n° 541 pour les coefficients de $F(x)$

$$|a_{2n}| < \frac{M}{r^n} \frac{n!}{(2n)!}, \qquad |a_{2n+1}| < \frac{M}{r^n} \frac{n!}{(2n+1)!}$$

peuvent être transformées comme il suit. La première, par exemple, peut s'écrire

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} < \frac{\sqrt[2n]{M}}{\sqrt{r}} \sqrt[2n]{\frac{n!}{(2n)!}},$$

et, en remplaçant $n!$ et $(2n)!$ par leurs expressions asymptotiques (t. I, p. 291), on arrive à une inégalité de la forme

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} < \frac{L}{\sqrt{2n}},$$

L étant indépendante de n. On a une inégalité toute pareille pour le radical $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|}$ et, par suite, le produit $\sqrt{n}\sqrt[n]{|a_n|}$ reste borné (Le Roux, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIX, 2e série, 1895, p. 127).

2. Pour avoir la limite de l'intégrale (nº 543)

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} d\xi \qquad (a > 0),$$

lorsque x et y tendent vers zéro, on l'écrit, en posant $\xi = x + 2\sqrt{y}\,t$,

$$I = 2\int_{-\frac{x}{2\sqrt{y}}}^{\frac{a-x}{2\sqrt{y}}} e^{-t^2}\,dt = 2\int_{-\frac{x}{2\sqrt{y}}}^{0} e^{-t^2}\,dt + 2\int_0^{\frac{a-x}{2\sqrt{y}}} e^{-t^2}\,dt.$$

Lorsque x et y tendent vers zéro, la seconde intégrale tend vers $\sqrt{\pi}$, mais la première n'a de limite que si $\frac{x}{\sqrt{y}}$ tend vers une limite 2λ, et cette limite est $2\int_{-\lambda}^{0} e^{-t^2}\,dt$. On passe aisément de ce cas particulier au cas général où l'on aurait sous le signe $\int$ une fonction $\varphi(\xi)$ en facteur.

3. Lorsque, dans la figure 98, la courbe AE est une portion de droite, on peut faire disparaître la portion d'intégrale curviligne le long de AP, qui dépend de $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, dans la formule (35).

Soient (x_1, y) les coordonnées d'un point M_1 *extérieur* au domaine D, ayant même ordonnée que le point $M(x, y)$; la fonction $U(x_1, y; \xi, \eta)$ étant régulière dans ce domaine, on a, d'après la formule générale (30),

$$(35') \quad \int_{\text{PAQB}} \frac{e^{-\frac{(x_1-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[u(\xi, \eta)\,d\xi + \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta - u(\xi, \eta) \frac{x_1 - \xi}{2(y-\eta)} d\eta \right] = 0.$$

Pour pouvoir combiner les deux relations (35) et (35′), de façon à

éliminer les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ le long de AE, il suffit de pouvoir choisir les deux nombres x_1 et K de façon qu'on ait, tout le long de AE, la relation

$$(x-\xi)^2-(x_1-\xi)^2=4K(y-\eta).$$

Or, si l'on considère (ξ, η) comme des coordonnées courantes, cette équation représente une ligne droite. Pour que le segment AE appartienne à cette droite, il suffira de choisir sur le prolongement de PQ le point $M_1(x_1, y)$ symétrique de M par rapport au point P et de déterminer ensuite la constante K en égalant, par exemple, les coefficients angulaires.

4. Si $u(x, y)$ est une intégrale de l'équation (1), il en est de même de la fonction

$$u_1(x, y)=\int u\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$$

Les valeurs de $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ sur les arcs AE, BF (*fig.* 98) sont égales aux valeurs de u sur ces arcs.

5. Lorsque, dans la figure 98, l'arc AE est un segment de la droite $x=x_0$, et que l'arc BF est rejeté à l'infini vers la droite, la fonction de Green $g(x, y; \xi, \eta)$ pour un point (x, y) situé à droite de AE, dans la bande comprise entre les deux caractéristiques passant par les points A et E, a pour expression

$$\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\,e^{-\frac{(2x_0-x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}.$$

En déduire le résultat établi à la fin du n° 544.

CHAPITRE XXX.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

Il a été déjà question, à plusieurs reprises, d'équations intégrales dans le courant de cet Ouvrage (I, n° 137; II, n° 389; III, n° 513, 533, 547). Cette nouvelle branche de l'Analyse a pris très rapidement une importance considérable, depuis les travaux de Volterra et de Fredholm. M. Volterra s'est surtout attaché à l'étude des équations à limites variables, en considérant une équation de cette espèce comme un cas limite d'un système d'équations algébriques, où le nombre des inconnues augmente indéfiniment, et cette idée a été reprise ensuite avec le plus grand succès par M. Fredholm pour les équations à limites fixes. Dans ce Chapitre, nous montrons d'abord comment les résultats de M. Volterra s'obtiennent très facilement au moyen de la méthode des approximations successives. La même méthode, appliquée à une équation à limites fixes, ne donne pas en général la solution complète, mais elle conduit à d'importantes propriétés de la résolvante. Les difficultés que semblait présenter la détermination de la nature analytique de cette résolvante permettront d'apprécier l'importance du progrès décisif dû à M. Fredholm [1].

---

[1] Pour l'historique et la bibliographie, je renverrai le lecteur aux Ouvrages de M. Lalesco (*Introduction à la théorie des équations intégrales*, Hermann, 1912) et de MM. Heywold et Fréchet (*L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique*, Hermann, 1912). Les renvois à ces deux Ouvrages seront indiqués par les noms des auteurs.

On pourra consulter aussi un article de M. Hans Hahn, *Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen* (Band 20 des *Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1911), et les expositions générales de M. Kneser, *Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der Math. Physik*, 1911, et de M. Böcher, *Introduction to the study of integral equations*, 1909.

Je dois citer encore un excellent exposé de M. Vivanti, *Elementi della teoria delle equazion integrali lineare* (*Manuali Holpli*, 1916).

I. — ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES A LIMITES VARIABLES.

548. Équation de Volterra. — L'équation de Volterra *de seconde espèce* s'écrit, en introduisant un paramètre λ,

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\varphi(s)\, ds + f(x), \tag{1}$$

K et f étant des fonctions données et $\varphi(x)$ la fonction inconnue. Nous supposerons d'abord que la fonction $K(x, y)$, appelée le *noyau*, est continue à l'intérieur et sur les côtés du triangle limité par les droites $y = a$, $x = b$, $y = x$ $(b > a)$. On verra plus tard (n° 556 et suiv.) qu'on peut faire des hypothèses beaucoup plus générales. Quant à $f(x)$, nous supposerons qu'elle n'a qu'un nombre fini de discontinuités dans l'intervalle (a, b), et, si cette fonction n'est pas bornée, que $\int_a^b |f(s)|\, ds$ a une valeur finie. La fonction inconnue $\varphi(x)$ doit être déterminée pour toute valeur de x de l'intervalle (a, b).

Suivant la méthode déjà employée plusieurs fois, cherchons à satisfaire *formellement* à l'équation (1) en prenant pour $\varphi(x)$ une série entière en λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n \varphi_n(x) + \ldots; \tag{2}$$

ainsi qu'on l'a observé à propos des équations du type hyperbolique (n° 494), cela revient à résoudre l'équation (1) par approximations successives en prenant $f(x)$ pour première valeur approchée de $\varphi(x)$; la $n^{\text{ième}}$ valeur approchée est précisément la somme des n premiers termes de la série (2) obtenue par ce procédé.

En substituant cette série (2) dans les deux membres de l'équation (1) et en égalant les coefficients des mêmes puissances de λ on obtient les relations

$$\varphi_0(x) = f(x), \quad \varphi_1(x) = K[\varphi_0(x)], \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = K[\varphi_{n-1}(x)], \quad \ldots, \tag{3}$$

en posant, d'une manière générale,

$$K[f(x)] = \int_a^x K(x, s) f(s)\, ds, \tag{4}$$

$K[f(x)]$ indique une opération qui, appliquée à une fonction $f(x)$ satisfaisant aux conditions énoncées, conduit à une autre fonction continue dans l'intervalle (a, b) (*voir* n° 556). Les relations (3) déterminent de proche en proche les fonctions $\varphi_n(x)$ qui sont toutes continues à partir de $\varphi_1(x)$. *La série* (2) *ainsi obtenue est uniformément convergente dans cet intervalle, quel que soit* λ.

Supposons d'abord que $f(x)$ soit bornée. Si l'on remplace $K(x, y)$ et $f(x)$ par deux fonctions $K_1(x, y)$ et $f_1(x)$ qui soient respectivement dominantes pour $K(x, y)$ et $f(x)$, la même méthode de résolution appliquée à l'équation auxiliaire

$$(1)' \qquad \Phi(x) = \lambda \int_a^x K_1(x, s)\Phi(s)\, ds + f_1(x)$$

conduira à une série entière en λ dont les coefficients seront évidemment dominants pour les coefficients de même rang de la série (2). Soient M et N deux nombres positifs supérieurs respectivement à $|K(x, y)|$ et à $|f(x)|$. On peut prendre pour équation auxiliaire l'équation simple

$$(5) \qquad \Phi(x) = \lambda \int_a^x M\Phi(s)\, ds + N,$$

dont la solution est l'intégrale de l'équation linéaire

$$\Phi'(x) = \lambda M \Phi(x)$$

qui se réduit à N pour $x = a$, c'est-à-dire $N e^{\lambda M(x-a)}$. On en déduit immédiatement que le coefficient $\varphi_n(x)$ de la série (2) satisfait à la condition

$$(6) \qquad |\varphi_n(x)| < N \frac{M^n (x-a)^n}{n!},$$

ce qu'il serait facile d'établir directement (*cf.* II, n° 389).

La série (2) étant uniformément convergente, on peut intégrer terme à terme le produit $K(x, s)\varphi(s)$ et, d'après la façon même dont on a obtenu les coefficients, la somme de cette série (2) satisfait bien à l'équation (1). *C'est la seule solution.* En effet, s'il en existait deux, leur différence $\psi(x)$ vérifierait l'équation intégrale *homogène*

$$(7) \qquad \psi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\psi(s)\, ds,$$

et cette équation ne peut admettre d'autre solution que $\psi(x) = 0$. Soit, en effet, N un nombre positif supérieur à $|\psi(x)|$; d'après la relation (6), la fonction $\psi_n(x)$ qu'on déduit de $\psi(x)$ au moyen de l'opération $\lambda K[\ \ ]$ appliquée n fois de suite tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Or, si $\psi(x)$ vérifie l'équation (7), toutes les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ qu'on en déduit par l'opération $\lambda K[\ \ ]$ sont identiques à $\psi(x)$. On a donc $\psi(x) = 0$.

Si la fonction $f(x)$ n'est pas bornée dans l'intervalle (a, b), les coefficients de la série (2) sont continus à partir du second. Pour démontrer la convergence, il suffira de partir de l'équation intégrale

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\Phi(s)\,ds + \int_a^x K(x, s) f(s)\,ds$$

obtenue en remplaçant $\varphi(x)$ par $f(x) + \lambda\Phi(x)$ dans l'équation (1). D'une façon générale, la solution $\varphi(x)$ présente les mêmes discontinuités que $f(x)$ dans l'intervalle (a, b).

Les généralisations s'offrent d'elles-mêmes. Par exemple, au lieu d'une seule équation à une fonction inconnue, on peut résoudre tout aussi facilement un système de n équations linéaires à n fonctions inconnues

$$\varphi_i(x) = \lambda \sum_{p=1}^{n} \int_a^x K_{ip}(x, s)\varphi_p(s)\,ds + f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

on prouve de la même façon que les séries obtenues par l'application de la méthode des approximations successives sont uniformément convergentes, si les noyaux $K_{ip}(x, y)$ sont continus, et si les fonctions $f_i(x)$ satisfont aux mêmes conditions que $f(x)$. Laissant de côté ces généralisations et d'autres encore sur lesquelles on reviendra, nous allons étudier de plus près la solution qu'on vient d'obtenir dans le cas simple de l'équation (1).

549. Noyau résolvant. — Les premiers coefficients $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ de la série (2) ont pour expressions

$$\varphi_1(x) = \int_a^x K(x, s) f(s)\,ds, \qquad \varphi_2(x) = \int_a^x K(x, s)\varphi_1(s)\,ds;$$

remplaçons dans la première formule x et s par les lettres s et t respectivement, et portons la valeur obtenue pour $\varphi_1(s)$ dans la

seconde formule; elle devient

$$\varphi_2(x) = \int_a^x ds \int_a^s K(x, s) K(s, t) f(t)\, dt.$$

D'après une formule générale de Dirichlet (I, p. 309), qui va jouer un rôle important dans la suite, on a

$$(8) \qquad \int_a^x ds \int_a^s F(x, s, t)\, dt = \int_a^x dt \int_t^x F(x, s, t)\, ds;$$

cette formule montre que l'expression de $\varphi_2(x)$ peut s'écrire

$$(9) \qquad \varphi_2(x) = \int_a^x K^{(2)}(x, t) f(t)\, dt,$$

en posant

$$(10) \qquad K^{(2)}(x, y) = \int_y^x K(x, s) K(s, y)\, ds.$$

En transformant de même les expressions de $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, ..., on est amené à introduire une suite indéfinie de fonctions $K^{(2)}(x, y)$, $K^{(3)}(x, y)$, ..., $K^{(n)}(x, y)$, ... définies de proche en proche par la relation de récurrence

$$(11) \qquad K^{(n)}(x, y) = \int_y^x K(x, s) K^{(n-1)}(s, y)\, ds;$$

ce sont les *noyaux itérés* successifs de $K(x, y) = K^{(1)}(x, y)$; ils sont tous continus dans le même domaine que $K(x, y)$.

L'expression générale de $\varphi_n(x)$ au moyen du $n^{\text{ième}}$ noyau itéré est

$$(12) \qquad \varphi_n(x) = \int_a^x K^{(n)}(x, s) f(s)\, ds;$$

on le vérifie immédiatement par voie de récurrence au moyen de la formule de Dirichlet. La formule (2), qui représente la solution de l'équation (1), peut donc s'écrire formellement

$$(13) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\, ds,$$

en posant

$$(14) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, y) + \ldots.$$

Pour justifier la formule (13), il suffit de montrer que la série (14) est uniformément convergente; or, si M est une limite supérieure de $|K(x, y)|$, on vérifie de proche en proche que la valeur absolue de $K^{(n)}(x, y)$ est inférieure à $M\frac{|x-y|^{n-1}}{(n-1)!}$. On a donc le droit d'intégrer terme à terme la série ([1]) qui représente le produit $\Gamma(x, s; \lambda) f(s)$. La fonction $\Gamma(x, y; \lambda)$ est une fonction entière du paramètre λ, qui dépend uniquement du noyau $K(x, y)$; on l'appelle le *noyau résolvant*, ou la *résolvante* relative au noyau $K(x, y)$. La formule (13) donne une véritable solution explicite de l'équation (1) pour toutes les formes possibles de $f(x)$, et la résolution de l'équation de Volterra est ramenée à la formation de la résolvante. Remarquons que cette résolvante n'est définie, comme le noyau de $K(x, y)$ lui-même, qu'en supposant x compris entre a et b, et $y < x$. Pour la généralité des formules, on pose $K(x, y) = 0$, $\Gamma(x, y; \lambda) = 0$ pour $\lambda > x$ (*cf.* n° 557).

D'après l'expression même du noyau résolvant $\Gamma(x, y; \lambda)$, ce noyau satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(15)\qquad \Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda\int_y^x K(x, s)\Gamma(s, y; \lambda)\, ds,$$

qui suffirait à le définir, car, si l'on suppose $\Gamma(x, y; \lambda)$ ordonné suivant les puissances de λ, cette relation permet de déterminer de proche en proche les coefficients des diverses puissances de λ, et l'on retrouve les formules (11). On démontrera un peu plus loin (n° 559) que ce noyau satisfait aussi à l'équation fonctionnelle

$$(16)\qquad \Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda\int_y^x K(s, y)\Gamma(x, s; \lambda)\, ds,$$

qui suffit également à le déterminer. Remarquons que les noyaux itérés, et par suite la résolvante, ne dépendent pas de la limite inférieure a.

---

[1] Si $f(x)$ est bornée, la propriété est évidente. Si $f(x)$ n'est pas bornée, soit η une limite supérieure de la valeur absolue du reste $r_n(x, y; \lambda)$ de la série (14) compté à partir du terme en λ^n. On a $\left|\int_a^x r_n(x, s; \lambda) f(s)\, ds\right| < \eta\int_a^x |f(s)|\, ds$, d'où l'on déduit qu'on a encore le droit d'intégrer terme à terme, puisque η tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

Remarque. — On peut regarder, dans l'équation (13), $\varphi(x)$ comme donnée et $f(x)$ comme l'inconnue; la solution de cette équation intégrale est alors donnée par l'équation (1) elle-même. Supposons, pour fixer les idées, $\lambda = 1$; le noyau de la nouvelle équation intégrale est alors $-\Gamma(x, y;\, 1)$, et l'équation (1) montre que la résolvante correspondante a pour expression $-K(x, y)$ pour la même valeur du paramètre (*cf.* n° 560).

550. **Détermination de quelques noyaux résolvants.** — Supposons que $K(x, y)$ soit un polynome de degré $n-1$ en y, qu'on peut toujours mettre sous la forme

$$(17)\quad K(x, y) = a_0(x) + a_1(x)(x-y) + \ldots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1},$$

les coefficients $a_i(x)$ étant continus dans l'intervalle (a, b). Pour déterminer la résolvante $\Gamma(x, y; \lambda)$, nous chercherons la fonction auxiliaire

$$u(x, y; \lambda) = \frac{\lambda}{(n-1)!}\int_y^x \Gamma(t, y; \lambda)(x-t)^{n-1}\,dt + \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!},$$

qui est nulle ainsi que ses $(n-2)$ premières dérivées par rapport à x pour $x = y$, tandis que la dérivée d'ordre $n-1$ est égale à l'unité pour $x = y$. De plus, on a $\dfrac{d^n u}{dx^n} = \lambda\Gamma(x, y; \lambda)$. L'équation fonctionnelle (15) devient donc

$$\frac{d^n u(x, y; \lambda)}{dx^n} = \lambda K(x, y) + \lambda\int_y^x K(x, s)\frac{d^n u(s, y, \lambda)}{ds^n}\,ds,$$

ou, en appliquant à l'intégrale du second membre la formule d'intégration par parties,

$$\frac{d^n u(x, y; \lambda)}{dx^n} = \lambda K(x, y) + \lambda\left[K(x, s)\frac{d^{n-1}u}{ds^{n-1}} - \frac{\partial K(x, s)}{\partial s}\frac{d^{n-2}u}{ds^{n-2}} + \ldots \pm \frac{\partial^{n-1} K}{\partial s^{n-1}}\, u\right]_{s=y}^{s=x}.$$

En tenant compte de l'expression de $K(x, y)$ et des conditions auxquelles satisfait la fonction auxiliaire $u(x, y; \lambda)$, cette relation se réduit à

$$(18)\quad D(u) = \frac{d^n u}{dx^n} - \lambda\left[a_0(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + a_1(x)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\,u\right] = 0.$$

La fonction $u(x, y; \lambda)$ est donc l'intégrale de l'équation linéaire $D(u) = 0$ qui satisfait aux conditions de Cauchy (II, n° 401). En désignant

par $g(x, y; \lambda)$ cette intégrale, on a pour expression du noyau résolvant cherché

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(x, y; \lambda)}{dx^n}. \tag{19}$$

Supposons en second lieu que $K(x, y)$ soit un polynome en x :

$$K(x, y) = b_0(y) + b_1(y)(y-x) + \ldots + \frac{b_{n-1}(y)}{(n-1)!}(y-x)^{n-1}, \tag{20}$$

les coefficients $b_i(y)$ étant continus dans l'intervalle (a, b). Écrivons la résolvante sous la forme $-\frac{1}{\lambda}\frac{d^n u}{dy^n}$, la fonction auxiliaire $u(x, y; \lambda)$ étant nulle ainsi que ses $n-2$ premières dérivées par rapport à y pour $y = x$, tandis que la dérivée $\frac{d^{n-1} u}{dy^{n-1}}$ est égale à l'unité pour $y = x$. L'équation fonctionnelle (16) devient alors

$$\frac{d^n u}{dy^n} = \lambda \int_y^x K(s, y) \frac{d^n u(x, s; \lambda)}{ds^n} ds - \lambda K(x, y); \tag{21}$$

appliquons encore la formule d'intégration par parties, en tenant compte de la forme de $K(x, y)$ et des conditions auxquelles satisfait $u(x, y; \lambda)$, il reste

$$D_1(u) = \frac{d^n u}{dy^n} + \lambda \left[b_0(y) \frac{d^{n-1} u}{dy^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}(y) u \right] = 0. \tag{22}$$

La fonction auxiliaire $u(x, y; \lambda)$ n'est donc autre chose que l'intégrale $g_1(x, y; \lambda)$ de l'équation $D_1(u) = 0$, satisfaisant aux conditions de Cauchy, et le noyau résolvant cherché a pour expression

$$\Gamma(x, y; \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d^n g_1(y, x; \lambda)}{dy^n}. \tag{23}$$

On voit par là comment l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, dépendant d'un paramètre λ comme les équations (18) et (22), permettra de former le noyau résolvant par deux types d'équations de Volterra.

551. Application aux équations différentielles linéaires. — Inversement, la solution du problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire se ramène à la résolution d'une équation de Volterra. Supposons, en effet, qu'on veuille déterminer l'intégrale de l'équation linéaire

$$D(z) = \frac{d^n z}{dx^n} - \left[a_0(x) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x) z \right] = f(x), \tag{24}$$

qui est nulle, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, pour $x = x_0$ (pro-

blème auquel on peut toujours ramener le problème général de Cauchy). Si l'on prend pour inconnue la dérivée $\frac{d^n z}{dx^n} = \varphi(x)$, on a

$$(25)\quad \begin{cases} z = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_{x_0}^{x} (x-s)^{n-1}\varphi(s)\,ds, \\ \dfrac{d^p z}{dx^p} = \dfrac{1}{(n-p-1)!}\displaystyle\int_{x_0}^{x} (x-s)^{n-p-1}\varphi(s)\,ds \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1), \end{cases}$$

et la fonction $\varphi(x)$ est déterminée par une équation de Volterra, dont le noyau $K(x, y)$ a précisément la forme (17), où $\lambda = 1$. Il est aisé d'en déduire le résultat du paragraphe précédent. En effet, on sait que la solution du problème de Cauchy est donnée par la formule

$$z = \int_{x_0}^{x} f(s)g(x, s)\,ds,$$

$g(x, s)$ étant la fonction de Cauchy pour l'équation linéaire $D(z) = 0$; par suite, on a, d'après les propriétés de cette fonction $g(x, s)$,

$$\varphi(x) = \frac{d^n z}{dx^n} = \int_{x_0}^{x} \frac{d^n g(x, s)}{dx^n} f(s)\,ds + f(x),$$

ce qui est bien d'accord avec le résultat obtenu directement. Lorsque l'équation $D(z) = 0$ admet une équation adjointe, on peut aussi trouver l'intégrale $z(x)$ elle-même au moyen d'une équation de Volterra (voir *Exercice* 1).

On voit par là que la résolution de l'équation intégrale (1) se présente comme une généralisation étendue du problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire. Supposons le noyau $K(x, y)$ développable suivant les puissances de $x - y$, les coefficients étant des fonctions de x :

$$K(x, y) = a_0(x) + a_1(x)(x-y) + \ldots + \frac{a_n(x)}{n!}(x-y)^n + \ldots;$$

en limitant la série à ses n premiers termes, on peut faire correspondre à ce noyau particulier une équation différentielle linéaire d'ordre n, $D_n(z) = 0$, et la résolution du problème de Cauchy pour cette équation différentielle linéaire conduit tout naturellement, lorsqu'on fait croître n indéfiniment, à l'équation intégrale de Volterra.

Remarque. — L'artifice par lequel on a ramené une équation différentielle linéaire à une équation intégrale s'applique à l'équation plus générale

$$(26)\quad \frac{d^n z}{dx^n} = a_0(x)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)z + \int_{x_0}^{x} \left[k_0(x, s)z(s)\,ds + \ldots + k_p(x, s)\frac{d^p z}{ds^p}\right] ds + f(x)$$

en supposant $p \leqq n$. Pour déterminer l'intégrale de cette équation *intégro-différentielle* qui est nulle, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées pour $x = x_0$, prenons encore pour inconnue la dérivée $\frac{d^n z}{dx^n} = \varphi(x)$.

L'emploi des formules (25), combiné avec la relation de Dirichlet

$$\int_{x_0}^{x} h(x, s)\, ds \int_{x_0}^{s} (s-t)^p \varphi(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt \int_{t}^{x} h(x, s)(s-t)^p\, ds,$$

donne immédiatement une équation intégrale de la forme (1) pour déterminer $\varphi(x)$. Si l'on avait $p > n$, en prenant de même pour inconnue auxiliaire la dérivée $p^{\text{ième}}$ $\frac{d^p z}{dx^p}$, on serait conduit à une équation intégrale *de première espèce* (*voir* n° 554).

552. Extension aux fonctions de plusieurs variables. — La méthode suivie pour résoudre l'équation (1) s'étend immédiatement à l'équation intégrale suivante, où la fonction inconnue $\varphi(x, y)$ dépend de deux variables x, y,

$$(27)\qquad \varphi(x, y) = \lambda \int_0^x \int_0^y \mathrm{K}(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + f(x, y),$$

et aussi à l'équation un peu plus générale

$$(28)\quad \varphi(x, y) = \lambda \left[\int_0^x \int_0^y \mathrm{K}(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_0^x \mathrm{K}_1(x, y; \xi) \varphi(\xi, y)\, d\xi + \int_0^y \mathrm{K}_2(x, y; \eta) \varphi(x, \eta)\, d\eta \right] + f(x, y);$$

K, K_1, K_2, f sont des fonctions données, continues dans le domaine D défini par les inégalités

$$0 \leqq x \leqq a, \qquad 0 \leqq y \leqq b, \qquad 0 \leqq \xi \leqq x, \qquad 0 \leqq \eta \leqq y.$$

On peut toujours, comme dans le cas des équations (1), trouver une solution formelle de l'équation (28), représentée par une série entière en λ dont tous les coefficients sont des fonctions continues des variables (x, y) se calculant par la voie de récurrence au moyen de cette équation elle-même. Pour démontrer que la série ainsi obtenue est uniformément convergente, désignons par M une limite supérieure des valeurs absolues de K, K_1, K_2 dans le domaine D, par N une limite supérieure de $|f(x, y)|$, et

considérons l'équation auxiliaire

$$(29) \quad \psi(x,y) = \lambda M \left[\int_0^x \int_0^y \psi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \int_0^x \psi(\xi,y)\, d\xi + \int_0^y \psi(x,\eta)\, d\eta \right] + N.$$

En formant de même la solution formelle de l'équation (29), représentée par une série entière en λ, il est clair que le coefficient d'une puissance quelconque de λ, dans cette nouvelle série, sera une fonction dominante pour le coefficient correspondant de la première série. Il nous suffira donc de prouver que l'équation intégrale (29) admet une solution qui est représentée par une série entière en λ, uniformément convergente lorsque le point (x, y) reste dans le domaine considéré. Or, si l'on pose

$$u(x,y) = \int_0^x \int_0^y \psi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

l'équation intégrale (29) est remplacée par l'équation aux dérivées partielles

$$(30) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \lambda M \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u \right) + N;$$

on a démontré déjà (n° 494) que l'intégrale $u(x, y; \lambda)$ de l'équation (30), qui est nulle pour $x = 0$, quel que soit y, et pour $y = 0$, quel que soit x, est représentée par une série entière en λ uniformément convergente, ainsi que $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, lorsque le point (x, y) reste dans le domaine D.

Il en est donc de même, d'après l'équation (30), de $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$, c'est-à-dire de la fonction cherchée $\psi(x, y)$.

On peut aller plus loin et obtenir pour la solution, une formule explicite, analogue à la formule (13). Il suffit, en effet, d'une application répétée de la formule de Dirichlet pour vérifier de proche en proche que le coefficient de λ^n dans la série qui représente la solution est de la forme (voir *Exercice* 2)

$$\int_0^x \int_0^y G_n(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \int_0^x g_n(x,y;\xi) f(\xi,y)\, d\xi + \int_0^y g'_n(x,y;\eta) f(x,\eta)\, d\eta,$$

G_n, g_n, g'_n ne dépendant que de K, K_1, K_2. La fonction $\varphi(x, y)$ a donc pour expression

$$(31)\quad \varphi(x,y)=f(x,y)+\lambda\left[\int_0^x\int_0^y \Gamma(x,y;\,\xi,\,\eta,\,\lambda)f(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta \right.$$
$$+\int_0^x \Gamma_1(x,y;\,\xi,\,\lambda)f(\,\xi,y)\,d\xi$$
$$\left.+\int_0^y \Gamma_2(x,y;\,\eta,\,\lambda)f(x,\eta)\,d\eta\right];$$

les trois fonctions Γ, Γ_1, Γ_2, qui sont entières par rapport au paramètre λ, jouent le même rôle que le noyau résolvant. Remarquons seulement que, si K_1 et K_2 sont nuls, il en est de même de Γ_1 et de Γ_2.

On est conduit à une équation intégrale de la forme (28) en cherchant une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$(32)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\lambda\left[a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,y)z\right]+f(x,y)$$

s'annulant sur les deux caractéristiques $x = 0$, $y = 0$. Si l'on prend en effet pour inconnue auxiliaire la dérivée seconde $\varphi(x, y) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ de l'intégrale cherchée, cette fonction $\varphi(x, y)$ satisfait à l'équation intégrale

$$\varphi(x,y)=\lambda\left[\int_0^x\int_0^y c(x,y)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right.$$
$$\left.+\int_0^x b(x,y)\varphi(\xi,y)\,d\xi+\int_0^y a(x,y)\,\varphi(x,\eta)\,d\eta\right]+f(x,y),$$

qui est un cas particulier de l'équation (28).

Lorsque les coefficients $a(x, y)$, $b(x, y)$ admettent des dérivées partielles continues $\dfrac{\partial a}{\partial x}$, $\dfrac{\partial b}{\partial y}$, on peut aussi déterminer la fonction $z(x, y)$ par une équation de la même forme. Il est clair, en effet, qu'on peut remplacer l'équation (32) par l'équation intégro-différentielle (n° 494)

$$z(x,y)=\lambda\int_0^x\int_0^y\left[c(\xi,\,\eta)z(\xi,\,\eta)+a(\xi,\,\eta)\frac{\partial z}{\partial \xi}+b(\xi,\,\eta)\frac{\partial z}{\partial \eta}\right]d\xi\,d\eta$$
$$+\int_0^x\int_0^y f(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

qu'on ramène à la forme (28) au moyen de deux intégrations par parties :

$$z(x,y) = \lambda \left\{ \int_0^x \int_0^y \left[c(\xi, \eta) - \frac{\partial a}{\partial \xi} - \frac{\partial b}{\partial \eta} \right] z(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right.$$
$$\left. + \int_0^y a(x, \eta) z(x, \eta)\, d\eta + \int_0^x b(\xi, y) z(\xi, y)\, d\xi \right\}$$
$$+ \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

353. **Inversion des intégrales définies.** — On appelle équation de Volterra *de première espèce* l'équation

$$(33) \qquad \int_0^x K(x, s) \varphi(s)\, ds = f(x),$$

$K(x, y)$ et $f(x)$ étant des fonctions données et $\varphi(x)$ la fonction inconnue; nous prenons zéro pour limite inférieure de l'intégrale, au lieu d'une constante quelconque, uniquement pour fixer les idées. Tandis que, pour résoudre une équation de seconde espèce, on a supposé seulement que les fonctions $K(x, y)$ et $f(x)$ étaient continues dans un intervalle (a, b), nous aurons besoin de faire d'autres hypothèses dans l'étude de l'équation (33). Pour se rendre compte de leur nécessité, il suffit de considérer l'équation la plus simple de ce type, obtenue en faisant $K(x, y) = 1$,

$$(34) \qquad \int_0^x \varphi(s)\, ds = f(x).$$

Si la fonction inconnue $\varphi(x)$ est supposée seulement bornée et intégrable, le problème n'est pas déterminé, car on peut changer arbitrairement la valeur de $\varphi(x)$ en un nombre fini quelconque de points dans l'intervalle d'intégration et même en une infinité de points, pourvu qu'on puisse les renfermer dans un nombre fini d'intervalles dont la somme soit plus petite que tout nombre donné ε, sans changer la valeur de l'intégrale (I, n° 74). D'autre part, $f(x)$ ne peut pas être une fonction continue quelconque, mais elle doit satisfaire à certaines conditions où figurent les nombres dérivés. Pour préciser le problème, nous supposerons toujours dans ce qui va suivre, à moins de mention expresse, que la fonction cherchée $\varphi(x)$ doit être continue dans l'intervalle ou

l'on veut la déterminer. Pour que l'équation (34) admette une solution dans l'intervalle $(0, a)$, il faut alors que $f(x)$ soit nul pour $x = 0$ et admette une dérivée continue dans le même intervalle, et la solution cherchée est $\varphi(x) = f'(x)$. Prenons encore l'équation plus générale

$$\int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(s)\, ds = f(x); \tag{35}$$

pour que cette équation admette une solution continue $\varphi(x)$, il faut que $f(x)$ admette des dérivées continues $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ et que la fonction et ses $(n-1)$ premières dérivées soient nulles pour $x = 0$. Si ces conditions sont satisfaites, l'équation (35) a une solution continue $\varphi(x) = f^{(n)}(x)$.

554. Équation de première espèce. — Reprenons l'équation générale de première espèce (33); nous supposerons, dans ce paragraphe, que le noyau $K(x, y)$ et toutes les dérivées partielles, qui figurent dans le calcul, sont continues. Il est évident tout d'abord que la condition $f(0) = 0$ est nécessaire pour que l'équation (33) admette une solution continue $\varphi(x)$. De plus, si le noyau $K(x, y)$ admet une dérivée continue $K'_x(x, y)$, le premier membre de cette équation (33) admet aussi une dérivée continue; il faut donc qu'il en soit de même de $f(x)$. Si cette condition est satisfaite, en égalant les dérivées des deux membres, on obtient la nouvelle équation

$$K(x, x)\varphi(x) + \int_0^x K'_x(x, s)\varphi(s)\, ds = f'(x); \tag{36}$$

inversement, toute solution de cette équation (36) vérifie aussi l'équation (33), puisque les deux membres sont nuls pour $x = 0$, et que leurs dérivées sont identiques. L'équation (36) est une équation de Volterra de seconde espèce, à laquelle on peut appliquer la méthode générale du n° 548 pourvu que $K(0, 0)$ ne soit pas nul. Si $K(x, x)$ ne s'annule pas dans un intervalle $(0, h)$, compris dans l'intervalle $(0, a)$, on a vu que l'équation (36) admettait une solution continue et une seule dans cet intervalle $(0, h)$, ce qui conduit au théorème suivant :

Si l'on a $K(0, 0) \neq 0$, $f(0) = 0$, *et si les fonctions* $f(x)$,

$K(x, y)$ *admettent des dérivées* $f'(x)$, $K'_x(x, y)$, *continues dans un intervalle* $(0, h)$, *compris dans l'intervalle* $(0, a)$, *à l'intérieur duquel* $K(x, x)$ *ne s'annule pas, l'équation* (33) *admet une solution continue et une seule dans cet intervalle* $(0, h)$ [1].

Si $K(0, 0) = 0$, on ne peut plus appliquer à l'équation (36) le résultat du n° 548. Mais, si $K(x, x)$ est nul identiquement, l'équation (36) est encore une équation de première espèce, qu'on peut traiter comme la première, pourvu que $K(x, y)$ admette une dérivée seconde continue $K''_{x^2}(x, y)$. Pour que cette équation (36) ait une solution continue, il faudra que $f'(0) = 0$ et, en outre, que $f'(x)$ ait une dérivée continue $f''(x)$. Si ces conditions sont satisfaites, on pourra aussi remplacer l'équation (36) par l'équation obtenue en différentiant les deux membres

$$(37) \qquad K'_x(x, x)\,\varphi(x) + \int_0^x K''_{x^2}(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f''(x),$$

qui est une équation de seconde espèce pourvu que $K'_x(0, 0)$ ne soit pas nul. Si $K'_x(x, x)$ est identiquement nul, on recommencera la même opération, et ainsi de suite. On est donc conduit à former la suite des dérivées successives par rapport à x du noyau $K(x, y)$ jusqu'à ce qu'on arrive à une dérivée $K^{(p-1)}(x, y)$ qui ne soit pas identiquement nulle pour $x = y$. Pour que l'équation (33) admette une solution continue, il faudra que $f(x)$ admette des dérivées continues $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(p-1)}(x)$ qui soient toutes nulles pour $x = 0$. S'il en est ainsi, les $(p - 1)$ premières équations obtenues en dérivant les deux membres de (33) sont vérifiées pour $x = 0$. Si la dérivée $\dfrac{\partial^p K}{\partial x^p}$ est aussi continue, $f^{(p)}(x)$ doit aussi être continue et, en différentiant une fois de plus, on est conduit à l'équation

$$(38) \qquad K^{(p-1)}(x, x)\,\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial^p K(x, s)}{\partial x^p}\,\varphi(s)\,ds = f^{(p)}(x),$$

qui est une équation de seconde espèce, pourvu que $K^{(p-1)}(0, 0)$ ne

[1] Ce théorème a été établi pour la première fois par LE ROUX, *Thèse de doctorat* (*Annales de l'École Normale*, 1894, p. 19-22).

soit pas nul. Cette équation (38) admet une solution continue et une seule; en remontant de proche en proche, on établira qu'elle vérifie toutes les équations intermédiaires et l'équation (33) elle-même.

Exemple. — Supposons que le noyau $K(x, s)$ soit la fonction de Cauchy $g(x, s)$ relative à une équation linéaire $D(z) = 0$, c'est-à-dire l'intégrale de cette équation qui est nulle, ainsi que ses $n - 2$ premières dérivées par rapport à x pour $x = s$, et dont la dérivée d'ordre $n - 1$ est égale à *un* pour $x = s$.

Pour que l'équation

$$(39) \qquad \int_0^x g(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x)$$

admette une solution continue, il faudra, d'après ce qui précède, que la fonction $f(x)$ et ses $n - 1$ premières dérivées soient nulles pour $x = 0$, et que $f^{(n)}(x)$ soit continue; la fonction inconnue $\varphi(x)$ est alors donnée par l'équation de seconde espèce obtenue en différentiant n fois

$$(40) \qquad \varphi(x) + \int_0^x \frac{d^n g(x, s)}{dx^n}\varphi(s)\,ds = f^{(n)}(x).$$

Soit

$$D(z) = \frac{d^n z}{dx^n} - \left[a_0(x)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x) z\right]$$

le premier membre de l'équation linéaire proposée; on a vu plus haut (nº 350) que $\dfrac{d^n g(x, s)}{dx^n}$ était le noyau résolvant de l'équation de seconde espèce où le noyau est

$$K(x, s) = a_0(x) + a_1(x)\frac{x - s}{1} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{(x - s)^{n-1}}{(n - 1)!}$$

pour la valeur $\lambda = 1$ du paramètre. Inversement, d'après la remarque de la page 329, $-K(x, s)$ est le noyau résolvant pour l'équation de seconde espèce de noyau $-\dfrac{d^n g}{dx^n}$, en supposant toujours $\lambda = 1$. La solution de l'équation (40) a donc pour expression

$$\varphi(x) = f^{(n)}(x) - \int_0^x \left[a_0(x) + a_1(x)(x - s) + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{(x - s)^{n-1}}{(n - 1)!}\right] f^{(n)}(s)\,ds,$$

c'est-à-dire $\varphi(x) = D[f(x)]$ (*cf.* II, nº 401).

Lorsque $K(0, 0) = 0$, sans que $K(x, x)$ soit identiquement nul, la méthode précédente n'est plus applicable. Un cas assez étendu

a été traité par MM. Volterra et Holmgren, puis par M. Lalesco, au moyen d'un mécanisme d'approximations successives. Je renverrai le lecteur au Mémoire de M. Lalesco.

On peut encore ramener l'équation (33) à une équation de seconde espèce au moyen d'une intégration par parties. Représentons la fonction cherchée $\varphi(x)$ par $\frac{du}{dx}$, et prenons $u(0) = 0$. De l'équation (33) on déduit, en intégrant par parties,

$$(41) \qquad K(x, x)\, u(x) - \int_0^x K'_s(x, s)\, u(s)\, ds = f(x);$$

c'est encore une équation de seconde espèce pourvu que $K(0, 0)$ ne soit pas nul. Si le noyau $K(x, s)$ est identiquement nul ainsi que ses $n-2$ premières dérivées par rapport à s pour $s = x$, sans que la dérivée $\frac{\partial^{n-1} K}{\partial s^{n-1}}$ soit nulle pour $x = s = 0$, on ramènera encore l'équation (33) à une équation de seconde espèce en représentant $\varphi(x)$ par la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction auxiliaire $u(x)$, s'annulant, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, pour $x = 0$. On peut aussi employer la méthode des approximations successives (É. Picard, *Comptes rendus*, t. 139, p. 245; 1904).

555. Équation d'Abel généralisée. — Dans le paragraphe précédent, on a employé une ou plusieurs différentiations pour passer de l'équation de première espèce (33) à l'équation (36) ou (38). Voyons quel serait l'effet de l'opération inverse appliquée à la même équation (33). D'une façon générale, pour intégrer n fois successivement entre les limites 0 et x, il suffit de remplacer dans les deux membres x par t, de multiplier par $\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et d'intégrer ensuite par rapport à t entre les limites 0 et x (II, n° 380); on obtient la nouvelle équation

$$\int_0^x (x-t)^{n-1}\, dt \int_0^t K(t, s)\, \varphi(s)\, ds = \int_0^x f(t)\, (x-t)^{n-1}\, dt,$$

qu'on peut écrire, en appliquant la formule de Dirichlet,

$$(24) \qquad \int_0^x \varphi(s)\, ds \left[\int_s^x K(t, s)\, (x-t)^{n-1}\, dt \right] = \int_0^x f(t)\, (x-t)^{n-1}\, dt.$$

C'est encore une équation de première espèce dont le noyau est

$$K_1(x, s) = \int_s^x (x-t)^{n-1}\, K(t, s)\, dt;$$

ce noyau est nul, ainsi que ses dérivées partielles, par rapport à x, jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$, pour $s=x$. Pour résoudre cette équation (42) par rapport à $\varphi(x)$, il faudrait, conformément à la méthode générale, différentier les deux membres au moins $n+1$ fois. L'artifice n'est donc d'aucune utilité lorsque le noyau $K(x, y)$ est continu. C'est au contraire cet artifice, convenablement modifié, qui permet de résoudre l'équation d'Abel généralisée (I, n° **137**)

$$\int_0^x \frac{G(x,s)}{(x-s)^\alpha}\varphi(s)\,ds = f(x), \tag{43}$$

$G(x, s)$ étant une fonction continue qui n'est pas identiquement nulle pour $s=x$, et α un nombre positif inférieur à l'unité. La transformation précédente n'exigeant pas que n soit un nombre entier positif, appliquons-la à l'équation (43) en prenant $n=\alpha$; autrement dit, remplaçons dans cette équation x par t, multiplions les deux membres par $(x-t)^{\alpha-1}$ et intégrons entre les limites o et x. Nous sommes conduits à la nouvelle équation

$$\int_0^x \varphi(s)\,ds\left[\int_s^x \frac{G(t,s)\,dt}{(t-s)^\alpha(x-t)^{1-\alpha}}\right] = \int_0^x f(t)\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}; \tag{44}$$

c'est encore une équation de première espèce dont le noyau est

$$K_1(x,s) = \int_s^x \frac{G(t,s)dt}{(t-s)^\alpha(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Ce noyau ne devient plus infini pour $x=s$, car si l'on pose

$$t = s+(x-s)z,$$

on a aussi

$$K_1(x,s) = \int_0^1 \frac{G[s+(x-s)z, s]\,dz}{z^\alpha(1-z)^{1-\alpha}};$$

il n'est pas nul non plus identiquement pour $x=s$. On peut donc lui appliquer la méthode générale pourvu que $G(o, o)$ ne soit pas nul et que la fonction G soit dérivable par rapport à x. En différentiant les deux membres de l'équation (44) par rapport à x, on obtient l'équation de première espèce

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\,G(x,x)\,\varphi(x)\\ +\int_0^x \frac{\partial K_1(x,s)}{\partial x}\varphi(s)\,ds = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^x f(t)\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right].\end{aligned} \tag{45}$$

Inversement, toute solution $\varphi(x)$ de cette équation (45) satisfait aussi à l'équation (43), car la différence

$$h(x) = \int_0^x \frac{G(x,s)}{(x-s)^\alpha}\varphi(s)\,ds - f(x)$$

satisfait à l'équation

(46) $$\int_0^x \frac{h(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = 0,$$

d'après la façon même dont on a déduit la relation (44) de la relation (43). Appliquons à cette équation le même procédé, c'est-à-dire multiplions par $(s-x)^{-\alpha}$, et intégrons de o à s; un nouveau changement dans l'ordre des intégrations donne $\int_0^x h(t)\,dt = 0$, et par suite, $h = 0$.

Dans le cas particulier de l'équation d'Abel, on a $G = 1$, et par suite, $K_1 = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$; l'équation (44) est donc

(47) $$\int_0^x \varphi(s)\,ds = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^x f(t)\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

On en tire immédiatement

(48) $$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^x f(t)\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right];$$

la dérivée se calcule facilement par une transformation dont on s'est déjà servi dans le cas particulier où $\alpha = \frac{1}{2}$ (I, n°s 100 et 137), et l'on trouve

(49) $$\varphi(x) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\right].$$

Pour une étude plus complète des équations intégrales à une ou plusieurs limites variables, je renverrai le lecteur à l'Ouvrage de M. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, 1913. On pourra consulter aussi le Livre de M. Lalesco et la Thèse de M. Browne [1]. Nous n'étudierons dans la suite qu'une équation à limites fixes, particulièrement importante à cause de ses nombreuses applications à l'Analyse et à la Physique mathématique.

---

[1] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1913.

II. — ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES A LIMITES FIXES.

556. **Hypothèses sur le noyau.** — Nous supposerons tout d'abord que le noyau $K(x, y)$ est borné dans le domaine D limité par les droites $x = a$, $x = b$, $y = a$, $y = b$ $(a < b)$, et que tous les points de discontinuité, s'il en existe, sont distribués sur un nombre *fini* de lignes, qui peuvent être de deux sortes. Les unes, dites *lignes de discontinuité de la première sorte*, ne sont rencontrées qu'en un nombre fini de points par une parallèle à l'un des axes. Les lignes de la *deuxième sorte* sont des segments de droites parallèles à l'un des axes. Un noyau est de la première sorte ou *continu presque partout* (1), s'il n'admet que des lignes de discontinuité de la première sorte; il est de la deuxième sorte s'il admet des lignes de discontinuité de la deuxième sorte. Il est clair qu'un noyau qui n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité est de la première sorte.

Soit $x = x_0$ une ligne de discontinuité de la deuxième sorte; nous supposerons que $K(x_0 + \varepsilon, y)$ a des limites $K(x_0 \pm 0, y)$ lorsque $|\varepsilon|$ tend vers zéro; ces deux fonctions sont intégrables puisque $K(x_0 + \varepsilon, y)$ est bornée et intégrable. Nous supposerons de plus que $K(x_0, y)$ est aussi intégrable, et nous ferons les mêmes hypothèses sur les lignes de discontinuité parallèles à Ox. Il est clair qu'un noyau $K(x, y)$ satisfaisant aux conditions précédentes est intégrable, soit par rapport à l'ensemble des deux variables, soit par rapport à chacune d'elles prise séparément.

Considérons d'abord un noyau $K(x, y)$ de la première sorte, et soit $f(x)$ une fonction intégrable dans l'intervalle (a, b), bornée ou non, mais telle que $\int_a^b |f(s)|\,ds$ ait une valeur finie. *La fonction*

$$F(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\,ds$$

est continue dans l'intervalle (a, b). Nous supposerons, pour simplifier, que le noyau $K(x, y)$ a un seul point de discontinuité y_0

(1) Heywood et Fréchet, p. 6.

sur la droite $x = x_0$; nous pouvons écrire

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^{y_1} [K(x, s) - K(x_0, s)] f(s)\, ds + \int_{y_1}^{y_2} + \int_{y_2}^{b}$$

y_1 et y_2 étant compris entre a et y_0, y_0 et b respectivement. Soit M une limite supérieure de $|K|$; on a d'abord

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} \{ K(x, s) - K(x_0, s) \} f(s)\, ds \right| < 2M \int_{y_1}^{y_2} |f(s)|\, ds.$$

Choisissons y_1 et y_2 assez voisins de y_0 pour que le second membre soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$; y_1 et y_2 étant choisis de cette façon, on peut trouver un nombre η tel que $|K(x, y) - K(x_0, y)|$ soit inférieur à un nombre positif arbitraire, pourvu que $|x - x_0|$ soit $< \eta$, quel que soit y dans les intervalles (a, y_1), (y_2, b) [1], et l'on en déduit facilement que la fonction $F(x)$ est continue. On démontrera tout pareillement que $\int_a^b K(s, y) f(s)\, ds$ est une fonction continue de y dans l'intervalle (a, b).

Soient $K(x, y)$ et $K_1(x, y)$ deux noyaux de la première sorte. *La fonction*

$$F(x, y) = \int_a^b K(x, s) K_1(s, y)\, ds \tag{50}$$

est une fonction continue des variables x, y, *dans le domaine* D. Prenons, en effet, deux points voisins (x_0, y_0), (x_1, y_1) dans ce domaine; on peut écrire

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0) = & \int_a^b K(x_1, s) [K_1(s, y_1) - K_1(s, y_0)]\, ds \\ & + \int_a^b K_1(s, y_0) [K(x_1, s) - K(x_0, s)]\, ds, \end{aligned}$$

et l'on démontrera, comme tout à l'heure, que le second membre tend vers zéro lorsque $x_1 - x_0$ et $y_1 - y_0$ tendent vers zéro.

Les résultats sont un peu différents avec un noyau de la deuxième sorte.

---

(1) Pour la démonstration rigoureuse, voir *Exercice* 3.

Si $K(x, y)$ admet comme lignes de discontinuité certains segments de parallèles à Oy, la fonction

$$F(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds$$

est encore continue pour $x = x_0$, si le noyau n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuité sur la droite $x = x_0$. Mais, si cette droite est une ligne de discontinuité, on a

$$F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0) = \int_a^b [K(x_0 + \varepsilon, s) - K(x_0, s)] f(s)\, ds;$$

par suite, en faisant tendre ε vers zéro, il vient

$$F(x_0 + 0) - F(x_0) = \int_a^b [K(x_0 + 0, s) - K(x_0, s)] f(s)\, ds;$$

la fonction $F(x)$ admet donc, en général, le point x_0 pour point de discontinuité de première espèce.

Soient de même $K(x, y)$, $K_1(x, y)$ deux noyaux dont l'un au moins admet des lignes de discontinuité de la deuxième sorte. La fonction $F(x, y)$ représentée par la formule (50) est encore continue en tout point (x_0, y_0) qui n'appartient à aucune des lignes de discontinuité de cette espèce des deux noyaux. Supposons ensuite que la ligne $x = x_0$ soit une ligne de discontinuité pour le noyau $K(x, y)$ par exemple; nous avons

$$F(x_0 + \varepsilon, y) - F(x_0, y) = \int_a^b K_1(s, y) \{ K(x_0 + \varepsilon, s) - K(x_0, s) \}\, ds$$

et le second membre a pour limite

$$\int_a^b K_1(s, y) \{ K(x_0 + 0, s) - K(x_0, s) \}\, ds,$$

c'est-à-dire une fonction de y qui n'a qu'un nombre fini de discontinuités dans l'intervalle (a, b) d'après l'étude qui vient d'être faite. En résumé, la fonction $F(x, y)$ ne peut avoir comme lignes de discontinuité, dans le domaine D, que les lignes de discontinuité de la deuxième sorte de l'un des noyaux $K(x, y)$, $K_1(x, y)$.

557. **Résolution par approximations successives.** — La méthode d'approximations successives employée pour résoudre l'équation de Volterra (1) s'étend immédiatement à l'équation de Fredholm

$$(51) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s)\, ds + f(x),$$

où le noyau $K(x, y)$ et la fonction $f(x)$ satisfont aux conditions

qui viennent d'être expliquées. Mais, au lieu d'une série toujours convergente, on est conduit en général à une série entière en λ ayant un rayon de convergence *fini*. Nous étudierons en détail, dans le Chapitre suivant, les propriétés de la fonction analytique du paramètre λ qui s'introduit naturellement dans ce calcul. Pour le moment, nous supposerons que la valeur absolue de λ est inférieure au rayon de convergence de la série.

Il y a un grand intérêt pour les applications à ne pas se limiter au cas où le noyau $K(x, y)$ et la fonction $f(x)$ sont continus. C'est pour cela que nous avons pris tout de suite des hypothèses un peu plus générales, que nous serons encore obligés d'élargir par la suite. L'équation de Volterra (1) est un cas particulier de l'équation (51) qu'on obtient en supposant que le noyau $K(x, y)$ est nul pour $y > x$. Tous les résultats qui ont été établis pour l'équation (1) ne sont que des cas particuliers des résultats plus généraux qui vont suivre, et tous les théorèmes que l'on va démontrer s'appliquent à l'équation de Volterra, en tenant compte, bien entendu, de la forme particulière du noyau.

On peut encore obtenir une solution formelle de l'équation (51) représentée par une série entière en λ,

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\,\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\,\varphi_n(x) + \ldots \tag{52}$$

dont les coefficients sont déterminés de proche en proche par la relation de récurrence

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K(x, s)\,\varphi_{n-1}(s)\,ds \qquad (n > 0) \tag{53}$$

avec $\varphi_0(x) = f(x)$. Toutes ces fonctions $\varphi_n(x)$ sont bornées et intégrables à partir de $\varphi_1(x)$, et même continues, si $K(x, y)$ n'a que des lignes de discontinuité de la première sorte. Ces coefficients $\varphi_n(x)$ admettent respectivement pour fonctions dominantes les coefficients $\Phi_n(x)$ de la série

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \lambda\,\Phi_1(x) + \ldots + \lambda^n\,\Phi_n(x) + \ldots \tag{52}$$

que l'on obtient en cherchant une solution formelle de l'équation auxiliaire

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^b M\,\Phi(s)\,ds + F(x), \tag{51$'$}$$

où M est une limite supérieure de $|K(x, y)|$, et $F(x)$ une fonction intégrable et dominante pour $f(x)$, par exemple $|f(x)|$. Toute solution de cette équation auxiliaire est évidemment de la forme $F(x) + C$, et la constante C se détermine par substitution directe. On trouve ainsi que l'équation $(51)'$ admet la solution

$$\Phi(x) = F(x) + \frac{\lambda M \int_a^b F(s)\,ds}{1 - \lambda M(b-a)}$$

qui est développable en série de la forme $(52)'$, pourvu que la valeur de λ vérifie la condition

$$(54) \qquad |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

La série (52) sera donc elle-même uniformément convergente si le paramètre λ satisfait à cette condition et, par suite, la somme $\varphi(x)$ est bien une solution de l'équation proposée. On démontrera comme au n° 548 que c'est la seule solution, si λ satisfait à la condition (54). Si le noyau est continu presque partout, la fonction $\varphi(x)$ présente les mêmes discontinuités que $f(x)$ dans l'intervalle (a, b).

558. **Noyaux itérés.** — Des formules qui donnent $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\,ds, \qquad \varphi_2(x) = \int_a^b K(x, t)\,\varphi_1(t)\,dt,$$

on tire, en remplaçant x par t dans la première, portant la valeur obtenue pour $\varphi_1(t)$ dans la seconde, et intervertissant l'ordre des intégrations [1], une nouvelle expression de $\varphi_2(x)$,

$$\varphi_2(x) = \int_a^b K^{(2)}(x, s) f(s)\,ds,$$

en posant

$$K^{(2)}(x, s) = \int_a^b K(x, t)\,K(t, s)\,dt.$$

---

[1] Il est clair que cette opération est légitime avec les hypothèses qui ont été faites sur le noyau, mais elle peut l'être avec des hypothèses plus étendues, et toutes les conséquences qu'on en déduit s'appliquent encore.

On verra de même que $\varphi_3(x)$ a pour expression

$$\varphi_3(x) = \int_a^b K^{(3)}(x, s) f(s)\, ds,$$

en posant

$$K^{(3)}(x, s) = \int_a^b K(x, t) K^{(2)}(t, s)\, dt.$$

Nous sommes ainsi conduits (*voir* n° 349) à introduire une suite indéfinie de noyaux

$$K^{(1)}(x, y) = K(x, y), \qquad K^{(2)}(x, y), \qquad \ldots, \qquad K^{(n)}(x, y), \qquad \ldots$$

qui se déduisent tous du premier au moyen de la formule de récurrence

$$(55) \qquad K^{(n)}(x, y) = \int_a^b K(x, t) K^{(n-1)}(t, y)\, dt;$$

ce sont les *noyaux itérés* successifs de $K(x, y)$. Ils sont tous bornés dans le domaine D, et continus dans ce domaine si $K(x, y)$ est presque partout continu. D'une façon générale, ils sont continus en tout point non situé sur une ligne de discontinuité de la deuxième sorte de $K(x, y)$. De la définition de ces noyaux on déduit aisément un certain nombre de propriétés qui seront utiles dans la suite. Ainsi, on voit de proche en proche que $K^{(n)}(x, y)$ peut s'écrire

$$K^{(n)}(x, y) = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \ldots K(t_{n-1}, y)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{n-1},$$

et l'on en déduit, par un simple changement dans l'ordre des intégrations, que l'on a, quels que soient les entiers positifs μ et ν,

$$(56) \qquad K^{(\mu+\nu)}(x, y) = \int_a^b K^{(\mu)}(x, t) K^{(\nu)}(t, y)\, dt,$$

et il serait facile de généraliser encore cette dernière formule. Par exemple, $K^{(2\mu)}(x, y)$, $K^{(3\mu)}(x, y)$, ... se déduisent par des itérations successives de $K^{(\mu)}(x, y)$ [1].

---

[1] Dans le cas particulier de l'équation de Volterra, où $K(x, y) = 0$ pour $y > x$, il est clair que tous les noyaux itérés successifs sont nuls aussi, pour $y > x$, et la relation de récurrence (55) se réduit à la relation (11). La résolvante $\Gamma(x, y; \lambda)$ est nulle elle-même pour $y > x$, et les équations fonctionnelles établies plus bas (60) et (61) se réduisent aux équations (15) et (16) du n° 349.

559. **Noyau résolvant.** — On vérifie aisément de proche en proche que le coefficient $\varphi_n(x)$ de λ^n dans la série (52) a pour expression

$$(57) \qquad \varphi_n(x) = \int_a^b K^{(n)}(x, s) f(s)\, ds;$$

en effet, la formule étant supposée exacte pour $\varphi_n(x)$, on a, d'après la relation de récurrence (53),

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b K(x, t)\, \varphi_n(t)\, dt = \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, K^{(n)}(t, s) f(s)\, ds\, dt,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b f(s)\, K^{(n+1)}(x, s)\, ds.$$

Cela étant, considérons la série

$$(58) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, y) + \ldots.$$

D'après la loi de formation des coefficients, si M est une limite supérieure de $|K(x, y)|$, $|K^{(n)}(x, y)|$ sera $< M^n(b-x)^{n-1}$ en tout point de D; la série (58) est donc uniformément convergente [1] dans ce domaine, si le paramètre λ satisfait à la condi-

[1] M. E. Schmidt a fait connaître une limite inférieure du rayon de convergence de la série (58), qui est plus grande que la limite (54). La méthode de M. Schmidt est fondée sur l'inégalité de Schwarz (I, p. 243),

$$(A) \qquad \left[\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx\right]^2 \leqq \int_a^b f^2(x)\, dx \times \int_a^b \varphi^2(x)\, dx,$$

que l'on obtient en écrivant que la forme quadratique en α, β

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta \varphi(x)]^2\, dx$$

est une forme définie et qui s'étend évidemment aux intégrales multiples, pourvu que le champ d'intégration soit le même dans les trois intégrales. Appliquons l'inégalité de Schwarz à la formule qui donne le $n^{\text{ième}}$ noyau itéré $K^{(n)}(x, y)$; on en déduit

$$[K^{(n)}(x, y)]^2 \leqq \int_a^b [K^{(n-1)}(t, y)]^2\, dt \times \int_a^b [K(x, t)]^2\, dt$$

et, par suite,

$$\int_a^b \int_a^b [K^{(n)}(x, y)]^2\, dx\, dy$$
$$\leqq \int_a^b \int_a^b [K^{(n-1)}(t, y)]^2\, dy\, dt \times \int_a^b \int_a^b [K(x, t)]^2\, dx\, dt;$$

tion (54). Par suite, on peut intégrer terme à terme (n° 549) la série qui donne le développement du produit $\Gamma(x, s; \lambda) f(s)$, et la formule (52) qui donne la solution de l'équation intégrale prend la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\, ds. \tag{59}$$

La fonction $\Gamma(x, y; \lambda)$ s'appelle encore la *résolvante* ou le *noyau résolvant* pour l'équation (51), et la formule (59) donne une véritable solution explicite de l'équation intégrale au moyen de la résolvante. Mais cette formule (59) n'est établie que pour des valeurs du paramètre dont le module est inférieur à une certaine limite, car la série (58) n'est plus en général une fonction entière

---

l'application répétée de cette dernière formule conduit à l'inégalité

$$\int_a^b \int_a^b [K^{(n)}(x, y)]^2\, dx\, dy \leqq \left\{ \int_a^b \int_a^b [K(x, y)]^2\, dx\, dy \right\}^n. \tag{B}$$

On a, d'autre part, d'après la formule (56) et les relations analogues,

$$K^{(n)}(x, y) = \int_a^b \int_a^b K(x, s)\, K^{(n-2)}(s, t)\, K(t, y)\, ds\, dt$$

et, par suite, en appliquant l'inégalité de Schwarz aux intégrales doubles

$$[K^{(n)}(x, y)]^2 \leqq \int_a^b \int_a^b [K^{(n-2)}(s, t)]^2\, ds\, dt \times \int_a^b \int_a^b [K(x, s)\, K(t, y)]^2\, ds\, dt. \tag{C}$$

En rapprochant les inégalités (B) et (C), il vient enfin

$$[K^{(n)}(x, y)]^2 \leqq \left\{ \int_a^b \int_a^b [K(x, y)]^2\, dx\, dy \right\}^{n-2} \times \int_a^b [K(x, s)]^2\, ds \times \int_a^b [K(t, y)]^2\, dt,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$|K^{(n)}(x, y)| \leqq L^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{N},$$

en posant

$$L = \int_a^b \int_a^b [K(x, y)]^2\, dx\, dy, \qquad N = \int_a^b [K(x, s)]^2\, ds \times \int_a^b [K(t, y)]^2\, dt.$$

La série (58) est donc uniformément convergente dans tout le domaine D, pourvu que la valeur absolue de λ soit inférieure à $\frac{1}{\sqrt{L}}$.

de λ, comme dans le cas de l'équation de Volterra. Elle admet, au contraire, un rayon de convergence fini, si le noyau $K(x, y)$ est quelconque, de sorte que la formule (59) ne résout que partiellement le problème. La solution complète sera exposée dans le Chapitre suivant. Il existe cependant des noyaux, autres que celui de Volterra, pour lesquels la formule (59) donne la solution de l'équation intégrale quelle que soit la valeur de λ. Tel est le cas d'un noyau *orthogonal à lui-même*, c'est-à-dire tel que le noyau $K^{(2)}(x, y)$ soit identiquement nul. Tous les autres noyaux itérés sont nuls aussi, et le noyau résolvant se réduit à $K(x, y)$ ([1]).

Supposons que λ vérifie la relation (54), ou, plus généralement, que la série (58) soit uniformément convergente dans D pour la valeur attribuée à ce paramètre. La fonction $\Gamma(x, y; \lambda)$ satisfait aux deux équations fonctionnelles

$$\Gamma(x,y;\lambda) = K(x,y) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\Gamma(t,y;\lambda)\,dt, \tag{60}$$

$$\Gamma(x,y;\lambda) = K(x,y) + \lambda \int_a^b K(t,y)\,\Gamma(x,t;\lambda)\,dt. \tag{61}$$

La première, par exemple, se démontre en remplaçant x par t dans la formule (58), puis en multipliant les deux membres par $K(x, t)$ et intégrant terme à terme entre les limites a et b; la seconde s'établit de la même façon. Ces relations permettent aisément de vérifier que la fonction $\varphi(x)$, représentée par la formule (59), satisfait à l'équation intégrale (51) et, de plus, que c'est la seule solution, en supposant toujours que la série (58) est convergente pour la valeur de λ considérée. Le calcul se faisant de la même façon dans les deux cas, nous démontrerons seulement la seconde partie.

([1]) Si les limites a et b sont o et π, le noyau

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx \cos ny,$$

la série $\Sigma\,|a_n|$ étant convergente, est orthogonal à lui-même. Pour le noyau

$$K(x, y) = a_1 \sin x \sin 2y + a_2 \sin 2x \sin 3y + \ldots + a_p \sin px \sin(p+1)y,$$

la résolvante $\Gamma(x, y; \lambda)$ est un polynome de degré $p-1$ en λ.

Soit $\varphi(x)$ une solution de l'équation (51). On déduit de cette équation

$$\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\,\varphi(s)\,ds = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\,ds + \lambda \int_a^b \int_a^b K(s, t)\,\Gamma(x, s; \lambda)\,\varphi(t)\,dt\,ds,$$

ou, en tenant compte de la formule (61),

$$\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\,\varphi(s)\,ds = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\,ds + \int_a^b \varphi(t)[\Gamma(x, t; \lambda) - K(x, t)]\,dt,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\,ds = \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt.$$

En combinant cette égalité avec l'équation (51) elle-même, on retrouve bien la formule (59) et nous vérifions ainsi ce résultat déjà obtenu d'une autre façon : *pourvu que la valeur absolue de* λ *soit assez petite, l'équation* (51) *admet une solution et une seule, qui est donnée par la formule* (59).

En permutant les variables x et y dans le noyau $K(x, y)$, on obtient un nouveau noyau $K(y, x)$, en général distinct du premier. L'équation de Fredholm correspondante

$$(62) \qquad \psi(x) = \lambda \int_a^b K(s, x)\,\psi(s)\,ds + g(x)$$

est dite *associée* à l'équation (51). On voit aussitôt que les noyaux déduits de $K(y, x)$ par itération se déduisent aussi des noyaux itérés de même rang $K^{(n)}(x, y)$ en permutant x et y, de sorte que la résolvante relative à l'équation (62) est précisément $\Gamma(y, x; \lambda)$. La conclusion est la même que pour l'équation (51); si la valeur absolue de λ est assez petite, l'équation (62) admet une solution et une seule qui est représentée par la formule

$$(63) \qquad \psi(x) = g(x) + \lambda) \int_a^b \Gamma(s, x; \lambda)\,g(s)\,ds.$$

Dans le cas particulier d'une équation de Volterra, le noyau $K(y, x)$ est nul pour $y < x$, et l'équation associée est une autre équation de Volterra

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_x^b K(s, x) \psi(s) \, ds.$$

560. Propriétés des noyaux résolvants. — Du développement (58) du noyau résolvant on déduit encore d'autres propriétés importantes de cette fonction. La démonstration suppose que le module de λ est inférieur au rayon de convergence, mais ces propriétés, d'après leur nature même, subsistent dans tout le domaine d'existence de la fonction analytique $\Gamma(x, y; \lambda)$ du paramètre λ. Soit $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ le noyau résolvant pour l'équation de Fredholm où l'on aurait pris $K^{(n)}(x, y)$ comme noyau; d'après une remarque antérieure, on a

$$\Gamma_n(x, y; \lambda) = K^{(n)}(x, y) + \lambda K^{(2n)}(x, y) + \ldots + \lambda^{p-1} K^{(pn)}(x, y) + \ldots.$$

Cette fonction $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ s'exprime très simplement au moyen de $\Gamma(x, y; \lambda)$. Multiplions, en effet, les deux membres de la formule (58) par λ, et remplaçons-y successivement λ par $\omega\lambda$, $\omega^2\lambda$, ..., $\omega^{n-1}\lambda$, ω désignant une racine primitive de l'équation $\omega^n = 1$.

En ajoutant membre à membre les relations ainsi obtenues, il reste, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned} &n\lambda^n \Gamma_n(x, y; \lambda^n) \\ &\quad = \lambda[\Gamma(x, y; \lambda) + \omega \Gamma(x, y; \omega\lambda) + \ldots + \omega^{n-1} \Gamma(x, y; \omega^{n-1}\lambda)], \end{aligned}$$

et, par suite, en remplaçant λ par $\lambda^{\frac{1}{n}}$,

$$(64) \quad \Gamma_n(x, y; \lambda) = \frac{\Gamma\left(x, y; \lambda^{\frac{1}{n}}\right) + \omega \Gamma\left(x, y; \omega\lambda^{\frac{1}{n}}\right) + \ldots + \omega^{n-1} \Gamma\left(x, y; \omega^{n-1}\lambda^{\frac{1}{n}}\right)}{n\lambda^{1-\frac{1}{n}}}.$$

Inversement, on peut déduire $\Gamma(x, y; \lambda)$ de $\Gamma_n(x, y; \lambda)$. Nous avons, en effet,

$$\begin{aligned} &\int_a^b K^{(i)}(x, s) \Gamma_n(s, y; \lambda) \, ds \\ &\quad = K^{(n+i)}(x, y) + \lambda K^{(2n+i)}(x, y) + \lambda^2 K^{(3n+i)}(x, y) + \ldots, \end{aligned}$$

et, par conséquent, on peut encore écrire la formule (58), en

groupant les termes de n en n à partir du $n^{\text{ième}}$,

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-2} K^{(n-1)}(x, y)$$
$$+ \lambda^{n-1} \Gamma_n(x, y; \lambda^n) + \lambda^n \int_a^b K(x, s) \Gamma_n(s, y; \lambda^n)\, ds + \ldots$$
$$+ \lambda^{2n-2} \int_a^b K^{(n-1)}(x, s) \Gamma_n(s, y; \lambda^n)\, ds,$$

ou encore

$$(65) \qquad \Gamma(x, y; \lambda) = H(x, y; \lambda) + \lambda^{n-1} \Gamma_n(x, y; \lambda^n) + \lambda^n \int_a^b H(x, s; \lambda) \Gamma_n(s, y; \lambda^n)\, ds,$$

en posant

$$(66) \quad H(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-2} K^{(n-1)}(x, y).$$

Voici une autre propriété importante dont la démonstration est bien facile. Considérons la fonction $\Gamma(x, y; \lambda)$ comme un noyau, et appliquons-lui le même procédé d'itération; nous obtenons une suite de fonctions, dont la première $\Gamma^{(1)}(x, y; \lambda) = \Gamma(x, y; \lambda)$, et que nous désignerons par une notation analogue

$$\Gamma^{(2)}(x, y; \lambda), \quad \Gamma^{(3)}(x, y; \lambda), \quad \ldots, \quad \Gamma^{(n)}(x, y; \lambda), \quad \ldots;$$

ces fonctions se calculent de proche en proche par la relation de récurrence

$$\Gamma^{(n)}(x, y; \lambda) = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \Gamma^{(n-1)}(s, y; \lambda)\, ds.$$

On vérifie aisément de proche en proche, d'après cette loi de récurrence et les expressions des noyaux itérés successifs, que l'on a

$$\Gamma^{(2)}(x, y; \lambda) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda}, \qquad \Gamma^{(3)}(x, y; \lambda) = \frac{1}{1.2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \lambda^2}, \qquad \ldots$$

et, d'une façon générale,

$$\Gamma^{(n)}(x, y; \lambda) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} \Gamma}{\partial \lambda^{n-1}}.$$

Le développement de la fonction $\Gamma(x, y; \lambda + \mu)$ suivant les puissances de λ par la formule de Taylor a donc la forme suivante :

$$(67) \qquad \Gamma(x, y; \lambda + \mu) = \Gamma(x, y; \mu) + \lambda \Gamma^{(2)}(x, y; \mu) + \ldots + \lambda^{n-1} \Gamma^{(n)}(x, y; \mu) \ldots;$$

par conséquent, *si l'on considère* $\Gamma(x, y; \mu)$ *comme le noyau d'une équation de Fredholm,* μ *ayant une valeur déterminée, le noyau résolvant correspondant est précisément* $\Gamma(x, y; \lambda + \mu)$. Ceci permet de généraliser les relations fonctionnelles (60) et (61) qui ne sont que des cas particuliers de la relation générale

$$(68)\quad \Gamma(x, y; \lambda + \mu) = \Gamma(x, y; \mu) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, t; \mu)\Gamma(t, y; \lambda + \mu)\, dt;$$

en supposant $\mu = 0$, on retrouve la formule (60). En remplaçant λ par $-\lambda$ et μ par λ, on obtient la formule (61). Cette formule (68) peut encore s'écrire, d'une façon plus symétrique, en remplaçant μ par λ et λ par $\lambda' - \lambda$,

$$(69)\quad \Gamma(x, y; \lambda') - \Gamma(x, y; \lambda) = (\lambda' - \lambda)\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\Gamma(t, y; \lambda')\, dt,$$

et il suffit de faire tendre λ' vers λ pour obtenir une relation intégro-différentielle

$$(70)\qquad \frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\Gamma(t, y; \lambda)\, dt$$

qui, jointe à la condition $\Gamma(x, y; 0) = K(x, y)$, caractérise le noyau résolvant, car, si l'on cherche à développer Γ suivant les puissances de λ en tenant compte de ces deux relations, on retrouve précisément le développement (58).

Remarque I. — Les formules (51) et (59) peuvent être considérées comme inverses l'une de l'autre. En effet, regardons dans la relation (59), $\varphi(x)$ comme donnée et $f(x)$ comme l'inconnue, et écrivons-la sous une forme un peu plus générale,

$$(71)\qquad f(x) = \varphi(x) + \mu \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s)\, ds.$$

C'est une équation de Fredholm dont le noyau est $\Gamma(x, y; \lambda)$. La résolvante est, comme on vient de le démontrer, $\Gamma(x, y; \lambda + \mu)$ et pour la valeur $\mu = -\lambda$ du paramètre, cette résolvante se réduit à $\Gamma(x, y; 0) = K(x, y)$. La formule qui donne la solution de l'équation (59) est donc identique à l'équation (51).

Remarque II. — Les formules (68) et (69) ne sont démontrées

par ce qui précède que si les modules de λ, λ', μ sont assez petits. Mais les deux membres étant des fonctions analytiques de ces paramètres, il est clair que l'égalité subsiste dans tout le domaine d'existence de la résolvante. Observons encore que ces relations sont indépendantes du noyau primitif $K(x, y)$. Toute fonction $\Gamma(x, y; \lambda)$ satisfaisant à ces relations permettra d'écrire explicitement la solution d'une infinité d'équations intégrales. Il suffira de donner au paramètre une valeur particulière λ_0 telle que $\Gamma(x, y; \lambda)$ soit holomorphe dans le voisinage, et de prendre pour noyau $\Gamma(x, y; \lambda_0)$. La résolvante correspondante est $\Gamma(x, y; \lambda_0 + \lambda)$.

561. **Noyaux non bornés.** — Dans les applications les plus importantes, on est conduit à des équations intégrales où le noyau ne reste pas borné, tout en étant intégrable. Si le procédé d'approximations successives employé plus haut (nº 557) conduit à des fonctions $\varphi_n(x)$ ayant une valeur finie, les formules (52) et (59) nous donnent encore une solution formelle de l'équation intégrale. Cette solution formelle est acceptable dans le cas très étendu où les noyaux déduits de $K(x, y)$ par des itérations successives restent bornés à partir de l'un d'eux, $K^{(n)}(x, y)$ par exemple. La série (58) présente alors au début un certain nombre de termes qui peuvent devenir infinis, mais à partir du terme en λ^{n-1} tous les coefficients restent bornés. La série formée par ces termes est encore uniformément convergente pourvu que $|\lambda|$ soit inférieur à une certaine limite. Soit, en effet, M une limite supérieure de $|K^{(n)}(x, y)|$; on voit immédiatement que la série formée par les termes pris de n en n à partir de $\lambda^{n-1}K^{(n)}(x, y)$ est uniformément convergente pourvu que $M(b-a)|\lambda^n|$ soit inférieur à l'unité, et il en est de même des différentes séries obtenues en prenant les termes de n en n à partir de $\lambda^n K^{(n+1)}(x, y), \ldots, \lambda^{2n-2}K^{(2n-1)}(x, y)$. Les raisonnements des numéros précédents s'appliquent donc encore et la formule (59) donne la solution de l'équation intégrale pourvu que $|\lambda|$ soit assez petit. Toutes les propriétés du noyau résolvant qui découlent du développement en série (58) s'appliquent encore dans le cas plus étendu d'un noyau non borné, pourvu que cette série ait un rayon de convergence différent de zéro; c'est ce qui a lieu, nous venons de le voir, lorsque tous les noyaux itérés sont bornés à partir d'un certain rang.

On peut prouver directement que la résolution de l'équation (51) se ramène à la résolution d'une équation de même espèce dont le noyau est $K^{(n)}(x, y)$. De la relation (51) on tire, en effet,

$$\lambda^p \int_a^b K^{(p)}(x, s)\varphi(s)\,ds = \lambda^{p+1}\int_a^b K^{(p+1)}(x, s)\varphi(s)\,ds + \lambda^p \int_a^b K^{(p)}(x, s) f(s)\,ds,$$

p étant un nombre entier positif. Ajoutons à l'équation (51) toutes les relations obtenues en faisant $p = 1, 2, \ldots, n-1$; il reste

$$(51)' \quad \varphi(x) = \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, s)\varphi(s)\,ds + \left[f(x) + \lambda\int_a^b K(x, s) f(s)\,ds + \ldots + \lambda^{n-1}\int_a^b K^{(n-1)}(x, s) f(s)\,ds\right]$$

de sorte que $\varphi(x)$ est une solution de la nouvelle équation (51)'. Inversement, soit $\varphi(x)$ une solution de l'équation (51)'; cette fonction $\varphi(x)$ satisfait aussi à l'équation

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds - f(x) = \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, s)[\varphi(s) - f(s)]\,ds - \lambda^{n+1}\int_a^b K^{(n+1)}(x, s)\varphi(s)\,ds,$$

qui s'en déduit par une combinaison facile, et qu'on peut écrire

$$\psi(x) = \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, s)\psi(s)\,ds,$$

en désignant par $\psi(x)$ le premier membre de la relation précédente. Or, cette dernière équation n'admet pas d'autre solution que $\psi(x) = 0$, pourvu que $|\lambda|$ soit assez petit; la fonction $\varphi(x)$, solution de l'équation (51)', satisfait donc aussi à l'équation (51). Le lecteur vérifiera aisément l'identité des solutions des deux équations (51) et (51)' données par les formules générales, en tenant compte de la relation (65) entre les résolvantes $\Gamma(x, y; \lambda)$ et $\Gamma_n(x, y; \lambda^n)$.

Le cas le plus intéressant pour les applications est celui d'un noyau $\dfrac{G(x, y)}{|x - y|^\alpha}$, dont le numérateur reste borné et où l'exposant α

est positif et *inférieur à un*, de façon que l'intégrale

$$\int_a^b K(x, s) f(s)\, ds$$

ait une valeur finie en général, le nombre α est dit l'*exposant de ce noyau*. Étant donnés deux noyaux de cette espèce, $\frac{G}{|x-y|^\alpha}$ et $\frac{G_1}{|x-y|^\beta}$, d'exposants α et β respectivement, le noyau

$$(72) \qquad F(x, y) = \int_a^b \frac{G(x, s)\, G_1(s, y)}{|x-s|^\alpha\, |s-y|^\beta}\, ds$$

est un noyau *d'exposant* $\alpha + \beta - 1$ *au plus*. Supposons, pour fixer les idées, $x < y$, et soient M et M_1 deux limites supérieures de $|G|$ et $|G_1|$ respectivement. En posant $s = x + t(y - x)$, il est clair qu'on a

$$|F(x, y)| < \frac{MM_1}{|x-y|^{\alpha+\beta-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|t|^\alpha\, |1-t|^\beta}$$

et l'intégrale du second membre a une valeur finie, pourvu que $\alpha + \beta - 1$ soit positif. Si l'on avait $\alpha + \beta < 1$, on voit aisément que $F(x, y)$ est borné, en partageant l'intégrale en trois autres ayant pour limites (a, y), (x, y) et (y, b). Si $\alpha + \beta = 1$, $F(x, y)$ devient, en général, infinie pour $y = x$, comme $\log|x - y|$.

Si les fonctions $G(x, y)$, $G_1(x, y)$ sont continues en dehors de la bissectrice $y = x$, le noyau $F(x, y)$ est lui-même continu dans le voisinage de tout point (x_0, y_0), non situé sur la bissectrice. L'intégrale (72), considérée comme fonction des deux variables (x, y), est, en effet, uniformément convergente dans le voisinage du système de valeurs $x = x_0$, $y = y_0$ (n° 504). Plus généralement, si $G(x, y)$, $G_1(x, y)$ sont continus presque partout, les raisonnements du n° 556 montrent sans peine que $F(x, y)$ est continu en tout point non situé sur la bissectrice. Si l'une des fonctions G, G_1 admet pour ligne de discontinuités un segment de droite parallèle à l'un des axes, $F(x, y)$ admettra aussi en général cette ligne de discontinuités.

Soit $K(x, y)$ un noyau de la forme précédente et d'exposant $\alpha < 1$; les noyaux itérés successifs $K^{(2)}(x, y)$, $K^{(3)}(x, y), \ldots$, $K^{(p)}(x, p)$ sont, d'après cela, d'exposants au plus égaux à $2\alpha - 1$, $3\alpha - 2, \ldots, p\alpha - (p - 1)$. Pour que $K^{(p+1)}(x, y)$ soit un noyau borné, il suffit qu'on ait $(p + 1)\alpha < p$, ou $p > \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Parmi les

noyaux déduits du noyau donné par des itérations, *il n'y a donc qu'un nombre fini de noyaux non bornés.* D'une façon plus précise : *si m est le premier nombre entier supérieur à* $\frac{\alpha}{1-\alpha}$, *le* $m^{\text{ième}}$ *noyau itéré n'est plus infini pour* $x = y$.

Remarques. — 1° Si un noyau $K(x, y)$ devient infini pour $x = y$ comme $\log|x - y|$, le produit $|x - y|^\alpha K(x, y)$ est borné quel que soit le nombre positif α. En prenant $\alpha = \frac{1}{3}$, par exemple, on voit que le premier noyau itéré reste fini pour $y = x$.

2° On peut aussi avoir à étudier des équations de Volterra dont le noyau devient infini pour $y = x$; ce noyau est de la forme

$$K(x, y) = \frac{G(x, y)}{(x - y)^\alpha}$$

pour $y < x$, et nul pour $y > x$. Les résultats précédents sont applicables, mais les noyaux itérés successifs sont encore nuls pour $y > x$; on arrivera donc au bout d'un nombre fini d'itérations à un noyau de Volterra borné. Supposons, par exemple, que le premier noyau itéré $K^{(2)}(x, y)$ soit borné. L'équation de Volterra

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x \frac{G(x, s)}{(x - s)^\alpha} \varphi(s)\, ds + f(x) \tag{73}$$

se ramène à une équation à noyau borné

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_a^x K^{(2)}(x, s)\, \varphi(s)\, ds + f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s) f(s)\, ds,$$

dont la solution vérifie aussi l'équation (73), car l'équation

$$\psi(x) = \lambda^2 \int_a^x K^{(2)}(x, s)\, \psi(s)\, ds$$

n'admet pas d'autre solution que $\psi = 0$ (n° 548).

3° La solution de l'équation (51), exposée dans les paragraphes précédents, s'applique aussi à des noyaux non bornés dont il est impossible de déduire un noyau borné par un nombre fini d'itérations. Prenons, par exemple, le noyau $K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - c|^\alpha}$, le numérateur $H(x, y)$ étant borné et α étant un exposant positif *inférieur à l'unité; c* est compris dans l'intervalle (a, b). Il est clair que tous les noyaux itérés successifs de $K(x, y)$ sont infinis pour $x = c$. Cependant la solution formelle des n°s 537-538 conserve un sens et s'applique sans modifications. Considérons, en effet, la suite des fonctions $H^{(n)}(x, y)$ déduites de $H(x, y)$ au moyen

de la formule de récurrence

$$\mathrm{H}^{(n)}(x, y) = \int_a^b \frac{\mathrm{H}(x, t)\, \mathrm{H}^{(n-1)}(t, y)}{|t - c|^\alpha}\, dt.$$

Toutes ces fonctions sont bornées et l'on vérifie de proche en proche que l'on a $|\mathrm{H}^{(n)}| < \mathrm{M}^n h^{n-1}$, en désignant par h le nombre

$$\frac{(c-a)^{1-\alpha} + (b-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

et par M une limite supérieure de $|\mathrm{H}(x, y)|$. Posons

$$\Gamma(x, y;\lambda) = \frac{1}{|x-c|^\alpha} \left\{ \mathrm{H}(x,y) + \lambda\, \mathrm{H}^{(2)}(x,y) + \ldots + \lambda^{n-1}\, \mathrm{H}^{(n)}(x,y) + \ldots \right\},$$

la série qui forme le numérateur du second membre est uniformément convergente pourvu que $|\lambda|$ soit inférieur à $\frac{1}{\mathrm{M}h}$, et l'on vérifie encore que $\Gamma(x, y; \lambda)$ satisfait aux relations fonctionnelles (60) et (61) du noyau résolvant. La fonction $\Gamma(x, y; \lambda)$ permettra donc de résoudre les deux équations associées

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\mathrm{H}(x, s)}{|x-c|^\alpha} \varphi(s)\, ds,$$

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \frac{\mathrm{H}(s, x)}{|s-c|^\alpha} \psi(s)\, ds,$$

pourvu que $|\lambda|$ soit suffisamment petit. Par exemple, si l'on a

$$\mathrm{K}(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}} \qquad (a = 0,\ b = 1),$$

tous les noyaux itérés successifs sont égaux au premier et la résolvante est égale à $\sqrt{\frac{y}{x}}\,\frac{1}{1-\lambda}$. Dans ce cas particulier, la formule (59) donne la solution de l'équation intégrale correspondante pourvu que λ soit différent de l'unité. Il est clair que le résultat serait le même pour un noyau

$$\frac{\mathrm{H}(x, y)}{|x - c_1|^{\alpha_1} \ldots |x - c_p|^{\alpha_p}},$$

lorsque tous les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont inférieurs à l'unité, le numérateur $\mathrm{H}(x, y)$ étant borné.

562. **Systèmes d'équations intégrales.** — On pourrait développer une méthode d'approximations tout à fait pareille pour un système d'équations

intégrales

$$(74)\quad \varphi_i(x) = \lambda \int_0^1 \sum_{h=1}^{n} K_{ih}(x, s)\, \varphi_h(s)\, ds + f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on suppose, pour fixer les idées, $a = 0$, $b = 1$. Mais M. Fredholm a ramené, d'une façon très élégante, la résolution de ce système à la résolution d'une équation unique, dont le noyau présente des lignes de discontinuité parallèles aux axes de coordonnées, ce qui justifie la considération de noyaux de cette espèce dans les numéros précédents. Il introduit à cet effet un noyau $H(x, y)$ défini pour les valeurs de x et y, comprises entre 0 et n, par les n^2 conditions

$$(75)\quad H(x, y) = K_{ih}(x - i + 1, y - h + 1) \qquad \text{pour} \begin{pmatrix} i - 1 < x < i \\ h - 1 < y < h \end{pmatrix},$$

i et h étant des nombres entiers qui varient de 1 à n, et une autre fonction $F(x)$ définie dans l'intervalle $(0, n)$ par les n conditions

$$(76)\qquad F(x) = f_i(x - i + 1) \qquad \text{pour } i - 1 < x < i;$$

il est clair que les droites $x = 1, 2, \ldots, n - 1$, $y = 1, 2, \ldots, n - 1$ sont, en général, des lignes de discontinuité pour $H(x, y)$. Soient $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)$ un système de solutions des équations (74); à l'aide de ces n fonctions, on peut définir une fonction auxiliaire $\Phi(x)$ dans l'intervalle $(0, n)$ par les n conditions

$$(77)\qquad \Phi(x) = \varphi_i(x - i + 1) \qquad \text{pour } i - 1 < x < i.$$

Des équations (74) on tire, en supposant x compris entre $i - 1$ et i,

$$\Phi_i(x - i + 1)$$
$$= \lambda \sum_{h=1}^{n} \int_{h-1}^{h} K_{ih}(x - i + 1, s - h + 1)\, \varphi_h(s - h + 1)\, ds + f_i(x - i + 1),$$

ce qu'on peut encore écrire, d'après les formules (76) et (77),

$$(78)\qquad \Phi(x) = \lambda \int_0^n H(x, s)\, \Phi(s)\, ds + F(x).$$

Inversement, connaissant une solution de l'équation (78), les relations (76) et (77) permettent d'en déduire un système de solutions des équations (74).

563. Extension aux fonctions de plusieurs variables. — L'extension de la théorie précédente aux équations intégrales de la forme

$$(79)\quad \varphi(x, y) = \lambda \int\int_{(\Sigma)} K(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + f(x, y)$$

est immédiate; le noyau $K(x, y; \xi, \eta)$ est une fonction donnée des deux couples de variables (x, y), (ξ, η) lorsque chacun des points (x, y), (ξ, η) reste dans un domaine D du plan, $f(x, y)$ est une fonction connue et $\varphi(x, y)$ la fonction à déterminer. Nous avons rencontré à propos de la méthode de Neumann (n° 533) une équation intégrale d'une forme un peu plus générale, où les intégrations sont étendues à une surface fermée. Soit, en général, $F(M)$ une fonction qui a une valeur déterminée pour toute position du point M sur une surface Σ, fermée ou non; nous dirons que $F(M)$ est une *fonction du point* M définie sur Σ. On dira de même qu'une fonction $F(M_1, M_2, \ldots, M_p)$, qui a une valeur déterminée pour toutes les positions des points $M_1, M_2, \ldots, M_p$ sur Σ, est une fonction de ces p points définie sur Σ. Toute intégrale multiple [1]

$$\int_{(\Sigma)} F(M_1, M_2, \ldots, M_p)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \ldots d\sigma_p,$$

où $d\sigma$ désigne l'élément de surface, et où les points M_i décrivent Σ, a une valeur finie, si la fonction F est intégrable par rapport à chaque couple de variables.

Cela posé, soient $K(M, M')$ une fonction donnée des points M et M' sur Σ, $f(M)$ une fonction connue de M, $\varphi(M)$ une fonction inconnue. On peut encore trouver une solution formelle de l'équation intégrale

$$(80) \qquad \varphi(M) = \lambda \int_{(\Sigma)} K(M, M')\, \varphi(M')\, d\sigma' + f(M),$$

représentée par une série entière ordonnée suivant les puissances de λ

$$(81) \qquad \varphi(M) = f(M) + \lambda \int_{(\Sigma)} \Gamma(M, M'; \lambda)\, f(M')\, d\sigma',$$

où l'on a posé

$$(82) \quad \Gamma(M, M'; \lambda) = K(M, M') + \lambda K^{(2)}(M, M') + \ldots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(M, M') + \ldots.$$

Les coefficients $K^{(i)}(M, M')$ se déduisent du premier $K^{(1)}(M, M')$, qu'on prend égal à $K(M, M')$, au moyen de la formule de récur-

---

(1) On écrit pour abréger un seul signe $\int$, le nombre des intégrations à effectuer étant indiqué par le nombre des facteurs $d\sigma_i$.

rence

$$(83) \qquad K^{(n)}(M, M') = \int_{(\Sigma)} K(M, M_1) K^{(n-1)}(M_1, M')\, d\sigma_1;$$

on les appelle encore les *noyaux itérés successifs du noyau* $K(M, M')$, et la fonction $\Gamma(M, M'; \lambda)$ s'appelle *la résolvante.* Si le noyau $K(M, M')$ est borné, la série (82) est convergente pourvu que $|\lambda|$ soit assez petit et l'équation (80) admet une solution et une seule qui est représentée par la formule (81). Les autres propriétés de la résolvante s'étendent aussi à la fonction Γ. Il en est de même pour un noyau non borné pourvu que les noyaux qu'on en déduit par des itérations successives soient bornés à partir d'un certain rang.

Le cas le plus intéressant pour les applications est celui où le noyau $K(M, M')$ est de la forme $\frac{G(M, M')}{\overline{MM'}^{\alpha}}$, $G(M, M')$ étant une fonction bornée sur Σ, et α un exposant positif inférieur à 2, de façon que les intégrales qui figurent dans la solution précédente aient des valeurs finies lorsque $f(M)$ est bornée. D'une façon générale, soient $\frac{G}{\overline{MM'}^{\alpha}}$ et $\frac{G_1}{\overline{MM'}^{\beta}}$ deux noyaux de cette espèce appartenant aux exposants α et β respectivement. Nous allons montrer que le noyau

$$(84) \qquad F(M, M') = \int_{(\Sigma)} \frac{G(M, M_1)\, G_1(M_1, M')}{\overline{MM_1}^{\alpha}\ \overline{M_1M'}^{\beta}}\, d\sigma_1$$

est un noyau de même espèce appartenant à l'exposant $\alpha + \beta - 2$, c'est-à-dire que le produit $F(M, M')\, \overline{MM'}^{\alpha+\beta-2}$ reste borné, lorsque la distance MM' est infiniment petite [1].

Supposons d'abord que la surface Σ soit plane; en désignant par ρ, ρ' les distances d'un point variable P aux deux points fixes M, M', tout revient à démontrer que l'intégrale $\int_{(\Sigma)} \frac{d\sigma}{\rho^{\alpha}\rho'^{\beta}}$ est infinie comme $\left(\frac{1}{MM'}\right)^{\alpha+\beta-2}$ lorsque M' tend vers M. Soit C le cercle de rayon $2MM'$ décrit du point M pour centre; il partage Σ en

---

[1] Cette méthode est due à M. Hadamard (*voir* Heywood et Fréchet, Note I).

deux portions, une partie intérieure Σ' et une partie extérieure Σ''. L'intégrale étendue à Σ'' est comparable à $\int_{(\Sigma'')} \frac{d\sigma}{\rho^{\alpha+\beta}}$, car le rapport $\frac{\rho'}{\rho}$ reste compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ lorsque P décrit Σ'', ou à l'intégrale simple $\int_{2MM'}^{R} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+\beta-1}}$ en désignant par R un nombre positif assez grand pour que le cercle de rayon R et de centre M renferme Σ''. Elle devient donc infinie comme $\left(\frac{1}{MM'}\right)^{\alpha+\beta-2}$, lorsque MM' tend vers zéro, si $\alpha+\beta > 2$, et comme $\log(MM')$, si $\alpha+\beta = 2$. Quant à l'intégrale étendue à Σ', une transformation homothétique, qui transforme le cercle C en un cercle C_1 de rayon un, ayant pour centre le point M, la ramène à une intégrale de même forme étendue à ce cercle C_1 multipliée par $\left(\frac{1}{MM'}\right)^{\alpha+\beta-2}$, et la nouvelle intégrale a une valeur finie indépendante de MM'.

La démonstration s'étend immédiatement à une surface quelconque S, si l'on peut lui faire correspondre point par point une surface plane Σ, de telle façon que le rapport $\frac{mm'}{MM'}$ des distances de deux points correspondants de Σ et de S reste compris entre deux limites *positives*, ainsi que le rapport des éléments correspondants des deux surfaces. C'est ce qui a lieu pour une portion de surface régulière si l'on peut la projeter sur le plan tangent en un de ses points, de façon qu'en prenant ce plan tangent pour plan des xy, elle soit représentée par une équation de la forme $z = f(x, y)$, la fonction $f(x, y)$ étant continue et admettant des dérivées continues du premier ordre.

Considérons maintenant une surface quelconque S régulière et un point M de cette surface. Décomposons S en deux parties S', S'', la portion S' entourant le point M et satisfaisant à la condition précédente; M' étant un point infiniment voisin de M, nous pouvons le supposer à l'intérieur d'une courbe C entourant le point M, située dans la région S', et n'ayant aucun point commun avec la frontière de S'. Il est clair que l'intégrale (84) étendue à S'' a une valeur finie et nous venons de voir que l'intégrale étendue à S' est infinie comme $\left(\frac{1}{MM'}\right)^{\alpha+\beta-2}$ lorsque la distance MM' est infiniment petite.

Cela posé, si le noyau $K(M, M')$ est infini comme $\left(\frac{1}{\overline{MM'}}\right)^\alpha$ lorsque M et M' sont confondus ($\alpha < 2$), le premier noyau itéré $K^{(2)}(M, M')$ reste fini pour $\overline{MM'} = 0$, si α est inférieur à un et est d'ordre $2\alpha - 2$, si $\alpha > 1$. On voit comme plus haut (n° 561) qu'on arrivera à un noyau borné au bout d'un nombre fini d'itérations. Si $\alpha = 1$, le premier noyau itéré est infini comme $\log(\overline{MM'})$ et le second noyau itéré est borné, car le produit $\sqrt{\overline{MM'}}\log(MM')$ est nul pour $MM' = 0$.

COMPLÉMENTS ET EXERCICES.

1. *Équations linéaires* (*cf.* n° 551). — Soit $z(x)$ l'intégrale de l'équation linéaire (24) qui est nulle ainsi que ses $n-1$ premières dérivées pour $x = x_0$. Remplaçons x par s dans les deux membres de cette équation, multiplions par $\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}$ et intégrons entre les limites x_0 et x. Il vient

$$z(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\left[a_0(s)(x-s)^{n-1}\frac{d_z^{n-1}}{ds^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(s)(x-s)^{n-1}z(s)\right]ds$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(s)(x-s)^{n-1}\,ds.$$

Une suite d'intégrations par parties permet de la ramener à une équation de Volterra dont le noyau a pour expression

$$H(x, s) = \frac{1}{(n-1)!}\left\{a_{n-1}(s)(x-s)^{n-1} - \frac{d}{ds}[a_{n-2}(s)(x-s)^{n-1}] + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}[a_0(s)(x-s)^{n-1}]\right\}.$$

Ce noyau est un polynome entier en s de degré $n-1$ et, d'après le n° 550, la résolution de cette équation intégrale se ramène à l'intégration d'une équation linéaire qui est précisément l'équation adjointe de $D(z) = 0$.

Comparer les deux solutions.

2. Vérifier que le coefficient de λ^n dans le développement de la solution de l'équation (28) (n° 552) est de la forme indiquée au bas de la page 333, les fonctions

$$G_n(x, y; \xi, \eta), \quad g_n(x, y; \xi), \quad g'_n(x, y; \eta)$$

se calculant par voie de récurrence au moyen des formules

$$g_n(x, y;\ \xi) = \int_\xi^x K_1(x, y;\ u)\, g_{n-1}(u, y;\ \xi)\, du,$$

$$g'_n(x, y;\ \eta) = \int_\eta^y K_2(x, y;\ v)\, g'_{n-1}(x, v;\ \eta)\, dv,$$

$$\begin{aligned} G_n(x, y;\ \xi, \eta) = & \int_\xi^x \int_\eta^y K(x, y;\ u, v)\, G_{n-1}(u, v;\ \xi, \eta)\, du\, dv \\ & + \int_\xi^x K(x, y;\ u, \eta)\, g_{n-1}(u, \eta;\ \xi)\, du \\ & + \int_\eta^y K(x, y;\ \xi, v)\, g'_{n-1}(\xi, v;\ \eta)\, dv \\ & + \int_\xi^x K_1(x, y;\ u)\, G_{n-1}(u, y;\ \xi, \eta)\, du \\ & + \int_\eta^y K_2(x, y;\ v)\, G_{n-1}(x, v;\ \xi, \eta)\, dv \\ & + K_1(x, y;\ \xi)\, g'_{n-1}(x, y;\ \eta) + K_2(x, y;\ \eta)\, g_{n-1}(x, y;\ \xi). \end{aligned}$$

3. *Note de la page* 343. — Soit $f(x, y)$ une fonction des deux variables x, y, définie dans un domaine D, continue en tout point d'un segment de droite AB parallèle à Oy, situé à l'intérieur de D, y compris les extrémités (x_0, y_0) et (x_0, y_1). *A tout nombre positif* ε, *on peut associer un autre nombre* η (*ne dépendant que de* ε), *et tel que l'inégalité* $|x - x_0| < \eta$ *entraîne l'inégalité* $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$, y *ayant une valeur quelconque dans l'intervalle* (y_0, y_1).

Si la fonction $f(x, y)$ n'a pas de points de discontinuité infiniment voisins du segment AB, il suffit de prendre un domaine δ, renfermant AB et ne contenant aucun point de discontinuité, et la propriété résulte immédiatement de la continuité uniforme de $f(x, y)$ dans δ. Mais il peut se faire que $f(x, y)$ ait des points de discontinuité infiniment voisins de AB. Prenons, par exemple, $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$ pour $y \neq 0$ et $f(x, 0) = 0$. La fonction est continue en tout point de Oy, et tous les points de Ox, sauf l'origine, sont des points de discontinuité.

Sans faire aucune hypothèse sur les points de discontinuité de $f(x, y)$, supposons que la proposition ne soit pas exacte. En procédant par subdivisions successives de l'intervalle (y_0, y_1) et en raisonnant comme on l'a déjà fait plusieurs fois (I, n° 8), on démontre qu'il existe un nombre c de cet intervalle tel que le théorème est inexact dans l'intervalle

$$(c - \rho, c + \rho),$$

aussi petit que soit le nombre positif ρ. Or, cela est incompatible avec

l'hypothèse que la fonction est continue au point (x_0, c). En effet, on pourrait alors trouver deux nombres η', η'', moindres en valeur absolue qu'un nombre positif η, choisi arbitrairement, tels qu'on ait

$$|f(x_0+\eta'', c+\eta')-f(x_0, c+\eta')|>\varepsilon.$$

Or, cette différence peut s'écrire

$$f(x_0+\eta'', c+\eta')-f(x_0, c)+[f(x_0, c)-f(x_0, c+\eta')]$$

et la valeur absolue de chacune des différences est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$, si l'on a $\eta'^2+\eta''^2<\lambda^2$, λ ne dépendant que de ε.

4. Étudier l'équation de première espèce (33) en supposant

$$K(x, s)=a_0(x)+a_1(x)(x-s)+\ldots+a_n(x)\frac{(x-s)^n}{n!}.$$

En posant $z(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n\varphi(s)\,ds$, on est conduit à une équation différentielle linéaire

$$a_0(x)\frac{d^n z}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n(x)\,z(x)=f(x),$$

dont il faut trouver une intégrale qui soit nulle, ainsi que ses n premières dérivées, pour $x=0$. La dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ donne la fonction cherchée $\varphi(x)$. [On suppose $f(0)=0$, la fonction $f(x)$ ayant une dérivée continue, ainsi que les coefficients $a_i(x)$.]

5. *Équation de deuxième espèce à deux limites variables.* — L'équation intégrale

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} K(x, s)\,\varphi(s)\,ds,$$

où ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions continues dans l'intervalle $(-b, b)$, et moindres que b en valeur absolue, peut être considérée comme un cas spécial de l'équation de Fredholm, où le noyau $K(x, y)$ est nul, lorsque y n'est pas compris dans l'intervalle (ψ_1, ψ_2). Lorsque les valeurs absolues $|\psi_1|$ et $|\psi_2|$ ne dépassent pas $|x|$, la résolvante est une fonction entière de λ comme dans le cas de l'équation de Volterra. Il suffit de comparer l'équation à une équation auxiliaire de la forme

$$\Phi(x)=N+\lambda\int_{-|x|}^{|x|} M\,\Phi(s)\,ds,$$

qui admet la solution $N e^{2\lambda M|x|}$.

6. *Résolution de l'équation de première espèce par approximations*

successives. — On considère l'équation plus générale

$$\int_0^x K(s, s)\,\varphi(s)\,ds + \lambda \int_0^x [K(x, s) - K(s, s)]\,\varphi(s)\,ds = f(s),$$

et l'on cherche une solution formelle

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\,\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\,\varphi_n(x) + \ldots.$$

En supposant $K(o, o) \neq o$, on trouve une série convergente qui, pour $\lambda = 1$, est identique à la solution de Volterra.

On peut aussi appliquer la même méthode dans le cas de l'équation d'Abel généralisée (E. Picard, *Comptes rendus*, t. 139, 25 juillet 1904).

7. *Équation de Volterra à plusieurs variables.* — La résolution de l'équation de seconde espèce (28) peut se ramener à la résolution successive de deux équations de la forme (1) et d'une équation de la forme (27). Écrivons l'équation (28), en supposant $\lambda = 1$,

$$\varphi(x, y) = \int_0^x K_1(x, y;\ \xi)\,\varphi(\xi, y)\,d\xi + V(x, y),$$

$V(x, y)$ désignant l'ensemble des autres termes. Si l'on considère, dans cette équation, y comme un paramètre, on en tire

$$\varphi(x, y) = V(x, y) + \int_0^x S(x, y;\ u)\,V(u, y)\,du,$$

$S(x, y;\ u)$ étant une fonction connue. Cette nouvelle équation est de la forme

$$\varphi(x, y) - \int_0^y K_2(x, y;\ \eta)\,\varphi(x, \eta)\,d\eta$$
$$= f_1(x, y) + \int_0^x \int_0^y H(x, y;\ \xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

f_1 et H étant des fonctions connues. En désignant par $W(x, y)$ le second membre, on tire encore de cette relation

$$\varphi(x, y) = W(x, y) + \int_0^y T(x, y;\ v)\,W(x, v)\,dv,$$

T étant une fonction connue. Enfin, en remplaçant W par son expression, on aboutit à une équation de la forme (27) (Volterra, *Leçons sur les équations intégrales*, p. 76).

CHAPITRE XXXI.

L'ÉQUATION DE FREDHOLM.

I. — LES THÉORÈMES DE FREDHOLM.

564. **Aperçu d'une méthode d'induction.** — On a remarqué, dans l'étude des équations différentielles (II, n° 392), que la première méthode de Cauchy, celle qui consiste à regarder une équation différentielle comme limite d'une équation aux différences, permettait en général de définir l'intégrale dans un champ plus étendu que les autres méthodes d'intégration. Elle se manifestait donc à cet égard comme la plus puissante. C'est en partant d'une idée analogue, déjà utilisée par M. Volterra, que M. Fredholm a pu résoudre l'équation intégrale de seconde espèce pour des valeurs quelconques du paramètre λ. Dans son Mémoire fondamental (*Acta mathematica*, t. XXVII, 1903, p. 365), il a exposé d'une façon synthétique les résultats trouvés par induction, en vérifiant que les expressions obtenues donnaient bien la solution du problème. Nous suivrons une méthode mixte, en utilisant le développement déjà obtenu de la résolvante.

Pour résoudre l'équation de seconde espèce

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds + f(x), \tag{1}$$

où le noyau $K(x, y)$ est supposé borné, remplaçons l'intégrale du second membre par la somme

$$h[K(x, s_1)\varphi_1 + K(x, s_2)\varphi_2 + \ldots + K(x, s_n)\varphi_n],$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad s_i = a + ih, \qquad \varphi_i = \varphi(s_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'équation (1) est ainsi remplacée par l'équation fonctionnelle

$$(2) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda[K(x, s_1)\varphi_1 + \ldots + K(x, s_n)\varphi_n]h,$$

qui permet de déterminer $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Si l'on fait, en effet, successivement $x = s_1$, $x = s_2$, ..., $x = s_n$ dans cette équation, on obtient n relations linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$,

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_1 - \lambda h[K(s_1, s_1)\varphi_1 + K(s_1, s_2)\varphi_2 + \ldots + K(s_1, s_n)\varphi_n] = f_1, \\ \varphi_2 - \lambda h[K(s_2, s_1)\varphi_1 + K(s_2, s_2)\varphi_2 + \ldots + K(s_2, s_n)\varphi_n] = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n - \lambda h[K(s_n, s_1)\varphi_1 + K(s_n, s_2)\varphi_2 + \ldots + K(s_n, s_n)\varphi_n] = f_n. \end{cases}$$

Les expressions de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ déduites de ces équations se présentent sous forme de fractions ayant pour dénominateur commun le déterminant

$$(4) \quad D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda K(s_1, s_1)h & -\lambda K(s_1, s_2)h & \ldots & -\lambda K(s_1, s_n)h \\ -\lambda K(s_2, s_1)h & 1 - \lambda K(s_2, s_2)h & \ldots & -\lambda K(s_2, s_n)h \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ -\lambda K(s_n, s_1)h & -\lambda K(s_n, s_2)h & \ldots & 1 - \lambda K(s_n, s_n)h \end{vmatrix};$$

le numérateur de φ_i est de même un déterminant d'ordre n, $D_n^i(\lambda)$ qu'il est inutile d'écrire. Supposons maintenant que les deux nombres n et i augmentent indéfiniment de façon que s_i tende vers un nombre x compris entre a et b. Il est possible de démontrer en toute rigueur que $D_n(\lambda)$ et $D_n^i(\lambda)$ ont pour limites deux fonctions entières de λ [1]. Mais nous ne considérons ce procédé que comme un moyen d'induction, et nous allons chercher seulement ce que devient le déterminant $D_n(\lambda)$ lorsque n croît indéfiniment.

565. **Les fonctions** $D(\lambda)$ **et** $D\left(\frac{x}{y}\middle|\lambda\right)$. — Il est commode, pour simplifier l'écriture, d'employer la notation abrégée suivante, due aussi à M. Fredholm; étant donnés deux systèmes de n variables

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{et} \qquad (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

---

[1] C'est ce qu'a fait M. Hilbert dans ses premiers Travaux sur ce sujet (*Erste Mitteilung*, *Göttingen Nachrichten*, 1904).

on pose

$$K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_n \\ y_1 y_2 \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & K(x_1, y_2) & \dots & K(x_1, y_n) \\ K(x_2, y_1) & K(x_2, y_2) & \dots & K(x_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n, y_1) & K(x_n, y_2) & \dots & K(x_n, y_n) \end{vmatrix};$$

la variable x_i figure dans tous les éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne et dans ceux-là seulement, et la variable y_k dans tous les éléments de la $k^{\text{ième}}$ colonne et dans ceux-là seulement. Il s'ensuit que si l'on permute les variables (x_i, x_k) ou les variables (y_i, y_k), le déterminant change de signe; il ne change pas si l'on permute les deux couples de variables (x_i, y_i) et (x_k, y_k). On peut donc écrire les n couples de variables (x_i, y_i) dans un ordre arbitraire sans changer la valeur du déterminant. En particulier, la fonction $K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_n \\ x_1 x_2 \dots x_n \end{pmatrix}$ est une fonction symétrique de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Cela posé, imaginons qu'on développe $D_n(\lambda)$ suivant les puissances de λ; on obtient tous les termes de degré p en λ en prenant tous les déterminants d'ordre p déduits de D_n, en supprimant les lignes et les colonnes qui renferment $n - p$ éléments pris arbitrairement dans la diagonale principale. Le coefficient de $(-\lambda)^p h^p$ est donc égal à une somme de déterminants d'ordre p tels que

$$K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_p \\ s_1 s_2 \dots s_p \end{pmatrix};$$

or, le produit de ce déterminant par h^p est un des éléments d'une somme qui a pour limite l'intégrale multiple

$$I_p = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_p \\ x_1 x_2 \dots x_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p;$$

et cet élément figure $p!$ fois dans cette somme, puisque

$$K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_p \\ s_1 s_2 \dots s_p \end{pmatrix}$$

est une fonction symétrique de $s_1, s_2, \dots, s_p$. Il en est évidemment de même de tous les déterminants analogues et, par suite, le coefficient de $(-\lambda)^p$ dans le polynome $D_n(\lambda)$ a pour limite $\frac{1}{p!} I_p$ lorsque n augmente indéfiniment. Nous sommes donc conduits à

considérer la série entière

$$(5)\quad D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b K(s_1, s_1)\,ds_1 + \ldots + \frac{(-\lambda)^p}{p!}\int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} s_1 s_2 \ldots s_p \\ s_1 s_2 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1\,ds_2 \ldots ds_p + \ldots$$

qui est convergente pour toute valeur de λ. En effet, d'après un théorème de M. Hadamard (I, n° 54), le coefficient de λ^n est inférieur en valeur absolue à $M^n(b-a)^n \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}$, M étant une limite supérieure de $|K(x,y)|$; or, la série dont le terme général est égal au produit de λ^n par l'expression précédente est convergente, car le rapport de deux termes consécutifs $\frac{M(b-a)}{\sqrt{n+1}}\lambda\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

Nous allons maintenant vérifier que le produit de la fonction entière $D(\lambda)$ par la série qui représente la résolvante (n° 559) est encore une fonction entière de λ. Soit $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ la série entière en λ obtenue en faisant ce produit, que nous écrirons, par analogie avec le développement de $D(\lambda)$,

$$(6)\quad D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) = \Gamma(x, y;\lambda)\,D(\lambda) = K(x,y) + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^p}{p!}C_p(x,y).$$

Le coefficient $C_p(x,y)$ s'exprime immédiatement au moyen des noyaux $K(x,y)$, $K^{(2)}(x,y)$, ... et des coefficients de la série (5), mais on parvient plus facilement à l'expression définitive de ce coefficient en se servant de l'équation fonctionnelle (60) (n° 559) à laquelle satisfait la résolvante. En multipliant les deux membres par $D(\lambda)$, cette équation devient en effet

$$(7)\qquad D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) = K(x,y)\,D(\lambda) + \lambda\int_a^b K(x,s)\,D\left(\begin{matrix} s \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) ds,$$

et en égalant les coefficients de λ^p dans les deux membres, on obtient une relation de récurrence entre deux coefficients consécutifs

$$(8)\qquad C_p(x,y) = K(x,y)\,c_p - p\int_a^b K(x,s)\,C_{p-1}(s,y)\,ds,$$

c_p étant le coefficient correspondant de $D(\lambda)$. En faisant successivement $p = 1, 2, \ldots$, on vérifie aisément que les premiers coefficients C_1, C_2 peuvent s'écrire

$$C_1(x, y) = \int_a^b K\begin{pmatrix} x\,s \\ y\,s \end{pmatrix} ds, \qquad C_2(x, y) = \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} x\,s_1\,s_2 \\ y\,s_1\,s_2 \end{pmatrix} ds_1\, ds_2;$$

pour vérifier que la loi est générale, il suffit de montrer que les intégrales multiples

$$I_p(x, y) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} x\,s_1 \ldots s_p \\ y\,s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \ldots ds_p$$

vérifient la même relation de récurrence que les coefficients C_p puisque C_1 et I_1 sont identiques. Or, si l'on développe le déterminant $K\begin{pmatrix} x\,s_1 \ldots s_p \\ y\,s_1 \ldots s_p \end{pmatrix}$ par rapport aux éléments de la première ligne, ce développement peut s'écrire, en tenant compte des remarques antérieures,

$$K\begin{pmatrix} x\,s_1 \ldots s_p \\ y\,s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} = K(x, y)\, K\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_p \\ s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} - K(x, s_1)\, K\begin{pmatrix} s_1\,s_2 \ldots s_p \\ y\,s_2 \ldots s_p \end{pmatrix}$$
$$- K(x, s_2)\, K\begin{pmatrix} s_1\,s_2 \ldots s_p \\ s_1\,y \ldots s_p \end{pmatrix} - \ldots - K(x, s_p)\, K\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_p \\ s_1 \ldots y \end{pmatrix}.$$

Multiplions les deux membres par $ds_1\, ds_2 \ldots ds_p$ et intégrons entre les limites a et b; en observant que la valeur de ces intégrales multiples ne dépend pas de la notation adoptée pour les variables d'intégration, on parvient précisément à la relation

$$I_p(x, y) = K(x, y)\, c_p - p \int_a^b K(x, s)\, I_{p-1}(s, y)\, ds,$$

toute pareille à la relation (8) qui lie C_{p-1} et C_p. La propriété énoncée est donc établie, et la série obtenue en faisant le produit de $D(\lambda)$ par la résolvante a pour expression

$$(9)\quad D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = K(x, y) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} x\,s_1 \ldots s_p \\ y\,s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \ldots ds_p.$$

Le second membre est une série convergente quel que soit λ, car la valeur absolue du terme général est inférieure, d'après le théorème d'Hadamard, à $\frac{M^{p+1}}{p!}(b-a)^p (p+1)^{\frac{p+1}{2}} |\lambda|^p$. La résol-

vante est donc le quotient de deux fonctions entières en λ

$$(10) \qquad \Gamma(x, y; \lambda) = \frac{D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)}{D(\lambda)},$$

c'est-à-dire une fonction *méromorphe* du paramètre λ; résultat capital, qu'il paraissait difficile de prévoir *a priori* (voir *Exercice* 1).

Il est maintenant bien facile d'étendre à toutes les valeurs de λ qui n'annulent pas la fonction $D(\lambda)$ la solution donnée dans le Chapitre précédent pour l'équation de seconde espèce. On peut, en effet, adjoindre à la relation (7) la relation de même forme

$$(7)' \qquad D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) = K(x, y)\, D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(s, y)\, D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right) ds,$$

qui s'établit de la même façon. En divisant ces deux relations par $D(\lambda)$, on retrouve les équations fonctionnelles (60) et (61) du n° 559, qui caractérisent la résolvante, où l'on aurait remplacé $\Gamma(x, y; \lambda)$ par son expression (10). Les raisonnements de ce paragraphe conduisent alors au premier théorème de Fredholm :

Si λ n'est pas racine de l'équation $D(\lambda) = 0$, *l'équation de seconde espèce* (1) *admet une solution et une seule qui est donnée par la formule*

$$(11) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right)}{D(\lambda)} f(s)\, ds.$$

On démontrerait tout pareillement que l'équation de seconde espèce associée à l'équation (1),

$$(12) \qquad \psi(x) = \lambda \int_a^b K(s, x)\, \psi(s)\, ds + g(x),$$

admet une solution et une seule représentée par la formule

$$(13) \qquad \psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \frac{D\left(\begin{matrix} s \\ x \end{matrix} \middle| \lambda\right)}{D(\lambda)} g(s)\, ds.$$

Ces formules se déduisent des formules (59) et (63) du n° 559 en y remplaçant $\Gamma(x, y; \lambda)$ par $\frac{1}{D(\lambda)} D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$, c'est-à-dire par

l'expression analytique de la résolvante qui est valable dans tout le plan de la variable λ [1].

566. **Développement de $D'(\lambda) : D(\lambda)$.** — La dérivée logarithmique de $D(\lambda)$ a un développement très simple dû aussi à M. Fredholm. Pour y parvenir, remplaçons x et y par s dans l'identité (6) et intégrons les deux membres entre les limites a et b. D'après la formule (9), l'intégrale du premier membre est précisément $-D'(\lambda)$; pour avoir l'intégrale du second membre, supposons $\Gamma(x, y; \lambda)$ remplacée par son développement suivant les puissances de λ et $|\lambda|$ inférieur au rayon de convergence de cette série. On peut alors intégrer terme à terme, ce qui donne

$$\int_a^b \Gamma(s, s; \lambda)\, ds = A_1 + A_2\lambda + \ldots + A_n\lambda^{n-1} + \ldots,$$

en posant, d'une façon générale,

$$(14) \quad A_n = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K(s_1, s_2)\, K(s_2, s_3) \ldots K(s_n, s_1)\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_n$$
$$= \int_a^b K^{(n)}(s, s)\, ds$$

et nous obtenons la nouvelle relation

$$(15) \qquad \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -G(\lambda) = -(A_1 + A_2\lambda + \ldots + A_n\lambda^{n-1} + \ldots).$$

On en tire, en intégrant et observant que $D(0) = 1$,

$$(16) \qquad D(\lambda) = e^{-\left(A_1\lambda + A_2\frac{\lambda^2}{2} + \ldots + A_n\frac{\lambda^n}{n} + \ldots\right)}.$$

Les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ qui figurent dans ces formules s'appellent les *traces* successives du noyau $K(x, y)$. Il est clair que les formules (15) et (16) ne sont applicables que si $|\lambda|$ est inférieur au plus petit des modules des racines de l'équation $D(\lambda) = 0$. Mais si l'on développe le second membre de la formule (16) suivant les puissances de λ, on doit retrouver forcément la série (5), et par suite, le coefficient de λ^n dans cette série est un polynome entier

---

[1] Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons les variables réelles, mais le noyau peut prendre des valeurs complexes. Il n'y a rien à changer aux raisonnements, car le théorème d'Hadamard s'applique aussi aux déterminants à éléments imaginaires (*voir*, par exemple, WIRTINGER, *Bulletin des Sciences math.*, 1907 p. 175).

par rapport aux traces $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ce qu'on peut vérifier directement (*Exercice* 2). Le coefficient de λ^n dans $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle| \lambda\right)$ s'exprime donc lui-même au moyen de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et des noyaux $K(x, y)$, $K^{(2)}(x, y), \ldots, K^{(n+1)}(x, y)$.

Exemple. — On a cité plus haut (n° 559) un certain nombre d'exemples où la résolvante est une fonction entière de λ. Il est facile de vérifier que l'équation correspondante $D(\lambda) = 0$ n'admet aucune racine. Ainsi, dans une équation de Volterra, on doit supposer $K(x, y) = 0$, pour $y > x$; il s'ensuit que toutes les traces du noyau sont nulles, sauf la première. En effet, l'un au moins des facteurs du produit $K(s_1, s_2) \ldots K(s_n, s_1)$ est nul, sauf si l'on a $s_1 = s_2 = \ldots = s_n$. La fonction de n variables soumise à l'intégration est donc nulle dans tout le champ, sauf sur une multiplicité à une dimension de ce champ, et l'intégrale est nulle. On a donc $D(\lambda) = e^{-A_1 \lambda}$, et le résultat serait le même pour un noyau orthogonal à lui-même.

567. **Les mineurs de $D(\lambda)$.** — *Toute racine $\lambda = c$ de l'équation $D(\lambda) = 0$ est un pôle de résolvante.* — En effet, si m est l'ordre de multiplicité de cette racine, le numérateur $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle| \lambda\right)$ ne peut être divisible par $(\lambda - c)^m$, car il en serait de même de $D'(\lambda)$, d'après l'identité déjà signalée

$$(17) \qquad D'(\lambda) = -\int_a^b D\left(\begin{matrix} s \\ s \end{matrix}\middle| \lambda\right) ds.$$

La formule qui donne la solution de l'équation de seconde espèce n'a donc plus de sens lorsque λ est racine de l'équation $D(\lambda) = 0$. Pour traiter ce cas exceptionnel, Fredholm le considère encore comme un cas limite d'un système de n équations linéaires, où le déterminant des coefficients des inconnues est nul, lorsque le nombre n augmente indéfiniment. Il est ainsi conduit à introduire de nouvelles fonctions entières analogues à $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle| \lambda\right)$, et qu'il appelle les *mineurs* de $D(\lambda)$. Le mineur d'ordre n est défini par la série convergente

$$(18) \quad \begin{aligned} D\left(\begin{matrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ y_1 y_2 \ldots y_n \end{matrix}\middle| \lambda\right) &= K\left(\begin{matrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ y_1 y_2 \ldots y_n \end{matrix}\right) \\ &+ \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K\left(\begin{matrix} x_1 \ldots x_n s_1 \ldots s_p \\ y_1 \ldots y_n s_1 \ldots s_p \end{matrix}\right) ds_1 \ldots ds_p; \end{aligned}$$

le théorème d'Hadamard prouve encore que le second membre est une fonction entière de λ lorsque le noyau est borné. Ces mineurs vérifient une équation fonctionnelle, dont la relation (7) n'est qu'un cas particulier, et qui s'établit directement. En développant le déterminant $K\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n s_1 \ldots s_p \\ y_1 \ldots y_n s_1 \ldots s_p \end{pmatrix}$ suivant les éléments de la première ligne, on trouve

$$\begin{aligned} K\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n s_1 \ldots s_p \\ y_1 \ldots y_n s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} &= K(x_1, y_1)\, K\begin{pmatrix} x_2 x_3 \ldots x_n s_1 \ldots s_p \\ y_2 y_3 \ldots y_n s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} - \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} K(x_1, y_n)\, K\begin{pmatrix} x_2 \ldots x_n \quad s_1 \ldots s_p \\ y_1 \ldots y_{n-1} s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} \\ &- K(x_1, s_1)\, K\begin{pmatrix} s_1 x_2 \ldots x_n s_2 \ldots s_p \\ y_1 y_2 \ldots y_n s_2 \ldots s_p \end{pmatrix} - \ldots \\ &- K(x_1, s_p)\, K\begin{pmatrix} s_p x_2 \ldots x_n s_1 \ldots s_{p-1} \\ y_1 y_2 \ldots y_n s_1 \ldots s_{p-1} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

pour avoir le coefficient de $K(x_1, s_i)$, on commence par permuter la première et la $(n+i)^{\text{ième}}$ colonne, ce qui change le signe du déterminant, puis on amène le couple (s_i, y_1) à la première place dans le mineur qui correspond au premier élément $K(x_1, s_i)$.

Multiplions les deux membres de l'égalité précédente par

$$\frac{(-\lambda)^p}{p!}\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_p,$$

et intégrons de a à b pour chacune des variables s_i; faisons ensuite la somme des égalités obtenues en faisant varier p de 1 à $+\infty$, et de l'égalité précédente, où l'on fait $p = 0$. On parvient à la relation demandée

$$(19)\quad \begin{aligned} D\left(\begin{matrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ y_1 y_2 \ldots y_n \end{matrix} \middle| \lambda\right) = &\quad K(x_1, y_1)\, D\left(\begin{matrix} x_2 \ldots x_n \\ y_2 \ldots y_n \end{matrix} \middle| \lambda\right) \\ &- K(x_1, y_2)\, D\left(\begin{matrix} x_2 x_3 \ldots x_n \\ y_1 y_3 \ldots y_n \end{matrix} \middle| \lambda\right) + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} K(x_1, y_n)\, D\left(\begin{matrix} x_2 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_{n-1} \end{matrix} \middle| \lambda\right) \\ &+ \lambda \int_a^b K(x_1, t)\, D\left(\begin{matrix} t\, x_2 \ldots x_n \\ y_1 y_2 \ldots y_n \end{matrix} \middle| \lambda\right) dt. \end{aligned}$$

En développant le déterminant $K\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n s_1 \ldots s_p \\ y_1 \ldots y_n s_1 \ldots s_p \end{pmatrix}$ par rapport aux éléments de la première colonne, on parvient de la même

façon à la relation

$$(20)\quad D\begin{pmatrix} x_1\dots x_n \\ y_1\dots y_n \end{pmatrix}\lambda\Big) = K(x_1, y_1)\,D\begin{pmatrix} x_2\dots x_n \\ y_2\dots y_n \end{pmatrix}\lambda\Big) - K(x_2, y_1)\,D\begin{pmatrix} x_1 x_3\dots x_n \\ y_2 y_3\dots y_n \end{pmatrix}\lambda\Big) + \dots + (-1)^{n-1} K(x_n, y_1)\,D\begin{pmatrix} x_1\dots x_{n-1} \\ y_2\dots y_n \end{pmatrix}\lambda\Big) + \lambda\int_a^b K(t, y_1)\,D\begin{pmatrix} x_1 x_2\dots x_n \\ t\, y_2\dots y_n \end{pmatrix}\lambda\Big)\,dt.$$

De la formule (18) on tire aussi, en remplaçant y_i par x_i, multipliant les deux membres par $dx_1\,dx_2\dots dx_n$, et intégrant entre les limites a et b, la relation

$$(21)\quad \int_a^b\int_a^b\dots\int_a^b D\begin{pmatrix} x_1\dots x_n \\ x_1\dots x_n \end{pmatrix}\lambda\Big)\,dx_1\dots dx_n = \pm\frac{d^n D(\lambda)}{d\lambda^n},$$

qui généralise la relation (17).

568. Équation homogène. Fonctions fondamentales. — Lorsque λ n'est pas racine de l'équation $D(\lambda) = 0$, si l'on suppose $f(x)$ nul dans l'équation (1), cette équation n'admet pas d'autre solution que $\varphi(x) = 0$, d'après la formule qui donne la solution unique de l'équation de seconde espèce dans le cas général. Mais l'équation homogène

$$(22)\qquad \varphi(x) = c\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds,$$

où $D(c) = 0$, admet un certain nombre de solutions différentes de zéro, de même qu'un système de n équations linéaires et homogènes où le déterminant est nul admet des solutions non toutes nulles. Soit m l'ordre de multiplicité de la racine $\lambda = c$ de l'équation $D(\lambda) = 0$; cette racine peut annuler quelques-uns des mineurs

$$D\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} c\Big),\quad D\begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix} c\Big),\quad \dots$$

identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs attribuées aux variables x_i, y_k, mais elle ne peut annuler identiquement tous les mineurs du premier ordre, du deuxième ordre, etc.,

jusqu'à celui d'ordre m. En effet, les dérivées $D'(\lambda)$, $D''(\lambda)$, ..., $D^{(m)}(\lambda)$ seraient nulles pour $\lambda = c$, d'après la relation (21), ce qui est impossible. Nous pouvons donc admettre que le mineur d'ordre n n'est pas identiquement nul pour $\lambda = c$, et que tous les mineurs d'ordre inférieur à n sont identiquement nuls pour $\lambda = c$; le nombre n peut être égal à un, et il est au plus égal à m.

Ce nombre n ayant été pris comme on vient de le dire, soit (ξ_i, η_k) un système de $2n$ valeurs numériques telles que le mineur

$$\Delta = D\left(\begin{matrix} \xi_1 \dots \xi_n \\ \eta_1 \dots \eta_n \end{matrix}\middle| c\right)$$

ne soit pas nul. La relation (19) devient en remplaçant λ par c, $x_1, x_2, \dots, x_n$ par $x, \xi_2, \dots, \xi_n$ et $y_1, y_2, \dots, y_n$ par $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, respectivement, et en observant que, par hypothèse, le mineur d'ordre $n-1$ est identiquement nul pour $\lambda = c$,

$$D\left(\begin{matrix} x\ \xi_2 \dots \xi_n \\ \eta_1\, \eta_2 \dots \eta_n \end{matrix}\middle| c\right) = c\int_a^b K(x, t)\, D\left(\begin{matrix} t\ \xi_2 \dots \xi_n \\ \eta_1\, \eta_2 \dots \eta_n \end{matrix}\middle| c\right) dt.$$

On obtient donc une solution de l'équation homogène (22) en remplaçant ξ_1 par x, dans le mineur Δ, et il est clair qu'on obtiendra aussi une solution en remplaçant ξ_i par x, puisqu'on peut amener le couple (ξ_i, η_i) à la première place. Nous désignerons avec Fredholm par $\Phi_i(x)$ la solution obtenue en remplaçant ξ_i par x dans le mineur Δ, et divisant ensuite par ce mineur Δ.

Les n solutions ainsi obtenues $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ sont linéairement distinctes. Nous avons, en effet, d'après la relation générale (19),

$$D\left(\begin{matrix} \xi_i\, \xi_2 \dots \xi_n \\ \eta_1\, \eta_2 \dots \eta_n \end{matrix}\middle| c\right) = c\int_a^b K(\xi_i, s)\, D\left(\begin{matrix} s\ \xi_2 \dots \xi_n \\ \eta_1\, \eta_2 \dots \eta_n \end{matrix}\middle| c\right) ds.$$

et, par suite, l'intégrale

$$c\int_a^b K(\xi_i, s)\, \Phi_1(s)\, ds$$

est égale à un pour $i = 1$, et à zéro pour $i > 1$. D'une façon générale, on établit de la même façon que l'intégrale

$$c\int_a^b K(\xi_i, s)\, \Phi_k(s)\, ds$$

est égale à l'unité si $i = k$, et à zéro pour $i \gtrless k$. Cela étant, supposons qu'on ait entre $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)$ une relation linéaire à coefficients constants

$$(23)\qquad a_1\Phi_1(x) + a_2\Phi_2(x) + \ldots + a_n\Phi_n(x) = 0;$$

en multipliant le premier membre par $K(\xi_i, x)$ et intégrant de a à b, il vient, d'après les relations précédentes, $a_i = 0$. La relation (23) se réduit donc à une identité.

Toute solution de l'équation homogène (22) *est une combinaison linéaire à coefficients constants de* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$.

La démonstration de Fredholm repose sur une remarque générale, dont on se servira dans la suite. Toute fonction $\varphi(x)$, satisfaisant à une équation de seconde espèce (1), vérifie une infinité d'équations de même espèce dépendant d'un noyau arbitraire $H(x, s)$. De l'équation (1) on déduit, en effet,

$$\int_a^b H(x,s)\varphi(s)\,ds = \lambda\int_a^b\int_a^b H(x,s)K(s,t)\varphi(t)\,ds\,dt + \int_a^b H(x,s)f(s)\,ds;$$

si l'on ajoute cette relation à la première, après avoir multiplié les deux membres par λ, l'équation obtenue peut s'écrire

$$(24)\qquad \varphi(x) = \lambda\int_a^b F(x,s)\varphi(s)\,ds + f(x) + \lambda\int_a^b H(x,s)f(s)\,ds,$$

le noyau $F(x, s)$ de la nouvelle équation intégrale ayant pour expression

$$(25)\qquad F(x,s) = K(x,s) = H(x,s) + \lambda\int_a^b H(x,t)K(t,s)\,dt.$$

Toute solution de l'équation (1) est aussi solution de l'équation (24), quelle que soit la fonction intégrable $H(x, s)$.

Cela posé, soit $\varphi(x)$ une solution de l'équation homogène (22). Prenons, dans la relation (24),

$$(26)\qquad H(x,s) = \frac{1}{D\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n\end{pmatrix}\!\Big|\, c} D\left(\begin{matrix} x\,\xi_1 \ldots \xi_n \\ s\,\eta_1 \ldots \eta_n\end{matrix}\,\Big|\, c\right).$$

les constantes (ξ_i, η_i) étant prises de telle façon que le mineur d'ordre n ne soit pas nul.

Le noyau $F(x, s)$ de la nouvelle équation intégrale (24) est égal, en ayant égard à l'équation fonctionnelle (20), où l'on aurait changé n en $n+1$, à

$$K(\xi_1, s)\, D\begin{pmatrix} x\ \xi_2 \ldots \xi_n \\ \eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_n \end{pmatrix}\!\!\left| c \right) + \ldots + K(\xi_n, s)\, D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_{n-1}\, x \\ \eta_1 \ldots \eta_{n-1}\, \eta_n \end{pmatrix}\!\!\left| c \right),$$

et, par suite, toute solution de l'équation (24), où l'on suppose $f(x) = 0$, est bien une combinaison linéaire à coefficients constants de $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)$.

En résumé, *si* $\lambda = c$ *est une racine d'ordre* m *de l'équation* $D(\lambda) = 0$, *l'équation homogène* (22) *admet* n *solutions linéairement distinctes* $(0 < n \leqq m)$; c'est le second théorème de Fredholm.

On démontre de la même façon que l'équation homogène associée

$$(27) \qquad \psi(x) = c\int_a^b K(s, x)\, \psi(s)\, ds$$

admet n solutions linéairement distinctes $\Psi_1(x), \Psi_2(x), \ldots, \Psi_n(x)$, la fonction $\Psi_i(x)$ se déduisant de $D\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \rho_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix}\!\!\left| c \right)$ en y remplaçant η_i par x.

Les nombres c, racines de l'équation déterminante $D(\lambda) = 0$, sont appelés *valeurs caractéristiques*, *valeurs singulières*, ou *nombres fondamentaux;* les solutions de l'équation homogène correspondante sont les *fonctions caractéristiques*, *fonctions singulières*, ou *fonctions fondamentales*.

569. **Étude du cas exceptionnel.** — Prenons enfin l'équation non homogène de seconde espèce

$$(28) \qquad \varphi(x) = c\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds + f(x),$$

où c est une racine de $D(\lambda)$. La discussion de ce cas singulier conduit à des conclusions analogues à celles de la discussion d'un système de n équations linéaires non homogènes à n inconnues, lorsque le déterminant des coefficients des n inconnues est nul. D'abord, il est évident que, si l'équation (28) admet une solution, elle en admet une infinité d'autres, et on les obtient toutes en ajoutant à la première une solution de l'équation homogène obtenue en supprimant $f(x)$ dans l'équation (28). Mais la fonc-

tion $f(x)$ doit satisfaire à certaines conditions pour qu'il existe une solution. Soit en effet $\Psi_i(x)$ une solution quelconque de l'équation homogène (27). Multiplions les deux membres de la formule (28) par $\Psi_i(x)$ et intégrons entre les limites a et b; la formule obtenue peut s'écrire, en intervertissant les lettres s et x dans l'intégrale double,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx\left[\Psi_i(x) - c\int_a^b \mathrm{K}(s, x)\,\Psi_i(s)\,ds\right] = \int_a^b f(x)\,\Psi_i(x)\,dx.$$

Le premier membre de cette relation étant nul, il doit en être de même du second, et par suite la fonction $f(x)$ doit satisfaire aux n conditions

$$(29) \qquad \int_a^b \Psi_i(x)\,f(x)\,dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour que l'équation (24) admette une solution.

Ces conditions sont *suffisantes*. En effet, toute solution de l'équation (28) satisfait à une infinité d'équations intégrales telles que (24), pourvu qu'on y remplace λ par c, quel que soit le noyau auxiliaire $\mathrm{H}(x, s)$. Or, si l'on prend pour $\mathrm{H}(x, s)$ la même fonction (26) qu'au numéro précédent, on voit que $\varphi(x)$ est égal à une combinaison linéaire à coefficients constants de $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)$, augmentée de la fonction

$$(30) \quad \Phi(x) = f(x) + \frac{c}{\mathrm{D}\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix} c} \int_a^b f(s)\,\mathrm{D}\begin{pmatrix} x\ \xi_1 \ldots \xi_n \\ s\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix} c\,ds,$$

et il suffit de vérifier que cette dernière fonction (30) satisfait à l'équation (28) si les conditions (29) sont satisfaites. Si l'on substitue cette expression de $\Phi(x)$ dans l'équation (28), en tenant compte de la relation fonctionnelle (19), on est conduit à une égalité de la forme

$$\int_a^b f(s) \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathrm{C}_i\,\Psi_i(s) \right\} ds = 0,$$

les coefficients C_i étant indépendants de s.

Par conséquent, *pour que l'équation* (28), *où c est racine de* $\mathrm{D}(\lambda) = 0$, *admette des solutions, il faut et il suffit que* $f(x)$

vérifie les n conditions (29), *et la solution dépend alors linéairement de n constantes arbitraires.*

C'est le *troisième théorème de Fredholm.* Nous avons suivi pour l'exposition la méthode synthétique de l'inventeur. On retrouvera plus loin ces résultats dans l'étude du noyau résolvant.

570. **Extension à des noyaux non bornés.** — Toute fonction méromorphe de λ peut, comme on sait, se mettre d'une infinité de façons sous forme du quotient de deux fonctions entières en λ. Le théorème de Fredholm fournit pour le numérateur et le dénominateur de la résolvante des expressions particulièrement symétriques, mais ce ne sont point les seules qu'on puisse prendre. D'une part, les deux termes $D(\lambda)$ et $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ peuvent être divisibles par des facteurs linéaires $\lambda - \lambda_i$ qu'on peut supprimer; d'un autre côté, en multipliant ces deux fonctions par une même fonction entière de λ, on obtient une nouvelle expression de la résolvante. Parmi les formes en nombre infini de $\Gamma(x, y; \lambda)$, considérons en particulier celle qui est fournie par la théorie des noyaux itérés (n° 560). Soit $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ la résolvante relative au $n^{\text{ième}}$ noyau itéré

$$(31)\quad \Gamma_n(x, y; \lambda) = K^{(n)}(x, y) + \lambda K^{(2n)}(x, y) + \ldots + \lambda^{p-1} K^{(pn)}(x, y) + \ldots$$

qui a aussi pour expression, d'après le premier théorème de Fredholm,

$$(32)\qquad \Gamma_n(x, y; \lambda) = \frac{D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D_n(\lambda)},$$

$D_n(\lambda)$ et $D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ étant les fonctions entières de Fredholm formées avec le noyau $K^{(n)}(x, y)$, et la seconde expression de $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ est valable pour toute valeur de λ. Cela étant, remplaçons $\Gamma_n(x, y; \lambda^n)$ par son expression tirée de la relation (32) dans la formule (65) du n° 560, il vient

$$(33)\qquad \Gamma(x, y; \lambda) = H(x, y; \lambda) + \lambda^{n-1} \frac{D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\lambda^n\right)}{D_n(\lambda^n)} \cdot$$

$$+ \lambda^n \int_a^b H(x, s; \lambda) \frac{D_n\left(\begin{matrix} s \\ y \end{matrix}\middle|\lambda_n\right)}{D^n(\lambda^n)} ds.$$

en posant toujours

$$H(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-2} K^{(n-1)}(x, y);$$

$D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda^n\right)$ étant une fonction entière de λ^n, il est clair que le second membre de la formule (33) est une *fonction méromorphe* de λ dont le dénominateur est $D_n(\lambda^n)$

$$(34) \qquad \Gamma(x, y; \lambda) = \frac{E_n(x, y; \lambda)}{D_n(\lambda^n)}.$$

Lorsque le noyau $K(x, y)$ est borné, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, on passe de la forme de Fredholm à la nouvelle expression de la résolvante en multipliant les deux termes par une fonction entière facile à trouver. Nous avons, en effet, d'après la formule (16),

$$(35) \qquad D_n(\lambda) = e^{-\left(A_n\lambda + \frac{A_{2n}}{2}\lambda^2 + \ldots + \frac{A_{pn}}{p}\lambda^p + \ldots\right)},$$

et par suite, comme le prouve un calcul élémentaire facile,

$$(36) \qquad D_n(\lambda^n) = D(\lambda)\, D(\omega\lambda) \ldots D(\omega^{n-1}\lambda),$$

ω étant une racine primitive de l'équation $\omega^n = 1$. On passe donc de la forme de Fredholm (10) à la nouvelle forme (34) en multipliant les deux termes par la fonction entière $D(\omega\lambda) \ldots D(\omega^{n-1}\lambda)$.

Pour parvenir à l'expression (33) de la résolvante $\Gamma(x, y; \lambda)$, il nous a suffi de supposer que tous les noyaux itérés, à partir de $K^{(n)}(x, y)$, étaient bornés, mais la démonstration n'exige pas que le noyau $K(x, y)$ lui-même soit borné. Le premier théorème de Fredholm s'étend donc aux noyaux de cette espèce, et *la résolvante est encore une fonction méromorphe du paramètre* λ. Pour une valeur de λ qui n'est pas un pôle de la résolvante, l'équation (1) admet une solution unique qui est représentée par la formule (11), à condition d'y remplacer $\Gamma(x, y; \lambda)$ par l'expression (34). Nous verrons plus loin que les autres théorèmes de Fredholm s'étendent aussi à ce cas.

Dans la nouvelle expression de la résolvante, le numérateur et le dénominateur s'expriment au moyen des noyaux itérés successifs

de $K(x, y)$ et au moyen des traces A_n, A_{2n}, ..., *mais les traces* A_1, A_2, ..., A_{n-1} *n'y figurent pas*. Il est clair, en effet, qu'un coefficient quelconque de $D_n\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ s'exprime au moyen de A_n, A_{2n}, A_{3n}, ..., et des noyaux $K^{(n)}(x, y)$, $K^{(2n)}(x, y)$, ...; l'intégrale $\int_a^b H(x, s; \lambda) D_n\left(\begin{matrix}y\\s\end{matrix}\middle|\lambda^n\right) ds$ s'exprimera donc uniquement au moyen de A_n, A_{2n}, ..., A_{pn}, ..., et des noyaux itérés à partir de $K^{(n+1)}(x, y)$.

M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. 33, 1910) a indiqué une autre forme de la résolvante, qui s'applique à un noyau non borné pourvu que tous les noyaux itérés à partir d'un certain rang soient finis. Supposons d'abord que $K(x, y)$ soit un noyau borné; la résolvante étant mise sous la forme habituelle (10), en multipliant les deux termes de la fraction par la fonction entière

$$e^{A_1\lambda+\ldots+A_{n-1}\frac{\lambda^{n-1}}{n-1}},$$

on obtient une nouvelle expression de la résolvante

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{\mathcal{D}_n\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)}{\mathcal{D}_n(\lambda)}, \tag{37}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{D}_n(\lambda) &= e^{-\frac{A_n}{n}\lambda^n-\frac{A_{n+1}}{n+1}\lambda^{n+1}-\ldots} = D(\lambda)\, e^{A_1\lambda+\ldots+A_{n-1}\frac{\lambda^{n-1}}{n-1}}, \\ \mathcal{D}_n\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right) &= D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right) e^{A_1\lambda+\ldots+\frac{A_{n-1}}{n-1}\lambda^{n-1}}; \end{aligned}\right. \tag{38}$$

$\mathcal{D}_n(\lambda)$ et $\mathcal{D}_n\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ sont deux nouvelles fonctions entières de λ qui peuvent se déduire très simplement de $D(\lambda)$ et de $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$. Il est clair, en effet, que $\mathcal{D}_n(\lambda)$ s'exprime uniquement au moyen des traces A_n, A_{n+1}, ...; on obtiendra donc $\mathcal{D}_n(\lambda)$ *en supprimant dans les coefficients de* $D(\lambda)$ *tous les termes qui dépendent de* A_1, A_2, ..., A_{n-1}, ce qui revient à remplacer A_1, ..., A_{n-1} par zéro dans la première des identités (38). D'autre part, l'identité

$$\mathcal{D}_n(\lambda)\left\{K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots\right\} = \mathcal{D}_n\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right) \tag{38'}$$

prouve que les coefficients de $\mathcal{D}_n\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ s'expriment uniquement au moyen

des traces A_n, A_{n+1}, ... et des noyaux $K(x, y)$, $K^{(2)}(x, y)$, ... On déduira donc aussi $\mathcal{D}_n\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ du développement de $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ en supprimant dans les coefficients tous les termes qui dépendent de A_1, A_2, ..., A_{n-1}.

L'expression (37) *de la résolvante est encore valable si le noyau* $K(x, y)$ *est infini pour* $y = x$, *pourvu que tous les noyaux itérés restent bornés à partir de* $K^{(n)}(x, y)$. Toutes les traces à partir de A_n ont alors des valeurs finies, et l'identité (38)' est toujours exacte au point de vue formel puisqu'elle est susceptible d'une vérification directe. Il nous suffit donc de montrer que $\mathcal{D}_n(\lambda)$ est une fonction entière de λ admettant comme zéro tout pôle de la résolvante à un ordre de multiplicité au moins égal à l'ordre de ce pôle. S'il en est ainsi, le produit $\mathcal{D}_n(\lambda)\Gamma(x, y; \lambda)$, c'est-à-dire $\mathcal{D}_n\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$, sera bien aussi une fonction entière de λ. Or, nous avons, pour les valeurs de λ de module assez petit,

$$(39)\quad \frac{\mathcal{D}'_n(\lambda)}{\mathcal{D}_n(\lambda)} = -\lambda^{n-1}\int_a^b K^{(n)}(s, s)\,ds - \lambda^n\int_a^b K^{(n+1)}(s, s)\,ds - \ldots$$
$$= -\int_a^b \Gamma'(s, s; \lambda)\,ds,$$

en posant

$$\Gamma'(x, y; \lambda) = \Gamma(x, y; \lambda) - K(x, y) - \ldots - \lambda^{n-2}K^{(n-1)}(x, y);$$

$\Gamma'(x, y; \lambda)$ est une fonction méromorphe de λ, n'admettant comme pôles que ceux de la résolvante $\Gamma(x, y; \lambda)$ et dont la partie principale, pour chacun d'eux, est identique à la partie principale de la résolvante. On vérifiera plus loin (nº 579) que tout pôle λ_i de la résolvante est un pôle *simple* de $-\int_a^b \Gamma'(s, s; \lambda)\,ds$, dont le résidu est un nombre entier égal ou supérieur à l'ordre du pôle. La fonction $\mathcal{D}_n(\lambda)$ est donc bien une fonction entière de λ, satisfaisant aux conditions énoncées, ce qui démontre la proposition de M. Poincaré.

Remarque. — Dans le cas particulier où les noyaux itérés restent finis pour $y = x$ à partir de $K^{(2)}(x, y)$, ce qui arrivera si $K(x, y)$ est d'ordre $\alpha < \frac{1}{2}$, on peut prendre $n = 2$, c'est-à-dire supprimer A_1 dans les développements de $D(\lambda)$ et $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$. Or, tous les termes renfermant A_1 dans ces développements proviennent uniquement des éléments de la diagonale principale dans les déterminants de Fredholm. On peut donc conserver les expressions de Fredholm pour $D(\lambda)$ et $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$, à condition de remplacer par des zéros tous les éléments de la diagonale principale

dans les déterminants qui figurent dans ces expressions. Cette élégante remarque est due à M. Hilbert (¹).

Pour certains noyaux non bornés, la solution même de Fredholm est applicable. Tel est, par exemple, le cas du noyau $\frac{H(x, y)}{|x-c|^\alpha}$, lorsque $H(x, y)$ est borné, α étant un exposant positif inférieur à un (nº 561). On vérifie encore que la série (5) est une fonction entière de λ, au moyen de l'inégalité d'Hadamard. Quant au développement (9), il est de même égal au quotient d'une fonction entière de λ par $\frac{1}{|x-c|^\alpha}$ et l'égalité

$$D\left(\begin{array}{c|c} x & \lambda \\ y & \end{array}\right) = D(\lambda)\Gamma(x, y; \lambda),$$

où $\Gamma(x, y; \lambda)$ est le développement du nº 561, s'établit de la même façon que plus haut.

571. **Étude des noyaux $\Sigma X_i Y_i$.** — On est encore conduit à la solution de Fredholm par un autre procédé d'induction fondé sur l'étude d'un cas particulier où la résolution de l'équation intégrale de seconde espèce ne présente aucune difficulté; c'est le cas où le noyau $K(x, y)$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$, les X_i et les Y_i ne dépendant respectivement que de la variable x et de la variable y. On peut supposer que les n fonctions X_i sont linéairement distinctes, ainsi que les fonctions Y_i; s'il en était autrement, il est clair que le noyau pourrait se mettre sous une forme analogue, avec moins de n fonctions de x. L'équation intégrale prend la forme

$$(40) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b [X_1(x)Y_1(s) + \ldots + X_n(x)Y_n(s)]\varphi(s)\,ds;$$

il est évident que toute solution $\varphi(x)$ est de la forme

$$(41) \qquad \varphi(x) = f(x) + H_1 X_1(x) + \ldots + H_n X_n(x),$$

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ étant des coefficients constants. Pour calculer ces coefficients, nous n'avons qu'à remplacer $\varphi(x)$ et $\varphi(s)$ par leurs expressions correspondantes dans les deux membres de l'équation (40), et à écrire que les coefficients de $X_i(x)$ sont les mêmes de part et d'autre. On obtient

(¹) *Göttingen Nachrichten*, 1904, p. 81.

ainsi les n équations linéaires,

$$(42)\quad \begin{cases} (1-\lambda a_{11})H_1 - \lambda a_{21} H_2 - \ldots - \lambda a_{n1} H_n = \lambda \int_a^b Y_1(s) f(s)\, ds, \\ -\lambda a_{12} H_1 + (1-\lambda a_{22}) H_2 - \ldots - \lambda a_{n2} H_n = \lambda \int_a^b Y_2(s) f(s)\, ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -\lambda a_{1n} H_1 - \lambda a_{2n} H_2 - \ldots + (1-\lambda a_{nn}) H_n = \lambda \int_a^b Y_n(s) f(s)\, ds, \end{cases}$$

où l'on a posé $a_{ik} = \int_a^b X_i(s) Y_k(s)\, ds$. En résolvant ces équations linéaires, on obtient pour $H_1, H_2, \ldots, H_n$ et, par suite, pour $\varphi(x)$ une fonction rationnelle de λ qu'on peut écrire, on le voit aisément,

$$(43)\qquad \varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D_n(\lambda)} \int_a^b D_n\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\, \lambda\right) f(s)\, ds,$$

$D_n(\lambda)$ et $D_n\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\, \lambda\right)$ étant les deux déterminants

$$(44)\qquad D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{21} & \ldots & -\lambda a_{n1} \\ -\lambda a_{12} & 1-\lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{1n} & -\lambda a_{2n} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$(45)\quad D_n\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\, \lambda\right) = -\begin{vmatrix} 0 & X_1(x) & X_2(x) & \ldots & X_n(x) \\ Y_1(s) & 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{21} & \ldots & -\lambda a_{n1} \\ Y_2(s) & -\lambda a_{12} & 1-\lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_n(s) & -\lambda a_{1n} & -\lambda a_{2n} & \ldots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Par quelques transformations assez simples de déterminants [1], on démontre que les déterminants $D_n(\lambda)$ et $D_n\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle|\, \lambda\right)$ sont identiques aux fonctions de Fredholm formées avec le noyau $\Sigma X_i Y_i$, ce qui conduit par induction à la solution générale de l'équation (1) pour un noyau de forme arbitraire. Nous vérifierons seulement l'identité du déterminant $D_n(\lambda)$ avec la fonction déterminante de Fredholm. Remarquons d'abord que le noyau $K(x, y)$ peut se mettre sous la forme $\Sigma X_i Y_i$ d'une infinité de façons, car on peut remplacer les fonctions X_i par n combinaisons linéaires distinctes à coefficients constants de ces fonctions; les n fonctions Y_i doivent

---

[1] GOURSAT, *Bulletin de la Société mathématique*, t. 36, 1907, p. 163. — LEBESGUE, *Ibid.*, t. 36, 1908, p. 3.

en même temps être remplacées par n combinaisons linéaires de ces fonctions dont les coefficients dépendent des premiers. Il est clair que le déterminant $D_n(\lambda)$ est indépendant du choix particulier des fonctions X_i qu'on a fait pour mettre le noyau sous la forme $\Sigma X_i Y_i$, et que ce déterminant ne dépend que du noyau $K(x, y)$ lui-même. Nous allons montrer comment on peut profiter de l'indétermination des fonctions X_i pour réduire $D_n(\lambda)$ au produit des éléments de sa diagonale principale.

Le noyau $K(x, y)$ étant donné sous la forme $\Sigma X_i Y_i$, d'une façon quelconque, imaginons qu'on cherche une combinaison linéaire à coefficients constants $X = \Sigma \alpha_i X_i$ telle qu'on ait

$$\int_a^b K(x, s) X(s)\, ds = c X(x), \tag{46}$$

c étant un facteur constant. Les fonctions X_i étant linéairement distinctes par hypothèse, les n coefficients α_i doivent vérifier n équations linéaires et homogènes dont le déterminant égalé à zéro fournit une équation en c de degré n, qui se déduirait précisément de l'équation $D_n(\lambda) = 0$, en y remplaçant λ par $\frac{1}{c}$. A chaque racine de cette équation correspond au moins une fonction $X(x)$ satisfaisant à une relation de la forme (46), la constante c pouvant d'ailleurs être nulle. Si l'on a pris l'une de ces fonctions pour X_1, il est clair que la relation (46) ne pourra être vérifiée que si l'on a $a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$.

Ayant choisi X_1 de cette façon, on peut ensuite recommencer les mêmes raisonnements et les mêmes opérations sur le noyau $X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n$, et ainsi de suite. On arrivera ainsi à mettre le noyau donné sous une forme telle qu'on ait $a_{ik} = 0$ pour $i < k$; nous dirons pour abréger que le noyau est mis sous une *forme réduite*. Le déterminant $D_n(\lambda)$ se réduit alors au produit $(1 - a_{11}\lambda)\ldots(1 - a_{nn}\lambda)$. Il reste à exprimer les sommes des puissances semblables $S_p = \Sigma a_{ii}^p$ au moyen du noyau $K(x, y)$. Des relations

$$\int_a^b X_i(s) Y_i(s)\, ds = a_{ii}, \qquad \int_a^b X_i(s) Y_k(s)\, ds = 0 \qquad (i < k)$$

on tire immédiatement

$$S_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{pp} = \int_a^b K(x_1, x_1)\, dx_1$$

et d'une façon générale

$$S_p = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K(x_1, x_2) K(x_2, x_3) \ldots K(x_p, x_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p. \tag{47}$$

En effet, un terme quelconque de l'intégrale multiple est un produit de p facteurs a_{ik}. Si tous les indices ne sont pas égaux, il y a au moins un de ces facteurs qui est nul, et par suite l'intégrale est égale à Σa_{ii}^p. On voit

que les sommes S_p sont précisément les traces successives du noyau $K(x, y)$. Le développement de la dérivée logarithmique de $D_n(\lambda)$ est donc identique au développement de la dérivée logarithmique de la déterminante de Fredholm (n° 566), et, comme $D_n(0) = D(0) = 1$, les deux fonctions sont identiques.

Remarque. — Le noyau étant mis sous une forme réduite, $D_n(\lambda)$ est un polynome de degré n si aucun des nombres $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ n'est égal à zéro, tandis que $D_n\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ est au plus du degré $n - 1$. Supposons au contraire que quelques-uns des nombres a_{ii} soient nuls, par exemple $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{pp}$, les autres étant différents de zéro, $D_n(\lambda)$ est du degré $n - p$ tandis que $D_n\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ ne peut être de degré inférieur, car le coefficient de $X_1(x)Y_1(s)$ par exemple est bien du degré $n - p$. Il s'ensuit que la résolvante est une fonction rationnelle de λ qui est nulle pour λ infini si aucun des nombres a_{ii} n'est égal à zéro, et dans ce cas seulement. Or le noyau $X(x, y)$ étant mis d'une façon quelconque sous la forme $\Sigma X_i Y_i$, les nombres a_{ii} qui figurent dans la forme réduite sont les racines de l'équation $c^n D_n\left(\frac{1}{c}\right) = 0$. *Pour que la résolvante soit nulle pour λ infini, il faut donc et il suffit que le déterminant $D_n(\lambda)$ soit de degré n.*

572. **Autre méthode d'induction.** — La solution de Fredholm étant supposée établie pour un noyau de la forme spéciale $\Sigma X_i Y_i$, on peut passer directement de ce cas élémentaire au cas d'un noyau continu quelconque par un passage à la limite ([1]). Soient, d'une facon générale,

$$K_1(x, y),\quad K_2(x, y),\quad \ldots,\quad K_n(x, y),\quad \ldots,$$

une suite de noyaux bornés (auxquels s'applique la méthode de Fredholm), qui convergent uniformément vers un autre noyau $K(x, y)$; désignons par $D_n(\lambda)$, $D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$, $D(\lambda)$, $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ les fonctions entières de Fredholm formées avec $K_n(x, y)$ et $K(x, y)$ respectivement. Il est aisé de voir que $D_n(\lambda)$ a pour limite $D(\lambda)$, et que $D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ tend uniformément vers $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ lorsque n croît indéfiniment. Pour démontrer le premier point, par exemple, on n'a qu'à observer que $D_n(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont deux séries entières en λ, toujours convergentes, dont les termes sont moindres en valeur absolue (n° 565) que les termes de même rang d'une série convergente à termes positifs indépendants de n, et que chaque terme de

---

([1]) E. Goursat, *loc. cit.*, p. 172.

$D_n(\lambda)$ a pour limite le terme correspondant de $D(\lambda)$. La seconde partie s'établit de la même façon. Il en résulte que si λ n'est pas racine de l'équation $D(\lambda) = 0$, la fonction

$$\varphi_n(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D_n(\lambda)} \int_a^b D_n\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right) f(s)\, ds$$

tend uniformément vers la fonction $\Phi(x)$ qui a pour expression

$$\Phi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right) f(s)\, ds.$$

D'autre part, l'équation

$$(48) \qquad \varphi_n(x) = \lambda \int_a^b K_n(x, s)\varphi_n(s)\, ds + f(x)$$

peut s'écrire

$$(49) \quad \varphi_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\Phi(s)\, ds + \lambda \int_a^b [K_n(x, s) - K(x, s)]\varphi_n(s)\, ds + \lambda \int_a^b [\varphi_n(s) - \Phi(s)] K(x, s)\, ds + f(x);$$

si n croît indéfiniment, les deux dernières intégrales du second membre tendent vers zéro, et il reste à la limite

$$(50) \qquad \Phi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\Phi(s)\, ds + f(x),$$

ce qui montre que la solution de Fredholm est applicable à l'équation intégrale de noyau $K(x, y)$. On en déduit que la solution de Fredholm s'applique à un noyau continu quelconque, puisqu'on peut trouver une suite de polynomes $P_n(x, y)$ convergeant uniformément vers ce noyau (n° 531), et tout polynome est bien de la forme $\Sigma X_i Y_i$.

M. Lebesgue (*loc. cit.*, p. 11 et suiv.) a beaucoup généralisé cette méthode, et montré que la solution de Fredholm était applicable dans des cas étendus à des noyaux non bornés. On vérifie d'ailleurs ce résultat en observant que, dans le cas d'un noyau de la forme $\Sigma X_i Y_i$, la méthode du n° 571 ne suppose pas que les fonctions X_i et Y_i soient bornées, mais seulement que les produits $X_i(s) Y_k(s)$, $f(s) Y_i(s)$ sont intégrables. Tel est le cas du noyau $\sqrt{\frac{y}{x}}$ (n° 561), dont on ne peut déduire par des itérations un noyau borné. La plupart des questions qu'on peut se proposer pour une équation intégrale de seconde espèce se résolvent de même aisément pour un noyau de la forme $\Sigma X_i Y_i$, et la solution peut fournir d'utiles indications pour le cas général.

II. — ÉTUDE DU NOYAU RÉSOLVANT.

573. Systèmes orthogonaux et biorthogonaux. — Dans ce paragraphe et les suivants, nous considérons des fonctions qui peuvent avoir des discontinuités en nombre quelconque dans l'intervalle (a, b), mais qui sont intégrables ainsi que leurs carrés dans cet intervalle; on exclut seulement les fonctions discontinues $f(x)$ telles qu'on ait $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ (*voir* le Chapitre suivant). Soient u et v deux fonctions quelconques de cette espèce; nous poserons, pour abréger,

$$(uv) = \int_a^b u(x)v(x)\,dx;$$

d'après l'inégalité de Schwarz, cette intégrale a une valeur finie puisque les intégrales $\int_a^b u^2\,dx$, $\int_a^b v^2\,dx$ ont des valeurs finies. Si l'on a $(uv) = 0$, les deux fonctions u et v sont dites *orthogonales*. Une suite de fonctions, en nombre fini ou infini,

$$(51) \qquad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots,$$

forme *un système orthogonal* si l'on a $(\varphi_i\varphi_k) = 0$, lorsque les indices i et k sont différents. Il est clair que tout groupe de fonctions, prises dans un système orthogonal, est aussi un système orthogonal. *Si n fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ forment un système orthogonal, elles sont linéairement distinctes.* En effet, s'il existait entre elles une relation linéaire et homogène à coefficients constants, en multipliant le premier membre par $\varphi_i(x)$ et intégrant entre les limites a et b, on en déduirait que le coefficient de $\varphi_i(x)$ dans cette relation doit être nul.

Le système orthogonal (51) est dit *normal*, si l'on a $(\varphi_i\varphi_i) = 1$, quel que soit l'indice i. Pour transformer un système orthogonal quelconque en un système normal, il suffit évidemment de diviser chaque fonction $\varphi_i(x)$ de ce système par $\sqrt{(\varphi_i\varphi_i)}$.

Étant donné un système de n fonctions linéairement distinctes

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n,$$

on peut former n combinaisons linéaires à coefficients constants

de ces fonctions, formant un système orthogonal. Prenons, par exemple, $\Phi_1(x) = \varphi_1(x)$, et déterminons la constante $c_i (i > 1)$ de façon que les deux fonctions $\varphi_1(x)$ et $\pi_i(x) = \varphi_i(x) - c_i\varphi_1(x)$ soient orthogonales; dans la nouvelle suite de fonctions $\Phi_1(x)$, $\pi_2(x), \ldots, \pi_n(x)$, la première fonction $\Phi_1(x)$ est orthogonale à toutes les suivantes, et par suite à toutes leurs combinaisons linéaires. D'ailleurs ces $n-1$ fonctions $\pi_i(x)$ sont encore linéairement distinctes, et l'on peut opérer sur la nouvelle suite comme sur la première. Au bout de n transformations de ce genre, il est clair qu'on arrivera à un système orthogonal de n fonctions Φ_1, $\Phi_2, \ldots, \Phi_n$, qu'on pourra ramener à un système normal par le procédé indiqué tout à l'heure.

Le système orthogonal qu'on peut déduire des n fonctions φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n'est pas unique; il est clair, en effet, que tout système orthogonal de n fonctions donne naissance à un nouveau système orthogonal quand on effectue sur les fonctions de ce système, considérées comme des variables indépendantes, une substitution orthogonale quelconque.

De même, on dit que deux suites de fonctions, en nombre fini ou infini, se correspondant une à une,

$$(52) \qquad \begin{cases} \varphi_1, & \varphi_2, & \ldots, & \varphi_n, & \ldots, \\ \psi_1, & \psi_2, & \ldots, & \psi_n, & \ldots, \end{cases}$$

forment un *système biorthogonal*, si l'on a $(\varphi_i\psi_k) = 0$, pour $i \neq k$. Les fonctions φ_i et ψ_i de même indice sont dites *associées*. Si l'on a $(\varphi_i\psi_i) \neq 0$, quel que soit i, on peut supposer $(\varphi_i\psi_i = 1$, car il suffit de diviser $\varphi_i(x)$ par $(\varphi_i\psi_i)$ pour que la condition soit vérifiée. Le système (52) est dit alors *système normal*. Un nombre quelconque de fonctions appartenant à l'une des suites d'un système biorthogonal, pour lequel on a $(\varphi_i\psi_i) \neq 0$ quel que soit i, sont linéairement distinctes. En effet, s'il existait une relation linéaire entre les n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ par exemple, en multipliant le premier membre de cette relation par $\psi_k(x)$ $(k \leqq n)$, et intégrant de a à b, on en déduirait que le coefficient de $\varphi_h(x)$ dans cette relation est nul.

Soient $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ et $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p)$ deux groupes de p fonctions tels qu'il n'existe aucune combinaison linéaire des φ_i à coefficients constants (l'un au moins n'étant pas nul) qui soit

orthogonale à tous les ψ_i, et inversement; on peut déduire de ces deux groupes de fonctions deux groupes formant un système biorthogonal. Remarquons d'abord qu'il résulte des hypothèses que les p fonctions φ_i sont linéairement indépendantes, ainsi que les p fonctions ψ_i; en effet, s'il existait une combinaison linéaire des φ_i qui fût identiquement nulle, cette combinaison linéaire serait orthogonale à tous les ψ_i. Cela étant, prenons $\Phi_1(x) = \varphi_1(x)$, et soit $\Psi_1(x)$ une combinaison linéaire des ψ telle que $(\Phi_1 \Psi_1)$ ne soit pas nul. Choisissons ensuite les $2p - 2$ coefficients $c_2, c_3, \ldots, c_p, c'_2, \ldots, c'_p$ de façon qu'on ait

$$(\Phi_1, \psi_i - c'_i \Psi_1) = 0, \qquad (\Psi_1, \varphi_i - c_i \Phi_1) = 0 \qquad (i = 2, \ldots, p),$$

ce qui est possible, puisque $(\Phi_1 \Psi_1)$ n'est pas nul. Les $p - 1$ fonctions $(\pi_2, \ldots, \pi_p)$, où $\pi_i = \varphi_i - c_i \Phi_1$, sont linéairement distinctes et orthogonales à Ψ_1; de même, les $p - 1$ fonctions $(\chi_2, \ldots, \chi_p)$, où $\chi_i = \psi_i - c'_i \Psi_1$, sont linéairement distinctes et orthogonales à Φ_1. Il est clair d'ailleurs qu'aucune combinaison linéaire des π_i ne sera orthogonale à toutes les fonctions χ_i et inversement. En recommençant la même opération sur les deux groupes de fonctions $(\pi_2, \pi_3, \ldots \pi_p)$ et $(\chi_2, \ldots, \chi_p)$, et ainsi de suite, on arrivera évidemment à deux groupes de p fonctions $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p)$ et $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_p)$ formant un système biorthogonal, qu'on pourra rendre normal par le procédé indiqué plus haut.

Remarque. — Nous avons supposé implicitement que la variable et les fonctions étaient réelles. Il n'y a rien à changer aux raisonnements en ce qui concerne les systèmes biorthogonaux lorsque, la variable x étant toujours réelle, les fonctions φ_i et ψ_i prennent des valeurs complexes, car l'hypothèse de la réalité n'intervient pas dans les raisonnements. Il n'en est pas de même pour un système orthogonal, et il y a lieu de généraliser la définition, lorsque les fonctions peuvent prendre des valeurs complexes. Nous dirons que le système des fonctions φ_i est un système orthogonal si, en faisant correspondre à chacune de ces fonctions la fonction conjuguée, on obtient un système biorthogonal. Il est alors aisé de démontrer que n fonctions formant un système orthogonal sont linéairement distinctes et que, inversement, étant données n fonctions linéairement distinctes, on peut en déduire n combinaisons linéaires à coefficients constants formant un système orthogonal.

374. Noyaux orthogonaux et semi-orthogonaux. — Deux noyaux $K_1(x, y)$ et $K_2(x, y)$, bornés ou non, sont dits *orthogonaux* s'ils vérifient les deux conditions

$$(53)\quad \int_a^b K_1(x, s)K_2(s, y)\,ds = 0, \qquad \int_a^b K_2(x, s)K_1(s, y)\,ds = 0.$$

quelles que soient les valeurs des variables x, y; ils sont *semi-orthogonaux* si une seule de ces conditions est verifiée [1].

Théorème A. — *Étant donnés deux noyaux orthogonaux* $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, *la résolvante* $\Gamma(x, y; \lambda)$ *relative au noyau* $S(x, y) = K_1(x, y) + K_2(x, y)$ *est égale à la somme des résolvantes* $\Gamma_1(x, y; \lambda)$, $\Gamma_2(x, y; \lambda)$, *relatives à ces deux noyaux.*

Il suffit d'observer que, si K_1 et K_2 sont orthogonaux, deux noyaux déduits de K_1 et K_2 par un nombre quelconque d'itérations sont aussi orthogonaux. On a, par exemple,

$$K_1^{(n)}(x, y) = \int_a^b K_1(x, s)K_1^{(n-1)}(s, y)\,dt,$$

$$K_2^{(p)}(x, y) = \int_a^b K_2^{(p-1)}(x, t)K_2(t, y)\,dt,$$

et l'on peut écrire

$$(54)\quad \int_a^b K_2^{(p)}(x, s)K_1^{(n)}(s, y)\,ds$$
$$= \int\int\int K_2^{(p-1)}(x, u)K_2(u, s)K_1(s, v)K_1^{(n-1)}(v, y)\,ds\,du\,dv$$
$$\int_a^b\int_a^b K_2^{(p-1)}(x, u)K_1^{(n-1)}(v, y)\,du\,dv \int_a^b K_2(u, s)K_1(s, v)\,ds = 0;$$

on prouverait de même qu'on a

$$\int_a^b K_1^{(n)}(x, s)K_2^{(p)}(s, y)\,ds = 0$$

en écrivant autrement les noyaux itérés. Il résulte immédiatement

---

[1] E. Goursat, *Comptes rendus*, t. 145, p. 667 et 752, 1907; *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. X, 1908. — B. Heywood, *Comptes rendus*, t. 145, p. 908; *Journal de Mathématiques*, 1908. J'avais aussi démontré les théorèmes A et B, en m'appuyant sur la structure des déterminants de Fredholm.

des relations (54) que le noyau $S^{(2)}(x, y)$ déduit de $K_1 + K_2$ par une première itération est précisément $K_1^{(2)}(x, y) + K_2^{(2)}(x, y)$, et l'on vérifie ensuite de proche en proche que le $n^{\text{ième}}$ noyau itéré $S^{(n)}(x, y)$ est égal à $K_1^{(n)}(x, y) + K_2^{(n)}(x, y)$. En ajoutant les deux développements des résolvantes $\Gamma_1(x, y; \lambda)$, $\Gamma_2(x, y; \lambda)$ (n° 559), on parvient à la formule qu'il s'agissait d'établir

(55) $$\Gamma(x, y; \lambda) = \Gamma_1(x, y; \lambda) + \Gamma_2(x, y; \lambda).$$

Il est évident qu'un noyau orthogonal à plusieurs autres est aussi orthogonal à leur somme, ce qui permet d'étendre le théorème à un nombre quelconque de noyaux : *Si n noyaux* K_1, K_2, ... K_n *sont orthogonaux deux à deux, la résolvante relative à leur somme* $S(x, y) = K_1 + \ldots + K_n$ *est égale à la somme des résolvantes relatives à chacun des noyaux.*

La démonstration prouve que, de tout couple de noyaux orthogonaux K_1, K_2, on peut en déduire une infinité d'autres. En effet, la somme d'un nombre quelconque de noyaux déduits de $K_1(x, y)$ par itération est orthogonale à tout autre noyau déduit de $K_2(x, y)$ de la même façon. Les noyaux résolvants eux-mêmes $\Gamma_1(x, y; \lambda)$, $\Gamma_2(x, y; \mu)$ sont aussi orthogonaux, quels que soient λ et μ.

Soient $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ deux solutions des deux équations intégrales

$$\varphi_1(x) = \lambda \int_a^b K_1(x, s)\varphi_1(s)\, ds + f(x),$$

$$\varphi_2(x) = \lambda \int_a^b K_2(x, s)\varphi_2(s)\, ds + f(x),$$

où K_1 et K_2 sont deux noyaux orthogonaux. Si λ n'est pas une valeur singulière pour l'un des noyaux, $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) - f(x)$ sera solution de l'équation intégrale

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^b \{ K_1(x, s) + K_2(x, s) \} \Phi(s)\, ds + f(x),$$

d'après le théorème général qui précède sur les résolvantes.

Il est facile de vérifier directement cette propriété, car la relation à vérifier se réduit à

$$\int_a^b K_1(x, s)[\varphi_2(s) - f(s)]\, ds + \int_a^b K_2(x, s)[\varphi_1(s) - f(s)]\, ds = 0,$$

et les deux intégrales sont nulles, en vertu de l'orthogonalité des noyaux et des équations intégrales elles-mêmes. Remarquons que cette démonstration s'applique aussi au cas où λ serait une valeur singulière pour l'un des noyaux, et que la propriété s'étend à un nombre quelconque de noyaux orthogonaux deux à deux.

Considérons maintenant deux noyaux semi-orthogonaux et supposons, par exemple, que ces noyaux vérifient la seconde des relations (53). Nous dirons pour abréger que $K_2(x, y)$ est *orthogonal à droite* à $K_1(x, y)$, tandis que $K_1(x, y)$ est *orthogonal à gauche* à $K_2(x, y)$. Les noyaux $K_2^{(p)}(x, y)$ et $K_1^{(n)}(x, y)$ déduits des premiers par un nombre quelconque d'itérations sont dans la même relation, c'est-à-dire que *tout noyau déduit de* $K_2(x, y)$ *par itération est orthogonal à droite à tous les noyaux itérés de* $K_1(x, y)$. La proposition est démontrée par la formule (54), dont le second membre s'annule en vertu de la seconde des relations (53). Cela étant, si les noyaux $K_1(x, y)$ et $K_2(x, y)$ sont bornés, ou, d'une façon plus générale, si la solution de Fredholm est applicable pour chacun d'eux, on a le théorème suivant :

Théorème B. — *Soient* $K_1(x, y)$ *et* $K_2(x, y)$ *deux noyaux orthogonaux ou semi-orthogonaux*, $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$ *les fonctions déterminantes de Fredholm pour ces noyaux; la déterminante* $\mathcal{D}(\lambda)$ *de Fredholm pour le noyau* $S(x, y) = K_1 + K_2$ *est égale au produit* $D_1(\lambda)D_2(\lambda)$,

On vérifie de proche en proche, en tenant compte des relations précédentes, que le noyau $S^{(n)}(x, y)$ est de la forme

$$S^{(n)}(x, y) = K_1^{(n)}(x, y) + K_2^{(n)}(x, y) + \Sigma C_{p,q} \int_a^b K_1^{(p)}(x, s) K_2^{(q)}(s, y)\, ds,$$

$C_{p,q}$ étant un nombre entier. On a donc

$$\int_a^b S^{(n)}(s, s)\, ds = \int_a^b K_1^{(n)}(s, s)\, ds + \int_a^b K_2^{(n)}(s, s)\, ds$$
$$+ \Sigma C_{p,q} \int_a^b \int_a^b K_1^{(p)}(t, s) K_2^{(q)}(s, t)\, ds\, dt;$$

le dernier terme est nul, comme on le voit en intégrant d'abord

par rapport à la variable t, et l'on en déduit que la $n^{\text{ième}}$ trace du noyau $S(x, y)$ est égale à la somme des traces de même rang de K_1 et de K_2. On a donc (n° 566)

$$(56) \qquad \frac{\mathcal{D}'(\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} = \frac{D'_1(\lambda)}{D_1(\lambda)} + \frac{D'_2(\lambda)}{D_2(\lambda)},$$

et par suite $\mathcal{D}(\lambda) = D_1(\lambda)\, D_2(\lambda)$.

Remarque. — Si les deux noyaux sont orthogonaux, la relation (56) se déduit tout de suite de la formule (55), combinée avec la relation (15) qui donne la dérivée logarithmique de $D(\lambda)$. Dans ce cas, le théorème s'étend à la somme d'un nombre quelconque ce noyaux, orthogonaux deux à deux, auxquels s'applique la solution de Fredholm.

575. **Application aux fonctions fondamentales.** — Toute fonction $\varphi(x)$, non identiquement nulle, satisfaisant à une relation

$$(57) \qquad \varphi(x) = c \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\, ds,$$

est une fonction fondamentale du noyau $K(x, y)$. D'après la formule générale qui donne la solution de l'équation de seconde espèce, le nombre c doit être un pôle de la résolvante pour que cette équation admette une solution nulle. Réciproquement, *à tout pôle de la résolvante correspond au moins une fonction fondamentale.*

La proposition a déjà été établie pour un noyau borné (n° 568). La démonstration suivante, qui repose sur l'équation fonctionnelle de la résolvante, est générale. Soit $\lambda = c$ un pôle d'ordre n du noyau résolvant, et soit

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{B_n(x, y)}{(\lambda - c)^n} + \frac{B_{n-1}(x, y)}{(\lambda - c)^{n-1}} + \dots$$
$$+ \frac{B_1(x, y)}{\lambda - c} + A_0(x, y) + A_1(x, y)(\lambda - c) + \dots$$

le développement de ce noyau dans le domaine du pôle. Posons $\lambda = c + h$, et remplaçons $\Gamma(x, y; c + h)$ par son développement dans les deux membres de l'équation fonctionnelle (60)

du n° 559; il vient

$$(58)\quad \frac{B_n(x,y)}{h^n}+\frac{B_{n-1}(x,y)}{h^{n-1}}+\ldots+\frac{B_1(x,y)}{h}+A_0(x,y)+A_1(x,y)h+\ldots$$
$$=K(x,y)+(c+h)\int_a^b K(x,t)\left[\frac{B_n(t,y)}{h^n}+\ldots\right]dt.$$

En égalant les coefficients de h^{-n} dans les deux membres, on obtient la relation

$$(59)\qquad B_n(x,y)=c\int_a^b K(x,t)B_n(t,y)\,dt,$$

qui montre que $B_n(x,y_1)$ est une fonction fondamentale du noyau correspondant à la valeur singulière c, quelle que soit la valeur constante y_1 attribuée à y. On verrait de même, en se servant de la seconde équation fonctionnelle (61) que $B_n(x_1,y)$ est une solution de l'équation homogène associée

$$\psi(y)=c\int_a^b K(t,y)\psi(t)\,dt,$$

quand on attribue à x_1 une valeur constante quelconque.

On a vu plus haut (n° 568) qu'à un pôle c de la résolvante ne correspondent qu'un nombre *fini* de fonctions fondamentales linéairement distinctes, si le noyau est borné. Cette propriété se déduit aussi facilement du théorème B. Soit, en effet, $\lambda=c$ une racine d'ordre m de multiplicité de $D(\lambda)=0$, et soient φ_1, φ_2, ..., φ_p des fonctions fondamentales linéairement distinctes correspondant à ce pôle; nous allons montrer qu'on ne peut avoir $p>m$. Soit $\pi_1(x)$ une fonction telle qu'on ait $c(\varphi_1\pi_1)=1$. Posons $K(x,y)=\varphi_1(x)\pi_1(y)+K_1$; les deux noyaux $\varphi_1(x)\pi_1(y)$ et $K_1(x,y)$ sont semi-orthogonaux, d'après la condition à laquelle satisfait la fonction π_1. Or, la fonction déterminante relative au noyau $\varphi_1(x)\pi_1(y)$ est $1-\frac{\lambda}{c}$ (n° 571); il s'ensuit que l'équation déterminante $D_1(\lambda)=0$ relative au noyau $K_1(x,y)$ admet la racine $\lambda=c$ à l'ordre $m-1$ de multiplicité. Or, il est facile de former $p-1$ fonctions fondamentales linéairement distinctes pour ce noyau $K_1(x,y)$. En effet, si l'on pose $\psi_r(x)=\varphi_r(x)+c_r\varphi_1(x)$, on a, en tenant compte de ce que φ_1 et φ_r sont des fonctions fon-

damentales pour $K(x, y)$,

$$c\int_a^b \psi_r(s)K_1(x, s)\,ds = \psi_r(x) - \varphi_1(x)\left[c\int_a^b \pi_1(s)\varphi_r(s)\,ds + c_r\right];$$

en choisissant c_r de façon que le coefficient de $\varphi_1(x)$ soit nul, et faisant successivement $r = 2, 3, \ldots, p$, on obtiendra bien $p - 1$ fonctions fondamentales distinctes pour le noyau $K_1(x, y)$. En continuant de la sorte, on arriverait à un noyau pour lequel c ne serait pas une valeur singulière, et qui admettrait cependant une fonction fondamentale correspondant à c, si l'on avait $p > m$.

Le théorème s'étend à tout noyau non borné pourvu qu'on puisse en déduire, par un nombre *fini* d'itérations, un noyau auquel la solution de Fredholm est applicable. Soit c une valeur singulière pour le noyau $K(x, y)$ et $\varphi(x)$ une fonction fondamentale correspondante. De la relation

$$\varphi(s) = c\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt$$

on tire, en multipliant les deux membres par $cK(x, s)$ et intégrant,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= c\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds \\ &= c^2\int_a^b\int_a^b K(x, s)K(s, t)\varphi(t)\,ds\,dt = c^2\int_a^b K^{(2)}(x, t)\varphi(t)\,dt,\end{aligned}$$

et l'on vérifie aisément par voie de récurrence qu'on a, quel que soit p,

$$\varphi(x) = c^p\int_a^b K^{(p)}(x, s)\varphi(s)\,ds.$$

Donc, *toute fonction fondamentale pour un noyau* $K(x, y)$, *correspondant à un pôle c de la résolvante, est aussi une fonction fondamentale pour le noyau* $K^{(p)}(x, y)$ *et le pôle correspondant de la nouvelle résolvante est* c^p [1].

---

[1] La réciproque n'est pas toujours exacte. Soit $\psi(x)$ une solution de l'équation

(E) $$\psi(x) = c^p\int_a^b K^{(p)}(x, s)\,\psi(s)\,ds:$$

posons

$$\pi_\nu(x) = \psi(x) + c\omega^\nu\int_a^b K(x, s)\,\psi(s)\,ds + \ldots + c^{p-1}\omega^{\nu(p-1)}\int_a^b K^{(p-1)}(x, s)\,\psi(s)\,ds,$$

Si la solution de Fredholm est applicable au noyau itéré $K^{(p)}(x, y)$, il n'y a donc qu'un nombre fini de fonctions fondamentales correspondant à un pôle c du noyau résolvant.

Étant donnés plusieurs noyaux $K_1(x, y)$, ..., $K_p(x, y)$, orthogonaux deux à deux, la somme

$$S(x, y) = K_1(x, y) + \ldots + K_p(x, y)$$

sera appelée le *noyau résultant*, et K_1, K_2, ..., K_p seront dits les *noyaux composants*. Tout pôle c de la résolvante du noyau résultant est un pôle pour l'une au moins des résolvantes des noyaux composants. Réciproquement, tout pôle de la résolvante d'un des noyaux composants est aussi un pôle pour la résolvante du noyau résultant. D'une façon générale, nous dirons qu'*une fonction* $\varphi(x)$ *est orthogonale à droite à un noyau* $K(x, y)$, si l'on a, quel que soit x, $\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = 0$. Si deux noyaux $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ sont orthogonaux, toute fonction

$$K_1(\varphi) = \int_a^b K_1(x, t)\varphi(t)\,dt$$

est orthogonale à droite au noyau $K_2(x, y)$. Nous pouvons écrire, en effet,

$$\int_a^b K_2(x, s)K_1[\varphi(s)]\,ds = \int_a^b \int_a^b K_2(x, s)K_1(s, t)\varphi(t)\,ds\,dt,$$

et le second membre est nul, d'après l'orthogonalité des noyaux.

ν étant l'un des nombre 0, 1, ..., $p-1$, et ω étant une racine primitive de l'équation $\omega^p = 1$. On vérifie aisément que $\pi_\nu(x)$ est une solution de l'équation

$$(e) \qquad \pi_\nu(x) = c\omega^\nu \int_a^b K(x, s)\pi_\nu(s)\,ds.$$

D'ailleurs les fonctions π_0, π_1, ..., π_{p-1} ne peuvent être toutes nulles, car leur somme $\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_{p-1}$ est égale à $p\psi(x)$. Toute solution de l'équation (E) fournit donc une solution de l'une au moins des équations (e_ν), mais ne donne pas forcément une solution de l'équation (e_0) (*voir* plus loin, n° 579).

Cependant, si l'on a choisi le nombre entier p de façon qu'aucun des nombres $c\omega$, $c\omega^2$, ..., $c\omega^{p-1}$ ne soit un pôle de la résolvante relative au noyau $K(x, y)$ (ce qui est toujours possible d'une infinité de manières), les équations (e_ν), où $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$, n'admettent pas d'autre solution que $\pi_\nu = 0$; $\pi_0(x)$ est donc identique à $p\psi(x)$, et les équations (E) et (e_0) admettent les mêmes solutions

Il en résulte en particulier que, *si deux noyaux* K_1 *et* K_2 *sont orthogonaux, toute fonction fondamentale pour l'un des noyaux est orthogonale à l'autre noyau.* En effet, soit $\varphi(x)$ une fonction fondamentale du noyau $K_1(x, y)$; cette fonction est de la forme $cK_1(\varphi)$ et, par suite, elle est orthogonale à $K_2(x, y)$, d'après la remarque précédente.

Cela étant, soient $K_1, K_2, \ldots, K_p$ des noyaux orthogonaux deux à deux, $S(x, y)$ leur somme, c une valeur singulière pour le noyau $K_1(x, y)$ par exemple, $\varphi(x)$ une fonction fondamentale correspondante; $\varphi(x)$ est orthogonale aux autres noyaux K_2, $K_3, \ldots, K_p$ et, par suite, on a

$$\varphi(x) = c\int_a^b S(x, s)\varphi(s)\,ds,$$

d'où résulte la proposition suivante :

Tout pôle de la résolvante relative à un des noyaux composants est aussi un pôle pour la résolvante du noyau résultant, et toute fonction fondamentale d'un des noyaux composants est une fonction fondamentale pour le noyau résultant.

Pour examiner si la réciproque est vraie, supposons $p = 2$. Soit $\varphi(x)$ une fonction fondamentale pour le noyau

$$S(x, y) = K_1(x, y) + K_2(x, y),$$

correspondant à un pôle c. On a, par hypothèse,

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

en désignant par $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ les deux expressions $cK_1(\varphi)$, $cK_2(\varphi)$; mais les deux noyaux K_1 et K_2 étant orthogonaux, $\varphi_1(x)$ est orthogonale au noyau $K_2(x, y)$ et $\varphi_2(x)$ au noyau $K_1(x, y)$, ce qui permet d'écrire les relations précédentes, en remplaçant $\varphi(x)$ par $\varphi_1 + \varphi_2$,

$$\varphi_1(x) = cK_1(\varphi_1), \qquad \varphi_2(x) = cK_2(\varphi_2).$$

L'une au moins des fonctions φ_1, φ_2 n'étant pas nulle, il s'ensuit que c est un pôle pour l'une au moins des résolvantes des noyaux K_1 et K_2. Si c n'est un pôle que pour l'une d'elles, pour la première par exemple, on a $\varphi_2 = 0$, $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi(x)$ est une fonction fonda-

mentale pour $K_1(x, y)$. Si c est un pôle pour les résolvantes des deux noyaux, $\varphi(x)$ est la somme de deux fonctions fondamentales. Le raisonnement s'étend sans peine à un nombre quelconque de noyaux orthogonaux deux à deux, et en résumé *toute fonction fondamentale du noyau résultant est une fonction fondamentale pour un des noyaux composants ou s'obtient en ajoutant les fonctions fondamentales des noyaux composants qui correspondent à un pôle commun de leurs résolvantes.*

En particulier, si les résolvantes des noyaux composants pris deux à deux n'ont pas de pôle commun, on obtient toutes les fonctions fondamentales du noyau résultant en prenant l'ensemble des fonctions fondamentales des noyaux composants.

576. **Noyaux principaux** [1]. — On a déjà remarqué l'importance de l'équation fonctionnelle (n° 560)

$$(60)\quad \Gamma(x, y; \lambda) - \Gamma(x, y; \mu) = (\lambda - \mu)\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\Gamma(t, y; \mu)\,dt$$

qui caractérise les noyaux résolvants. Nous allons l'appliquer à l'étude de la résolvante dans le domaine d'un pôle $\lambda = c$. Le développement de la résolvante dans la domaine de ce pôle étant écrit comme plus haut (n° 575), l'équation (60) devient

$$(61)\quad \sum_{i=1}^{n} B_i(x, y)\left\{\left(\frac{1}{\lambda - c}\right)^i - \left(\frac{1}{\mu - c}\right)^i\right\} + \sum_{p=1}^{+\infty} A_p(x, y)\left\{(\lambda - c)^p - (\mu - c)^p\right\}$$
$$= (\lambda - \mu)\int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} B_i(x, t)\left(\frac{1}{\lambda - c}\right)^i + \sum_{p=0}^{+\infty} A_p(x, t)(\lambda - c)^p\right] \times \left[\sum_{i=1}^{n} B_i(t, y)\left(\frac{1}{\mu - c}\right)^i + \sum_{p=0}^{+\infty} A_p(t, y)(\mu - c)^p\right] dt,$$

[1] Dans mon Mémoire des *Annales de Toulouse*, 1908, j'avais fait l'étude des noyaux principaux en m'appuyant presque uniquement sur les théorèmes A et B. On abrège beaucoup l'exposition, comme l'a déjà fait M. Lalesco, en se servant davantage de l'équation fonctionnelle du noyau résolvant. La méthode que je suis est un peu différente de celle de M. Lalesco, et ne suppose pas connue la théorie des diviseurs élémentaires.

ce que l'on peut écrire en posant $\lambda - c = h$, $\mu - c = k$ et divisant par $h - k$,

$$(61\ bis)\qquad -\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(x, y)}{hk} \left\{ \frac{1}{h^{i-1}} + \frac{1}{h^{i-2}} \frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{k^{i-1}} \right\}$$

$$+\sum_{p=1}^{+\infty} A_p(x, y) \left\{ h^{p-1} + h^{p-2} k + \ldots + k^{p-1} \right\}$$

$$= \int_a^b \left[\sum_1^n \frac{1}{h^i} B_i(x, t) + \sum_0^{+\infty} A_p(x, t) h^p \right]$$

$$\times \left[\sum_1^n \frac{1}{k^i} B_i(t, y) + \sum_0^{+\infty} A_p(t, y) k^p \right] dt.$$

La relation précédente doit être vérifiée quels que soient h et k. Or, le premier membre ne renferme aucun terme en $\frac{k^p}{h^i}$ ou $\frac{h^p}{k^i}$, p étant nul ou positif; il faut donc que tous ces termes aient des coefficients nuls dans le second membre, ce qui exige que l'on ait

$$(62)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b B_i(x, t) A_p(t, y)\, dt = 0, \qquad \int_a^b B_i(t, y) A_p(x, t)\, dt = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \left(\begin{array}{l} p = 0, 1, 2, \ldots, \infty \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right). \end{array} \right.$$

En désignant par $\gamma(x, y; \lambda)$ la partie principale du noyau résolvant et par $H(x, y; \lambda)$ la partie régulière, les relations (62) prouvent qu'on a, quels que soient λ et μ,

$$(63)\qquad \int_a^b \gamma(x, t; \lambda) H(t, y; \mu)\, dt = 0, \qquad \int_a^b H(x, t; \mu) \gamma(t, y; \lambda)\, dt = 0,$$

pourvu toutefois que le développement de $H(x, y; \mu)$, suivant les puissances de $\mu - c$, soit convergent. Mais la fonction

$$H(x, y; \mu) = \Gamma(x, y; \mu) - \gamma(x, y; \mu)$$

est une fonction méromorphe de μ, et par suite, les relations (63) subsistent pour toutes les valeurs de λ et de μ, et en particulier pour $\lambda = \mu = 0$. Posons pour abréger $k(x, y) = \gamma(x, y; 0)$ et $H(x, y) = K(x, y) - k(x, y)$; le noyau $K(x, y)$ est ainsi décomposé en deux noyaux orthogonaux $k(x, y)$ et $H(x, y)$ dont le premier $k(x, y)$ s'obtient en faisant $\lambda = 0$ dans la partie principale de la résolvante relative au pôle $\lambda = c$.

Pour achever l'identification des deux membres de la formule (61 *bis*), il faut égaler d'une part les coefficients des diverses puissances de $\frac{1}{h}$ et de $\frac{1}{k}$, qui proviennent uniquement de la partie principale, d'autre part les coefficients des puissances positives de h et de k, qui proviennent uniquement de la partie régulière. On pourrait obtenir ces deux groupes de formules indépendamment les unes des autres, en supposant que la partie régulière est nulle, ou au contraire, en ne tenant pas compte de la partie principale. Il est clair que ces deux groupes de formules peuvent être condensées en deux formules uniques

$$(64)\quad \gamma(x, y; \lambda) - \gamma(x, y; \mu) = (\lambda - \mu)\int_a^b \gamma(x, t; \lambda)\,\gamma(t, y; \mu)\,dt,$$

$$(65)\quad \mathrm{H}(x, y; \lambda) - \mathrm{H}(x, y; \mu) = (\lambda - \mu)\int_a^b \mathrm{H}(x, t; \lambda)\,\mathrm{H}(t, y; \mu)\,dt,$$

dont la première exprime que la résolvante relative au noyau $k(x, y)$ est précisément la partie principale $\gamma(x, y; \lambda)$ de la résolvante $\Gamma(x, y; \lambda)$ dans le domaine du pôle c. La seconde exprime, au contraire, que la résolvante du noyau $\mathrm{H}(x, y)$ est identique à la partie régulière de la résolvante $\Gamma(x, y; \lambda)$ dans le domaine de ce pôle. Le noyau $k(x, y)$ est appelé le *noyau principal* relatif au pôle c; il suffit de connaître ce noyau principal pour déterminer les fonctions fondamentales correspondant à la valeur c, puisque c n'est pas une valeur singulière pour le noyau H.

A chaque pôle de la résolvante correspond ainsi un noyau principal. *Deux noyaux principaux correspondant à deux pôles différents sont orthogonaux.* Soient $k_1(x, y)$ et $k_2(x, y)$ les noyaux principaux pour les deux pôles c_1 et c_2; $k_1(x, y)$ est orthogonal au noyau $\mathrm{H}_1(x, y) = \mathrm{K}(x, y) - k_1(x, y)$. La résolvante $\gamma_1(x, y; \lambda)$ étant régulière dans le domaine du point $\lambda = c_2$, il est clair que $k_2(x, y)$ est identique au noyau principal qu'on déduirait du noyau H_1. Posons $\mathrm{H}_1(x, y) = \mathrm{H}_2 + k_2$, et soient

$$\Gamma_2(x, y; \lambda), \quad \gamma_2(x, y; \lambda)$$

les résolvantes pour ces deux noyaux; $k_1(x, y)$ est orthogonal à la résolvante $\Gamma_2(x, y; \lambda) + \gamma_2(x, y; \lambda)$ du noyau $\mathrm{H}_1(x, y)$ et l'on a

$$\int_a^b k_1(x, t)[\Gamma_2(t, y; \lambda) + \gamma_2(t, y; \lambda)]\,dt = 0.$$

Or, l'intégrale $\int_a^b k_1(x, t)\gamma_2(t, y; \lambda)\,dt$ est une fonction rationnelle de λ admettant le seul pôle $\lambda = c_2$ et nulle à l'infini, tandis que l'intégrale $\int_a^b k_1(x, t)\Gamma_2(t, y; \lambda)\,dt$ est une fonction holomorphe de λ dans le domaine de $\lambda = c_2$. Il faut donc que ces deux intégrales soient nulles l'une et l'autre, de sorte que $k_1(x, y)$ est orthogonal aux deux noyaux k_2 et H_2.

577. **Structure d'un noyau principal.** — Pour qu'une fonction $K(x, y)$ soit un noyau principal, il faut que la résolvante relative à ce noyau soit une fonction rationnelle de λ ayant un seul pôle et *nulle à l'infini*. Cherchons d'abord dans quel cas la résolvante aura un seul pôle du premier ordre. Elle devra être de la forme

$$\frac{K(x, y)}{1 - \frac{\lambda}{c}} = K(x, y)\left(1 + \frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda^2}{c^2} + \ldots + \frac{\lambda^p}{c^p} + \ldots\right),$$

ce qui exige qu'on ait d'une façon générale (n° 559)

$$c^{p-1} K^{(p)}(x, y) = K(x, y) \qquad (p = 2, 3, \ldots).$$

Ces conditions, on le voit aisément, se réduisent à la première

$$(66) \qquad K(x, y) = c\int_a^b K(x, s)\,K(s, y)\,ds,$$

qui exprime que $K(x, y_0)$ est une fonction fondamentale du noyau $K(x, y)$, relative au pôle c, quelle que soit la valeur constante y_0 attribuée à y. Puisqu'il n'existe qu'un nombre fini de fonctions fondamentales distinctes, il s'ensuit que $K(x, y)$ est une combinaison linéaire de p fonctions linéairement distinctes $\varphi_i(x)$, dont les coefficients dépendent de y

$$(67) \qquad K(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + \varphi_p(x)\psi_p(y),$$

les fonctions $\psi_1(y), \ldots, \psi_p(y)$ étant aussi linéairement distinctes. Si l'on remplace $K(x, y)$ par l'expression (67) dans la relation (66), on voit que les fonctions φ_i, ψ_k doivent vérifier les relations

$$(\varphi_i\psi_k) = 0 \quad \text{pour } i \neq k, \qquad c(\varphi_i\psi_i) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

de sorte que les fonctions $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$, $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p)$ forment un système biorthogonal. Inversement, de tout système biorthogonal on peut déduire un noyau $K(x, y)$ répondant à la question. Remarquons que $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$ sont les p solutions de l'équation homogène associée

$$\psi(y) = c\int_a^b K(t, y)\psi(t)\,dt,$$

et que la fonction déterminante $D(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^p$ (n° 571).

Avant de traiter le cas général, nous démontrerons un lemme.

Lemme. — *Toute solution de l'équation intégrale*

$$(68) \qquad \varphi(x, y) - c\int_a^b K(x, s)\varphi(x, y)\,ds = \sum_{i=1}^n X_i(x)Y_i(y)$$

est de la même forme que le second membre.

En effet, soit $\varphi(x, y)$ une solution quelconque de cette équation. Les n fonctions $Y_i(y)$ étant supposées linéairement distinctes, donnons à y n valeurs particulières $y_1, y_2, \ldots, y_n$ telles que le déterminant formé avec les éléments $Y_i(y_k)$ ne soit pas nul. Des n équations obtenues on peut tirer $X_1, \ldots, X_n$; on en tire, par exemple,

$$X_1(x) = \Phi_1(x) - c\int_a^b K(x, s)\Phi_1(s)\,ds,$$

$\Phi_1(x)$ étant de la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i\varphi(x, y_i)$, les α_i étant des coefficients constants. De la fonction $\varphi(x, y)$ on déduirait de même une solution $\Phi_i(x)$ de l'équation

$$\Phi_i(x) - c\int_a^b K(x, s)\Phi_i(s)\,ds = X_i(x),$$

et par suite une solution $\Phi(x, y) = \Sigma\Phi_i(x)Y_i(y)$ de l'équation (68), qui est bien de la forme voulue. Toute autre solution est de la forme $\Phi(x, y) + \psi(x, y)$, $\psi(x, y)$ étant une solution de l'équation homogène

$$\psi(x, y) = c\int_a^b K(x, s)\psi(s, y)\,ds.$$

Mais toutes les solutions de cette équation, considérées comme fonctions de x, sont des combinaisons linéaires d'un nombre *fini*, (pouvant être nul) de fonctions de x; toute solution de l'équation (68) est donc bien de la forme annoncée.

Cela posé, reprenons le calcul d'identification du n° 575. Nous voyons d'abord que $B_n(x,y)$, qui est égal à une fonction fondamentale du noyau $K(x,y)$, quand on attribue à y une valeur constante quelconque, est de la forme

$$(69) \qquad B_n(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + \varphi_r(x)\psi_r(y),$$

puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de fonctions fondamentales correspondant au nombre c. En égalant les coefficients de h^{1-n} dans les deux membres de l'identité (58), on trouve la relation

$$B_{n-1}(x,y) = c\int_a^b K(x,t)B_{n-1}(t,y)\,dt + \int_a^b K(x,t)B_n(t,y)\,dt;$$

$B_n(x,y)$ étant de la forme (69), il résulte du lemme précédent que $B_{n-1}(x,y)$ est de la même forme. D'une façon générale, on a la relation de récurrence

$$B_{n-i}(x,y) = c\int_a^b K(x,t)B_{n-i}(t,y)\,dt + \int_a^b K(x,t)B_{n-i+1}(t,y)\,dt;$$

d'où l'on déduit de proche en proche que tous les coefficients de la partie principale sont de la même forme et par suite le noyau principal lui-même est de cette forme $\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \ldots + \varphi_m\psi_m$, les m fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ pouvant être supposées linéairement distinctes, ainsi que les m fonctions $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, ..., $\psi_m(y)$. On a vu plus haut (n° 571) que le noyau résolvant correspondant n'est nul pour λ infini que s'il n'existe aucune combinaison linéaire des φ_i qui soit orthogonale à tous les ψ_k.

La fonction déterminante $D(\lambda)$, déduite de ce noyau, est alors un polynome de degré m, dont toutes les racines sont des pôles de la résolvante (n° 565). Pour que cette résolvante n'admette que le pôle $\lambda = c$, il faut donc qu'on ait $D(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^m$. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car la résolvante est alors le quotient d'un polynome de degré $m - 1$ en λ par $D(\lambda)$ (n° 571).

Toute combinaison linéaire à coefficients constants des m fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ est une *fonction principale* du noyau $K(x,y)$, relativement au pôle c de la résolvante.

Tout groupe de m fonctions principales linéairement distinctes est un *groupe principal*. Les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, et celles qu'on obtient par des combinaisons linéaires à coefficients constants, sont les *fonctions principales associées*. Le noyau principal étant mis sous la forme $\varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_m(x)\psi_m(y)$, on dira que les deux groupes de fonctions $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ et $(\psi_1, \ldots, \psi_m)$ sont *deux groupes principaux associés*.

Il y a évidemment une infinité de systèmes de groupes principaux associés, puisque le noyau principal peut être mis d'une infinité de façons sous la forme précédente. Tout système de m combinaisons linéaires distinctes des m fonctions $\varphi_i(x)$ peut être pris pour groupe principal, et le groupe principal associé est déterminé par ce choix (n° 571). On va profiter de cette indétermination pour mettre le noyau principal sous une forme qui met en évidence les propriétés de ce noyau.

578. Réduction à une forme canonique. — En résumé, tout noyau principal $k(x, y)$, relatif à un pôle de la résolvante, est de la forme

$$(70)\qquad k(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_m(x)\psi_m(y),$$

$\varphi_1(x), \ldots, (\varphi_m(x)$ étant m fonctions de x linéairement distinctes, $\psi_1(y), \ldots, \psi_m(x)$ étant m fonctions de y linéairement distinctes; de plus, ces fonctions doivent être telles que le déterminant

$$(71)\qquad D_m(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - a_{11}\lambda & -a_{12}\lambda & \ldots & -a_{1m}\lambda \\ -a_{21}\lambda & 1 - a_{22}\lambda & \ldots & -a_{2m}\lambda \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ -a_{m1}\lambda & -a_{m2}\lambda & \ldots & 1 - a_{mm}\lambda \end{vmatrix} \qquad \left(a_{ik} = \int_a^b \varphi_i(x)\psi_k(x)\,dx\right)$$

soit identique à $\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^m$. Or, on est conduit à une équation équivalente à l'équation $D_m(\lambda) = 0$ dans l'étude de la question suivante. D'après la signification des coefficients a_{ik}, on a

$$(72)\qquad k[\varphi_i(x)] = a_{i1}\varphi_1(x) + \ldots + a_{im}\varphi_m(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

si donc on se propose de déterminer une combinaison linéaire à coefficients constants $\Phi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(x)$, telle qu'on ait

$$(73)\qquad k[\Phi(x)] = s\Phi(x),$$

s étant une constante, l'équation à laquelle on est conduit pour déterminer le facteur s n'est autre, on le voit aisément, que

$$(74) \qquad F(s) = (-1)^m s^m D_m\left(\frac{1}{s}\right) = \left(\frac{1}{c} - s\right)^m = 0.$$

Les équations (72) définissent donc une substitution linéaire dont l'équation caractéristique est $\left(\frac{1}{c} - s\right)^m = 0$, et nous pouvons appliquer à cette substitution les résultats connus sur la réduction d'une substitution linéaire à une forme canonique (II, n°s 409-410). On a vu qu'il existait m combinaisons linéaires distinctes des fonctions φ_i qui subissent une substitution linéaire de forme canonique quand on leur applique l'opération $k(\quad)$. Pour ne pas multiplier les notations, nous supposerons qu'on a pris pour φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$ ces fonctions principales elles-mêmes. Elles se partagent alors en un certain nombre de groupes; les fonctions φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$ formant un de ces groupes satisfont aux relations

$$(75) \qquad ck(\varphi_1) = \varphi_1, \qquad ck(\varphi_2) = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad \ldots, \qquad ck(\varphi_p) = \varphi_{p-1} + \varphi_p,$$

et l'on a des formules analogues pour chacun des groupes. Nous dirons que les m fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ forment un *système canonique* de fonctions principales, et que le noyau $k(x, y)$ est mis sous forme canonique. Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ d'un même groupe forment un *groupe canonique*, et les fonction ψ_1, $\psi_2, \ldots, \psi_p$ un groupe canonique associé.

Supposons, par exemple, qu'il y ait deux groupes canoniques, contenant respectivement p et q fonctions $(p + q = m)$; soient $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ et $(\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_q)$ ces deux groupes de fonctions. Le noyau étant mis sous la forme

$$k(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + \varphi_p(x)\psi_p(y) + \varphi'_1(x)\psi'_1(y) + \ldots + \varphi'_q(x)\psi'_q(y),$$

les fonctions $\varphi'_i(x)$, $\psi'_i(y)$ vérifient des relations toutes pareilles aux précédentes

$$(75)' \qquad ck(\varphi'_1) = \varphi'_1, \qquad ck(\varphi'_2) = \varphi'_1 + \varphi'_2, \qquad \ldots, \qquad ck(\varphi'_q) = \varphi'_{q-1} + \varphi'_q.$$

Les relations (75) et (75)′ exigent que les fonctions φ_i soient orthogonales aux fonctions ψ'_j et que les fonctions ψ_i soient ortho-

gonales aux fonctions φ'_i, de sorte que les deux noyaux

$$k_1(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + \varphi_p(x)\psi_p(y),$$
$$k_2(x, y) = \varphi'_1(x)\psi'_1(y) + \ldots + \varphi'_q(x)\psi'_q(y)$$

sont orthogonaux. Chacun de ces noyaux est dit un *noyau canonique*. La méthode est générale et, par suite, *tout noyau principal est la somme d'un certain nombre de noyaux canoniques orthogonaux deux à deux*. Chacun de ces noyaux canoniques est formé avec les fonctions principales d'un des groupes canoniques.

Dans les relations (75), on peut remplacer le noyau $k(x, y)$ par le noyau $k_1(x, y)$, puisque $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ sont orthogonales à tous les autres noyaux canoniques dont se compose $k(x, y)$. En remplaçant $k_1(x, y)$ par son expression, on voit que les relations (75) ne peuvent être vérifiées que lorsque les conditions suivantes sont remplies : $\varphi_1(x)$ doit être orthogonal à toutes les fonctions φ_i, sauf à ψ_1, φ_2 est orthogonal à tous les ψ_i, sauf à ψ_1 et à ψ_2, ..., enfin φ_p est orthogonal aux ψ_i, sauf à ψ_{p-1} et ψ_p; de plus, on a les relations

$$c(\varphi_1\psi_1) = 1, \qquad c(\varphi_2\psi_1) = 1, \qquad c(\varphi_2\psi_2) = 1, \qquad \ldots,$$
$$c(\varphi_p\psi_{p-1}) = c(\varphi_p\psi_p) = 1.$$

La fonction déterminante $d_1(\lambda)$ correspondant au noyau $k_1(x, y)$ est, d'après la formule (71), $\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^p$, et ce noyau possède une seule fonction fondamentale $\varphi_1(x)$; $\psi_p(x)$ est en même temps une fonction fondamentale pour le noyau associé. Il y a donc autant de fonctions fondamentales distinctes que le noyau principal renferme de noyaux canoniques. Lorsqu'un noyau canonique se réduit à un seul terme $\varphi_1(x)\psi_1(y)$, φ_1 et ψ_1 sont deux fonctions fondamendales associées. Dans le cas où $\lambda = c$ est un pôle simple de la résolvante, le noyau principal se décompose en m noyaux canoniques de cette espèce (n° 577). Si $\lambda = c$ est un pôle multiple, il y a au moins un des noyaux canoniques qui renferme plusieurs fonctions principales. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, la fonction fondamentale $\varphi(x)$ provenant de ce noyau est orthogonale à toutes les fonctions fondamentales de l'équation

associée correspondant à ce pôle. Donc, *pour qu'un pôle de la résolvante soit simple, il faut et il suffit qu'à toute fonction fondamentale* $\Phi(x)$, *correspondant à ce pôle, on puisse faire correspondre une solution fondamentale* $\Psi(x)$ *de l'équation associée qui ne soit pas orthogonale à* $\Phi(x)$.

379. **Résolvante canonique.** — Pour trouver la partie principale de la résolvante dans le domaine d'un pôle c, il suffit de faire la somme des résolvantes relatives aux différents noyaux canoniques qui composent le noyau principal. Pour former la résolvante relative au noyau canonique

$$k(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + \varphi_p(x)\psi_p(y),$$

nous devons former les noyaux itérés successifs. D'après les valeurs des intégrales $(\varphi_i\psi_j)$, on voit immédiatement qu'on a

$$\begin{aligned} ck^{(2)}(x, y) = \quad & \varphi_1(x)\{\psi_1(y) + \psi_2(y)\} + \varphi_2(x)\{\psi_2(y) + \psi_3(y)\} + \ldots \\ & + \varphi_{p-1}(x)\{\psi_{p-1}(y) + \psi_p(y)\} + \varphi_p(x)\psi_p(y) \end{aligned}$$

et l'on établit ensuite par récurrence qu'on a

$$\begin{aligned} c^n k^{(n+1)}(x, y) = \quad & \varphi_1(x)\{\psi_1(y) + C_n^1 \psi_2(y) + C_n^2 \psi_3(y) + \ldots\} + \ldots \\ & + \varphi_i(x)\{\psi_i(y) + C_n^1 \psi_{i+1}(y) + C_n^2 \psi_{i+2}(y) + \ldots\} + \ldots \\ & + \varphi_p(x)\psi_p(y), \end{aligned}$$

en posant $C_n^h = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-h+1)}{1, 2\ldots h}$. On s'arrête dans le coefficient de $\varphi_i(x)$ lorsqu'on est conduit à écrire des fonctions $\psi_{i+h}(y)$ d'indice supérieur à p. En portant ces expressions des noyaux itérés dans le développement du noyau résolvant suivant les puissances de λ, le coefficient de $\varphi_i(x)\psi_{i+h}(y)$ $(h > 0)$ sera donc

$$\sum_{n=h}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^n C_n^h,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\lambda}{c}\right)^h \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^{-(h+1)}$$

La résolvante $\gamma(x, y; \lambda)$ du noyau canonique $k(x, y)$ a donc pour

expression

$$\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c}}(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2+\ldots+\varphi_p\psi_p)$$
$$+\frac{\lambda}{c\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)^2}(\varphi_1\psi_2+\varphi_2\psi_3+\ldots+\varphi_{p-1}\psi_p)+\ldots$$
$$+\frac{\lambda^h}{c^h\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)^{h+1}}\{\varphi_1\psi_{h+1}+\ldots+\varphi_{p-h}\psi_p\}+\ldots+\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{p-1}\frac{\varphi_1\psi_p}{\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)^p},$$

et c est un pôle d'ordre p pour cette résolvante. Si l'on écrit ce développement sous la forme habituelle en posant $\lambda = c+\rho$, le coefficient de $\left(\frac{1}{\rho}\right)^p$ est, à un facteur constant près, $\varphi_1(x)\psi_p(y)$ (*cf.* n° 575). On déduit de cette expression de la résolvante un certain nombre de conséquences.

Pour un pôle c de la résolvante d'un noyau quelconque $K(x, y)$, il y a lieu de distinguer le *rang* r, c'est-à-dire le nombre des fonctions fondamentales distinctes correspondantes, l'*ordre* p de ce pôle et enfin le *degré* m de multiplicité de la racine $\lambda = c$ de l'équation $D(\lambda) = 0$, lorsque la solution de Fredholm est applicable à ce noyau. Le rang r est égal au nombre des noyaux canoniques qui composent le noyau principal correspondant à ce pôle: si ces noyaux canoniques comprennent respectivement n_1, n_2, ..., n_r fonctions principales, l'ordre p du pôle est égal au plus grand de ces nombres, et le degré m est égal à la somme de ces nombres $n_1+n_2+\ldots+n_r$. Entre ces trois nombres r, m, p, on a donc les inégalités suivantes, qui résultent de leurs relations mutuelles :

$$p+r-1 \leqq m \leqq rp.$$

Si $p=1$, on a $m=r$; s'il y a un seul noyau canonique, $r=1$, $p=m$. Dans tout autre cas, on a $p+r-1 < rp$.

Remarques. — 1° Le résidu de la résolvante canonique écrite plus haut est égal à

$$\varphi_1(x)\{\psi_1(y)-\psi_2(y)+\psi_3(y)-\ldots\pm\psi_p(y)\}$$
$$+\varphi_2(x)\{\psi_2(y)-\psi_3(y)+\ldots\}+\ldots+\varphi_p\psi_p;$$

les deux groupes de fonctions principales qui y figurent forment

un système biorthogonal. Tout noyau principal étant une somme de noyaux canoniques, le résidu relatif à un pôle c d'ordre quelconque de la résolvante est donc composé avec des fonctions principales formant un système biorthogonal. Si le pôle est simple, ces fonctions principales se confondent avec les fonctions fondamentales (nº 577).

2º L'expression obtenue plus haut pour la résolvante $\gamma(x, y; \lambda)$ d'un noyau canonique $k(x, y)$, jointe aux valeurs des intégrales $(\varphi_i \psi_k)$, montre immédiatement qu'on a

$$\int_a^b \gamma(s, s; \lambda)\, ds = \frac{p}{c-\lambda},$$

ce qui complète la démonstration d'un théorème de M. Poincaré énoncé antérieurement (nº 570).

3º L'expression du $n^{\text{ième}}$ noyau itéré $k^{(n)}(x, y)$ d'un noyau canonique $k(x, y)$ montre que les fonctions principales de ce noyau itéré s'expriment au moyen des fonctions principales de $k(x, y)$ et inversement.

D'autre part, la déterminante $D_n(\lambda)$ du noyau $k^{(n)}(x, y)$ est égale à $\left(1 - \frac{\lambda}{c^n}\right)^p$ [nº 570, formule (36)], tandis que la résolvante admet c^n pour pôle d'ordre p (nº 560). On a donc dans le cas actuel $m = p$ et, par suite, $r = 1$. Le $n^{\text{ième}}$ noyau itéré d'un noyau canonique ne contient donc lui-même qu'un noyau canonique, et la fonction fondamentale est la même pour les deux noyaux. Cela posé, soit c un pôle de la résolvante de $K(x, y)$; s'il n'existe aucun autre pôle c_1 tel que $c_1^n = c^n$, le noyau principal de $K(x, y)$ relatif au pôle c^n est identique au $n^{\text{ième}}$ noyau itéré du noyau principal de $K(x, y)$ relatif au pôle c, et les fonctions fondamentales sont les mêmes pour les deux noyaux. Au contraire, supposons que la résolvante de $K^{(n)}(x, y)$ admette plusieurs pôles, deux par exemple, tels que $c_1^n = c^n$; le noyau principal relatif au pôle c^n de $K^{(n)}(x, y)$ est alors égal à la somme des $n^{\text{ièmes}}$ noyaux itérés des noyaux principaux de $K(x, y)$ relatifs aux deux pôles c et c_1. Les fonctions fondamentales de $K^{(n)}(x, y)$ correspondant à c^n sont des combinaisons linéaires des fonctions fondamentales de $K(x, y)$ relatives aux deux pôles c et c_1 (*voir* nº 575).

580. Fonctions principales. — Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ un groupe de m fonctions principales distinctes du noyau principal $k(x, y)$ relatif à un pôle c. Si l'on pose $H(x, y) = K(x, y) - k(x, y)$, les deux noyaux $k(x, y)$ et $H(x, y)$ sont orthogonaux, ce qui

exige qu'on ait $\int_a^b H(x, s)\varphi_i(s)\,ds = 0$, et, par suite, les m fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ satisfont à m relations

$$(76) \qquad \int_a^b K(x, s)\varphi_i(s)\,ds = \alpha_{i1}\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_{im}\varphi_m(x),$$

le déterminant caractéristique de cette substitution linéaire étant égal à $(1 - cs)^m$. Inversement, *s'il existe m fonctions linéairement distinctes* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$, *vérifiant m relations de la forme* (76) *pour lesquelles le déterminant caractéristique de la substitution soit* $(1 - cs)^m$, *c est un pôle de la résolvante, et* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ *font partie des fonctions principales relatives à ce pôle.*

En effet, en réduisant la substitution linéaire définie par les formules (76) à une forme canonique, nous pouvons remplacer les m fonctions $\varphi_i(x)$ par m combinaisons linéaires distinctes, se partageant en un certain nombre de groupes, de telle façon que les p fonctions d'un même groupe vérifient les relations

$$(77) \qquad \begin{cases} c\int_a^b K(x, s)\Phi_1(s)\,ds = \Phi_1(x), \\ c\int_a^b K(x, s)\Phi_2(s)\,ds = \Phi_1(x) + \Phi_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

La première de ces relations prouve que c est un pôle de la résolvante et $\Phi_1(x)$ une fonction fondamentale. Soit $k(x, y)$ le noyau principal correspondant et $H(x, y) = K(x, y) - k(x, y)$; les noyaux $k(x, y)$ et $H(x, y)$ étant orthogonaux, $\Phi_1(x)$ qui est une fonction fondamentale pour $k(x, y)$ est orthogonale à $H(x, y)$. Il en est de même de $\Phi_2(x)$; en effet, la seconde des relations (77) peut s'écrire

$$\Phi_2(s) + \Phi_1(s) = c\int_a^b [H(s, t) + k(s, t)]\Phi_2(t)\,dt,$$

et, en multipliant par $H(x, s)$ et intégrant, il vient

$$(78) \qquad \int_a^b H(x, s)\Phi_2(s)\,ds = c\int_a^b\int_a^b H(x, s)H(s, t)\Phi_2(t)\,dt\,ds.$$

Puisque c n'est pas une valeur singulière pour le noyau $H(x, y)$,

l'équation $c\int_a^b H(x, s)\psi(s)\,ds = \psi(x)$ n'admet pas d'autre solution que $\psi(x)=0$, ce qui montre que le premier membre de la relation (78) est nul. On démontrera ensuite de proche en proche que $\Phi_3, \ldots, \Phi_p$ sont orthogonales à $H(x, y)$ et, par suite, on peut remplacer $K(x, s)$ par $k(x, s)$ dans les relations (77), ce qui montre que $\Phi_2, \Phi_3, \ldots$ s'expriment au moyen des fonctions principales du noyau $k(x, y)$.

D'une façon plus générale, soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, m fonctions satisfaisant aux relations (76), où les coefficients α_{ik} sont des constantes quelconques, dont le déterminant est différent de zéro. En réduisant encore à une forme canonique la substitution linéaire définie par ces formules, nous en déduirons m combinaisons linéaires distinctes se partageant en un certain nombre de groupes tels que les fonctions d'un même groupe vérifient des relations (77), le nombre c n'étant pas forcément le même pour tous ces groupes. Toutes les fonctions $\varphi_i(x)$ sont donc des combinaisons linéaires des fonctions principales du noyau relatives à quelques-uns des pôles de la résolvante; nous dirons, pour abréger, que ces fonctions sont des fonctions principales du noyau $K(x, y)$. Le raisonnement employé plus haut (n° 575) pour les fonctions fondamentales s'étend aux fonctions principales, ce qui permet d'énoncer la proposition suivante : *toutes les fonctions principales d'un noyau* $K(x, y)$ *sont orthogonales à tout noyau orthogonal au premier.*

Soient $k_1(x, y)$ et $k_2(x, y)$ deux noyaux principaux correspondant aux deux pôles c_1 et c_2 de la résolvante; soient $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ et $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ deux groupes principaux associés pour le noyau k_1 et $(\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_m)$, $(\psi'_1, \ldots, \psi'_m)$ deux groupes principaux associés de k_2. Les noyaux $k_1(x, y)$ et $k_2(x, y)$ étant orthogonaux (n° 576), deux fonctions quelconques φ_i et ψ'_j sont orthogonales, ainsi que deux fonctions φ'_j et ψ_i. En particulier, *toute fonction fondamentale* $\varphi(x)$ *correspondant à une valeur singulière* c_1 *est orthogonale à toute solution fondamentale de l'équation associée correspondant à une autre valeur singulière* c_2 *différente de la première.* On le démontre directement au moyen des deux équations

$$\varphi(x) = c_1\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds, \qquad \psi(x) = c_2\int_a^b K(s, x)\psi(s)\,ds.$$

d'où l'on tire

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = c_1 \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(x, s)\,\varphi(s)\psi(x)\,dx\,ds$$
$$= c_2 \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(s, x)\,\varphi(x)\psi(s)\,ds\,dx.$$

Comme on peut échanger les lettres x et s dans la dernière intégrale double, une telle égalité ne peut avoir lieu si c_1 et c_2 sont différents que si cette intégrale est nulle, ce qui entraîne l'orthogonalité.

Un noyau principal peut lui-même être décomposé en un certain nombre de noyaux canoniques orthogonaux deux à deux. De tout noyau $\mathrm{K}(x, y)$, on peut donc déduire une suite de noyaux canoniques orthogonaux deux à deux

(79) $$k_1(x, y),\quad k_2(x, y),\quad \ldots,\quad k_l(x, y),\quad \ldots,$$

de telle façon que chaque fonction fondamentale de $\mathrm{K}(x, y)$ appartienne à un des noyaux canoniques et à un seul. Si la résolvante n'admet qu'un nombre fini de pôles, la suite (79) est elle-même limitée. S'il y a une infinité de pôles pour la résolvante, la suite (79) est illimitée. Nous avons vu plus haut (n° 579) comment des deux groupes de fonctions principales du noyau $k_i(x, y)$ on pouvait déduire un système biorthogonal, en prenant le résidu relatif au pôle correspondant c_i.

L'ensemble de ces systèmes biorthogonaux déduits de tous les noyaux canoniques forme un système biorthogonal

(80) $$\begin{cases} \varphi_1, & \varphi_2, & \ldots, & \varphi_n, & \ldots, \\ \psi_1, & \psi_2, & \ldots, & \psi_n, & \ldots, \end{cases}$$

qui sera limité ou illimité suivant que la résolvante admet un nombre fini ou une infinité de pôles. Chacune des intégrales $(\varphi_i \psi_i)$ est différente de zéro, de sorte que le système (80) peut être transformé en un système normal. Une même fonction φ peut figurer à la fois dans les deux suites, comme nous le verrons dans l'étude des noyaux symétriques.

En résumé, de tout noyau $\mathrm{K}(x, y)$ on peut déduire un système

biorthogonal et normal, formé par l'ensemble des fonctions principales du noyau et par ces fonctions seulement.

Lorsque le pôle c est imaginaire, les fonctions principales sont elles-mêmes imaginaires, et au pôle conjugué correspondent des fonctions principales conjuguées des premières, si le noyau $K(x, y)$ est réel.

La détermination du noyau principal correspondant à un pôle *connu* de la résolvante n'exige que des développements en série. En effet, la résolvante étant le quotient de deux fonctions entières de λ, si l'on connaît une racine d'ordre m, $\lambda = c$, du dénominateur, le produit de la résolvante par $(\lambda - c)^m$ n'admet plus le pôle $\lambda = c$. En ordonnant le numérateur et le dénominateur suivant les puissances de $\lambda - c$, une simple division algébrique donnera la partie principale dans le domaine du pôle $\lambda = c$, et par suite, le noyau principal. Si ce pôle est du premier ordre, les fonctions principales se confondent avec les fonctions fondamentales, et il suffira de remplacer dans le résidu y ou x par une valeur constante quelconque, pour obtenir toutes les fonctions fondamentales des deux équations associées. Le cas d'un pôle d'ordre quelconque exige quelques calculs de plus [1].

Lorsque le noyau $K(x, y)$ est continu, il est clair, d'après la façon même dont on peut l'obtenir, que le noyau principal relatif à un pôle quelconque est aussi continu; les fonctions principales seront donc elles-mêmes des fonctions continues des variables x et y respectivement dans l'intervalle (a, b). Il en est de même pour un noyau discontinu si les noyaux qu'on en déduit par itération sont continus à partir d'un certain rang [2]. Soit, en effet, c un pôle de la résolvante; choisissons un nombre

---

(1) *Voir* par exemple, mon Mémoire des *Annales de Toulouse*, p. 79 et suiv. Dans le cas d'un noyau borné, on a vu plus haut que les fonctions fondamentales s'exprimaient au moyen des mineurs de Fredholm. Dans un travail récent (*Journal de Mathématiques*, 1913), M. Plâtrier a complété ce résultat.

(2) La conclusion ne s'étend pas aux noyaux tels que l'on ne puisse en déduire un noyau continu au bout d'un nombre fini d'itérations. Reprenons, par exemple, le noyau $K(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}}$, en supposant $a = 0$, $b = 1$; la résolvante admet un seul pôle $\lambda = 1$, et il y a une seule fonction fondamentale $\frac{1}{\sqrt{x}}$ qui est discontinue pour $x = 0$. Considérons encore le noyau $K(x, y)$ défini par les conditions $K(x, y) = 0$ pour $0 \leq x < \frac{1}{2}$, $K(x, y) = 1$ pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, avec $a = 0$, $b = 1$. Le $n^{\text{ième}}$ noyau itéré $K^{(n)}(x, y)$ est nul pour $x < \frac{1}{2}$ et égal à $\frac{1}{2^{n-1}}$ pour $x \geq \frac{1}{2}$. Le

entier n tel que $K^{(n)}(x, y)$ soit continu et qu'il n'existe aucun autre pôle c_1 vérifiant la relation $c_1^n = c^n$. Nous avons vu que les fonctions principales de $K(x, y)$ relatives au pôle c s'expriment au moyen des fonctions principales de $K^{(n)}(x, y)$ relatives au pôle c^n; elles sont donc continues.

On s'explique aisément ce résultat. Supposons que tous les noyaux itérés à partir de $K^{(n)}(x, y)$ soient continus. Tous les coefficients des diverses puissances de λ dans le développement de la résolvante sont continus à partir du $n^{\text{ième}}$: il est clair que si l'on supprime les n premiers termes de cette série, la fonction méromorphe obtenue aura les mêmes pôles avec les mêmes parties principales que la résolvante. Le produit de ce nouveau développement en série par une fonction entière de λ à coefficients constants est encore une fonction entière de λ dont les coefficients sont des fonctions continues de x, y, et l'on en conclut, comme tout à l'heure, que les coefficients de la partie principale dans le domaine d'un pôle sont continus. Le noyau résolvant présente bien des discontinuités, mais elles n'affectent que les premiers coefficients du développement de $\Gamma(x, y; \lambda)$ suivant les puissances de λ.

581. Théorèmes de Fredholm. — Le théorème de Fredholm (n° 568) sur les fonctions fondamentales correspondant à un pôle de la résolvante résulte immédiatement de l'étude qui vient d'être faite. On peut aussi retrouver aisément le théorème relatif à l'équation générale de seconde espèce lorsque la valeur du paramètre est un pôle de la résolvante.

On a démontré (n° 569) que l'équation n'admet de solutions que si $f(x)$ est orthogonale à toutes les fonctions fondamentales

---

noyau résolvant $\Gamma(x, y; \lambda)$ est nul pour $x < \frac{1}{2}$ et égal à $\frac{2}{2-\lambda}$ pour $x \geqq \frac{1}{2}$. L'équation homogène

$$2\int_0^1 K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = \varphi(x)$$

admet la solution discontinue $\varphi(x) = 0\left(x < \frac{1}{2}\right)$, $\varphi(x) = 1$ pour $x \geqq \frac{1}{2}$.

D'une façon générale, supposons que l'on modifie la valeur d'un noyau $K(x, y)$ le long d'un nombre fini de lignes, ce qui revient à ajouter à $K(x, y)$ un noyau $K_1(x, y)$ qui est nul, sauf le long de certaines lignes en nombre fini. Si $K_1(x, y)$ n'a que des lignes de discontinuité de la première sorte, il n'y a rien de changé pour l'équation intégrale, car les noyaux itérés de $K + K_1$ sont identiques aux noyaux itérés de $K(x, y)$. On peut remarquer encore que la valeur d'une intégrale $\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$ ne change pas quand on change K en $K + K_1$. Il en est autrement, si l'on ajoute à $K(x, y)$ un noyau $K_1(x, y)$ qui est nul, sauf le

de l'équation associée correspondant au pôle c, et la démonstration s'étend à un noyau non borné. Ces conditions sont suffisantes. Soit, en effet, $k(x, y)$ le noyau principal relatif au pôle c; ce noyau principal est la somme d'un certain nombre de noyaux canoniques $k_1(x, y), \ldots, k_r(x, y)$, et les noyaux $k_1(x, y), \ldots, k_r(x, y)$, $K(x, y) - k(x, y)$ sont orthogonaux deux à deux. D'après une propriété générale (n° 574), on aura une solution de l'équation (1) où $\lambda = c$, si l'on sait trouver une solution de chacune des équations

$$\varphi(x) = c\int_a^b [K(x, y) - k(x, y)]\, \varphi(s)\, ds + f(x),$$

$$\pi(x) = c\int_a^b k_i(x, s)\, \pi(s)\, ds + f(x)$$
$$(i = 1, 2, \ldots r).$$

La première admet une solution unique donnée par la formule générale de Fredholm, puisque c n'est plus une valeur singulière pour le noyau $K(x, y) - k(x, y)$. Dans la seconde, remplaçons le noyau canonique $k_i(x, s)$ par

$$\varphi_1(x)\,\psi_1(s) + \ldots + \varphi_p(x)\,\psi_p(s);$$

elle devient

$$\pi(x) = c\int_a^b [\varphi_1(x)\,\psi_1(s) + \ldots + \varphi_p(x)\,\psi_p(s)]\, \pi(s)\, ds + f(x).$$

---

long d'un nombre fini de droites parallèles aux axes. Supposons, par exemple, $K_1(x, y) = 0$ pour $x \neq x_0$, $K_1(x_0, y) = \zeta(y)$.

Soit $\varphi(x)$ une solution de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds + f(x);$$

on obtiendra une solution $\Phi(x)$ de la nouvelle équation

$$\Phi(x) = \lambda\int_a^b [K(x, s) + K_1(x, s)]\, \Phi(s)\, ds + f(x)$$

en posant $\Phi(x) = \varphi(x)$ pour $x \neq x_0$ et $\Phi(x_0) = \varphi(x_0) + C$, la constante C étant déterminée par l'équation

$$C = \lambda\int_a^b K_1(x_0, s)\, \varphi(s)\, ds.$$

Le calcul s'applique encore si $f(x)$ est nul; les valeurs singulières sont donc les mêmes pour les deux noyaux, et les fonctions fondamentales ne diffèrent que pour $x = x_0$.

Il est clair que toute solution est de la forme

$$f(x) + C_1 \varphi_1(x) + \ldots + C_p \varphi_p(x);$$

en remplaçant $\pi(x)$ par cette expression, et en tenant compte des valeurs des intégrales $(\varphi_i \psi_k)$, on obtient la relation

$$C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \ldots + C_p \varphi_p = C_1 \varphi_1 + C_2(\varphi_2 + \varphi_1) + \ldots + C_p(\varphi_p + \varphi_{p-1}) \\ + c\varphi_1(x)(\psi_1 f) + \ldots + c\varphi_p(x)(\psi_p f),$$

pour déterminer les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Puisque par hypothèse $(\psi_p f) = 0$, cette relation se réduit à

$$C_2 \varphi_1 + C_3 \varphi_2 + \ldots + C_p \varphi_{p-1} + c\varphi_1(x)(\psi_1 f) + \ldots + c\varphi_{p-1}(x)(\psi_{p-1} f) = 0;$$

les coefficients $C_2, C_3, \ldots, C_p$ sont déterminés, tandis que C_1 est arbitraire. L'équation intégrale (1) admet donc dans ce cas une infinité de solutions, et il est clair qu'on les obtient toutes en ajoutant à l'une d'elles une fonction fondamentale quelconque relative à la valeur singulière c.

Remarque. — La solution de l'équation de Fredholm dans le cas singulier ne peut se déduire par un passage à la limite de la formule (11) qui convient au cas général. Soit c un pôle de la résolvante; supposons pour simplifier que le noyau principal correspondant est formé d'un seul noyau canonique $\varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y)$. La fonction de λ représentée par la formule (11) admet c comme pôle du second ordre et la partie principale est

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c}} \int_a^b [\varphi_1(x)\psi_1(s) + \varphi_2(x)\psi_2(s)] f(s)\,ds \\ + \frac{\lambda}{c} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^2} \int_a^b \varphi_1(x)\psi_2(s) f(s)\,ds.$$

Le point $\lambda = c$ est un pôle du second ordre, à moins que $f(x)$ ne soit orthogonal à $\psi_2(x)$. Si cette condition est satisfaite, le point c sera un pôle du premier ordre, à moins que $f(x)$ ne soit aussi orthogonal à ψ_1, et cependant l'équation de Fredholm admet toujours dans ce cas une infinité de solutions.

582. **Recherche des valeurs singulières.** — La recherche des pôles de la résolvante est un cas particulier du problème général qui consiste à déterminer les pôles d'une fonction méromorphe,

connaissant les coefficients de son développement taylorien dans le domaine d'un point où elle est régulière. Ce problème est résolu, tout au moins d'une façon théorique, dans un Mémoire bien connu de M. Hadamard (*Journal de Mathématiques*, 1892). Nous nous bornerons à quelques remarques d'un caractère très élémentaire qui nous suffiront pour la suite.

1° Soit $f(\lambda)$ une fonction rationnelle de λ, nulle pour λ infini, admettant un seul pôle $\lambda_1 \neq 0$, d'ordre p de multiplicité. Si l'on développe cette fonction en série entière suivant les puissances de λ, le coefficient de λ^n est de la forme $\lambda_1^{-n} P(n)$, $P(n)$ étant un polynome entier de degré $p-1$ par rapport à n. Réciproquement, tout développement en série entière de cette espèce représente une fonction rationnelle de λ ayant λ_1 pour pôle de degré p, car tout polynome $P(n)$ de degré $p-1$ est une combinaison linéaire des coefficients de la formule du binome $C_{n+1}^1, C_{n+2}^2, \ldots, C_{n+p-1}^{p-1}$.

2° Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les pôles de module minimum d'une fonction méromorphe $F(\lambda)$, représentée, dans le domaine de l'origine, par le développement taylorien

$$F(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_n\lambda^n + \ldots;$$

d'après la première remarque, le coefficient A_n est de la forme

$$A_n = \lambda_1^{-n}[P_1(n) + \varepsilon_n] + \lambda_2^{-n} P_2(n) + \ldots + \lambda_r^{-n} P_r(n),$$

$P_1, P_2, \ldots, P_r$ étant des polynomes en n dont le degré est égal à l'ordre du pôle correspondant, diminué de l'unité, et ε_n tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Cette expression du coefficient A_n met en évidence les propriétés suivantes qu'il suffit d'énoncer :

I. Pour que le produit $c^n A_n$ ait une limite l différente de zéro lorsque n croît indéfiniment, il faut et il suffit que c soit un pôle simple de $F(\lambda)$ et qu'il n'existe aucun autre pôle dont le module soit $\leq |c|$; la limite l est égale au quotient du résidu par $-c$.

II. Pour que le rapport $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ ait une limite différente de zéro lorsque n croît indéfiniment, il faut et il suffit que, parmi les pôles de module minimum, il y en ait un dont l'ordre soit supérieur à

l'ordre de tous les autres pôles de même module; la limite est égale à l'inverse de ce pôle.

Cela posé, soit $K(x, y)$ un noyau borné; on a (n° 566)

$$(81) \qquad -\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = A_1 + A_2\lambda + \ldots + A_n\lambda^{n-1} + \ldots,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ étant les traces successives du noyau [1]. Si la série (81) est divergente pour $\lambda = \lambda_0$, on peut affirmer que la résolvante admet au moins un pôle de module inférieur ou au plus égal à $|\lambda_0|$. Tous les pôles de la fonction méromorphe (81) étant des pôles simples, pour que le rapport $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ ait une limite, il faut et il suffit qu'il y ait un seul pôle de module minimum, et ce pôle est égal à l'inverse de la limite.

De là résulte un moyen, tout au moins théorique, de trouver les pôles lorsque ces pôles sont tous de modules différents. Soient λ_1, λ_2, ... ces pôles rangés par ordre de modules croissants. On a d'abord λ_1 en cherchant la limite de $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ pour n infini, et le résidu correspondant m_1 en cherchant la limite de $\lambda_1^n A_n$. Pour avoir l'affixe du second pôle, on opérera de la même façon sur la série entière obtenue en retranchant de la série (81) le développement de $\frac{m_1}{\lambda - \lambda_1}$, et ainsi de suite.

Si, en outre, tous les pôles de la résolvante sont du premier ordre, il suffira pour avoir les noyaux principaux correspondants, et, par suite, les fonctions fondamentales, de calculer les résidus de $\Gamma(x, y; \lambda)$. Pour avoir le résidu relatif au premier pôle λ_1, il suffira de trouver la limite de $\lambda_1^{n-1} K^{(n)}(x, y)$, car $K^{(n)}(x, y)$ est le coefficient de λ^{n-1} dans le développement de $\Gamma(x, y; \lambda)$ suivant les puissances de λ. Ayant obtenu le noyau principal $k_1(x, y)$, pour avoir le noyau principal $k_2(x, y)$ relatif au pôle λ_2, on appliquera la même méthode au développement

$$\Gamma(x, y; \lambda) - k_2(x, y)\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda},$$

et ainsi de suite.

---

[1] Pour un noyau non borné, tel que tous les noyaux itérés soient bornés à partir de $K^{(n)}(x, y)$, on peut conserver la série (81), à condition de supprimer les $(n - 1)$ premiers termes (*voir* n° 570).

On peut aussi trouver les fonctions fondamentales par une suite d'itérations. Soit

$$(82)\quad \begin{cases} u(x;\lambda) = u_0(x) + \lambda\, u_1(x) + \ldots + \lambda^n\, u_n(x) + \ldots, \\ u_n = \displaystyle\int_a^b K^{(n)}(x, s)\, u_0(s)\, ds \end{cases}$$

le développement suivant les puissances de λ de la solution de l'équation (1) où l'on aurait remplacé $f(x)$ par $u_0(x)$. Considérée comme fonction de λ, $u(x, \lambda)$ est une fonction méromorphe qui ne peut avoir pour pôles que les pôles de la résolvante. La partie principale dans le domaine d'un pôle λ_i de la résolvante est égale à

$$\int_a^b \gamma_i(x, s;\lambda)\, u_0(s)\, ds,$$

$\gamma_i(x, y;\lambda)$ étant le noyau résolvant pour le noyau principal $k_i(x, y)$ relatif au pôle λ_i. Cette partie principale disparaît si la fonction $u_0(x)$ est orthogonale à droite au noyau $k_i(x, y)$, de sorte que *la fonction $u(x;\lambda)$ n'admet pas forcément tous les pôles de la résolvante*. Par exemple, si $u_0(x)$ est une fonction fondamentale relative à la valeur singulière c, la fonction $u(x;\lambda)$ se réduit à la fonction rationnelle $u_0(x)\dfrac{c}{c-\lambda}$ du paramètre λ. Si $u_0(x)$ était orthogonale à tous les noyaux principaux, $u(x;\lambda)$ serait une fonction *entière* de λ. Laissant de côté ce cas exceptionnel, soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les pôles de module minimum tels que $u_0(x)$ ne soit pas orthogonale aux noyaux principaux correspondants; $u(x;\lambda)$ est une fonction méromorphe dont les pôles de module minimum sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, et le coefficient $u_n(x)$ a pour expression

$$u_n(x) = \lambda_1^{-n}\{P_1(n, x) + \varepsilon_n\} + \lambda_2^{-n}\, P_2(n, x) + \ldots + \lambda_r^{-n}\, P_r(n, x),$$

ε_n tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment. $P_i(n, x)$ est un polynome en n défini par la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^n P_i(n, x) = \int_a^b \gamma_i(x, s;\lambda)\, u_0(s)\, ds,$$

$\gamma_i(x, y;\lambda)$ étant défini comme tout à l'heure. Pour qu'il existe un nombre c tel que le produit $c^n u_n(x)$ tende vers une limite $U(x)$,

différente de zéro lorsque n croît indéfiniment, il faut, d'après la remarque du début, que c soit un pôle simple de $u(x; \lambda)$ et qu'il n'y ait aucun pôle de module $\leqq |c|$. Il faudra donc qu'on ait $r = 1$, $\lambda_1 = c$, et de plus que $P_1(n, x)$ soit indépendant de n. Or, en se reportant à l'expression d'un noyau canonique (n° 579), on voit aisément que si l'expression $\lambda_1^n \int_a^b k_1^{(n)}(x, s)\, u_0(s)\, ds$ est indépendante de n, elle est égale à une fonction fondamentale relative au pôle λ_1. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si le produit $c^n u_n(x)$ tend vers une limite $U(x)$ différente de zéro lorsque n croît indéfiniment, c'est un pôle de la résolvante et $U(x)$ une fonction fondamentale correspondant à ce pôle.

En choisissant convenablement la fonction $u_0(x)$, on peut obtenir ainsi toutes les fonctions fondamentales correspondant à ce pôle c, mais il résulte de la démonstration même que si le produit $c^n u_n(x)$ tend vers une limite différente de zéro $U(x)$ [sans que la fonction d'où l'on part $u_0(x)$ ait été choisie d'une façon particulière], c est un pôle du premier ordre de la résolvante qui n'admet aucun autre pôle de module égal ou inférieur à $|c|$.

583. **Méthode de Schwarz.** — On peut rattacher aisément à ce qui précède une élégante méthode employée par M. Schwarz pour certains cas particuliers importants dont il sera question plus loin, avant qu'on ne fût en possession d'une théorie générale. En multipliant les deux membres de la formule (82) par une fonction bornée $A(x)$ et intégrant terme à terme, il vient

$$(83) \qquad \int_a^b u(x; \lambda)\, A(x)\, dx = B_0 + B_1 \lambda + \ldots + B_n \lambda^n + \ldots$$

en posant

$$B_n = \int_a^b A(x)\, u_n(x)\, dx.$$

Le premier membre de cette relation est encore une fonction méromorphe du paramètre λ, dont les pôles font partie des pôles de $u(x; \lambda)$ et, par suite, des pôles de la résolvante. Si donc, en

choisissant convenablement les fonctions $u_0(x)$ et $A(x)$, le rapport $\frac{B_n}{B_{n-1}}$ tend vers une limite l différente de zéro, on peut affirmer que l'inverse $c = \frac{1}{l}$ est un pôle de la résolvante; de plus, si le produit $c^n u_n(x)$ tend vers une limite $U(x)$ différente de zéro, $U(x)$ est une fonction fondamentale correspondant à ce pôle.

En particulier, si l'on peut choisir $u_0(x)$ et $A(x)$ de façon que les constantes B_n soient positives, et vérifient la condition

$$B_n^2 \leqq B_{n-1} B_{n+1},$$

le rapport $\frac{B_n}{B_{n-1}}$ va en croissant avec n; ce rapport ne peut croître indéfiniment, puisque la série (83) serait divergente, sauf pour $\lambda = 0$. Il tend donc vers une limite, dont l'inverse est un pôle de la résolvante.

584. Genre de $D(\lambda)$. — Rappelons d'abord la définition du genre d'une fonction entière $G(\lambda)$; soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$ les zéros de cette fonction, rangés dans un ordre tel que le module n'aille jamais en décroissant, chacun des zéros figurant dans la suite autant de fois que l'exige son degré de multiplicité. S'il existe des nombres μ tels que la série

$$\sum \left| \frac{1}{\lambda_i} \right|^\mu$$

soit convergente, désignons par $k+1$ *le plus petit nombre entier* satisfaisant à cette condition. On a vu (II, n° 315) comment on peut former une fonction entière admettant les mêmes zéros que $G(\lambda)$, au même degré de multiplicité, et la fonction $G(\lambda)$ est de la forme, *en supposant* $G(0) \neq 0$,

$$(84) \qquad G(\lambda) = e^{g(\lambda)} \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_i} + \frac{\lambda^2}{2\lambda_i^2} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k\lambda_i^k}},$$

$g(\lambda)$ étant une fonction entière de λ. Lorsque cette fonction $g(\lambda)$ est un polynome de degré r, le plus grand des deux nombres k et r s'appelle le *genre* de la fonction entière $G(\lambda)$; on le représente par la lettre p. Remarquons qu'il ne suffit pas qu'une fonction entière soit mise sous la forme (84) pour en conlure le genre; si, par exemple, la série $\sum \left| \frac{1}{\lambda_i} \right|$ est convergente, on a identiquement

$$\prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) = e^{-\lambda \sum \frac{1}{\lambda_i}} \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_i}}.$$

Il semblerait, d'après la forme du second membre, que la fonction est de genre *un*, tandis qu'elle est de genre *zéro*. Pour mettre $G(\lambda)$ sous la forme caractéristique (84), il est donc indispensable de choisir pour $k+1$ le plus petit nombre entier tel que la série $\sum \left|\frac{1}{\lambda_i}\right|^{k+1}$ soit convergente. S'il n'existe aucun nombre μ tel que la série $\sum \left|\frac{1}{\lambda_i}\right|^{\mu}$ soit convergente, ou si $g(\lambda)$ n'est pas un polynome, on dit que $G(\lambda)$ est de *genre infini*.

Le genre d'une fonction entière est lié à l'ordre de grandeur du coefficient a_n de λ^n dans $G(\lambda)$ par des inégalités importantes dues à MM. Poincaré et Hadamard. Citons seulement le résultat suivant de M. Hadamard : *si le produit* $n^\alpha \sqrt[n]{|a_n|}$ *tend vers zéro pour n infini*, $G(\lambda)$ *est au plus du genre* $\frac{1}{\alpha}$. Nous avons vu (n° 565) que le module du coefficient a_n de $D(\lambda)$ relatif à un noyau borné est inférieur à $\frac{M^n n^{\frac{n}{2}}(b-a)^n}{n!}$, en supposant $|K| \leqq M$. On en conclut aisément, en remplaçant $n!$ par sa valeur approchée (I, n° 117), que le produit $n^\alpha \sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers zéro si α est inférieur à $\frac{1}{2}$, et par suite *le genre de* $D(\lambda)$ *est au plus égal à deux*. En s'appuyant uniquement sur la théorie générale des noyaux résolvants, M. Schur (*Exercice* 3 du Chapitre suivant) a prouvé que la série $\sum \left|\frac{1}{\lambda_i}\right|^2$ est convergente pour un noyau borné. Il s'ensuit que la fonction $D(\lambda)$, étant au plus du genre deux, est de la forme

$$D(\lambda) = e^{a\lambda + b\lambda^2} \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_i}}. \tag{85}$$

M. Carleman a démontré [1] que, *pour un noyau continu quelconque, le genre de* $D(\lambda)$ *est au plus égal à un*; il existe des noyaux pour lesquels $D(\lambda)$ est effectivement du premier genre, par exemple le noyau de Volterra [2].

La fonction $D(\lambda)$ étant au plus du genre deux, on déduit immédiatement de la relation générale (36) du n° 570

$$D_p(\lambda) = D\left(\lambda^{\frac{1}{p}}\right) D\left(\omega\lambda^{\frac{1}{p}}\right) \ldots D\left(\omega^{p-1}\lambda^{\frac{1}{p}}\right) \tag{86}$$

---

[1] *Sur le genre du dénominateur* $D(\lambda)$ *de Fredholm* (*Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, Bd 12, n° 15, 1917).

[2] Lorsque le noyau $K(x, y)$ satisfait à une condition de la forme

$$|K(x, y) - K(x, z)| < A|y - z|^\rho,$$

A et ρ étant deux nombres positifs déterminés, M. Lalesco, utilisant une remarque de Fredholm, a montré que $D(\lambda)$ était du genre zéro (*Comptes rendus*, t. 145, 1907, p. 906).

que $D_2(\lambda)$ est au plus du premier genre et que $D_3(\lambda)$, $D_4(\lambda)$, ... sont du genre zéro. Si $D(\lambda)$ est du genre zéro ou un, $D_2(\lambda)$, $D_3(\lambda)$, ... seront du genre zéro.

Applications. — 1° Soit $K(x, y)$ un noyau symétrique, c'est-à-dire tel que $K(y, x) = K(x, y)$. Il est clair, d'après les formules qui donnent les expressions des noyaux itérés successifs (n° 558), que tous ces noyaux itérés sont eux-mêmes symétriques. La suite de ces noyaux est illimitée, puisqu'on a, en général, d'après la relation entre $K^{(n)}(x, y)$ et $K^{(2n)}(x, y)$,

$$K^{(2n)}(x, x) = \int_a^b [K^{(n)}(x, s)]^2\, ds.$$

Si, en prenant n assez grand, on arrivait à un noyau $K^{2^n}(x, y)$ identiquement nul, on en conclurait que $K^{(2^{n-1})}(x, y)$ est lui-même identiquement nul et, en remontant de proche en proche, on voit que $K(x, y)$ devrait lui-même être nul. Si, au bout d'un nombre fini d'itérations, on arrive à un noyau borné, au moyen de deux itérations de plus, on arrivera donc certainement à un noyau symétrique différent de zéro, pour lequel $D(\lambda)$ sera de genre zéro. Ceci permet de démontrer très simplement qu'*un noyau symétrique a au moins une valeur singulière*. En effet, soit $K(x, y)$ un noyau symétrique sans valeur singulière; au bout d'un nombre fini d'itérations, on en déduira un autre noyau symétrique borné sans valeurs singulières $K^{(q)}(x, y)$ pour lequel $D_q(\lambda)$ sera du genre zéro. On aurait donc $D_q(\lambda) = 1$, ce qui est impossible puisqu'il faudrait qu'on eût

$$A_q = \int_a^b K^{(q)}(x_1, x_1)\, dx_1 = 0,$$

$$A_{2q} = \int_a^b \int_a^b K^{(q)}(x_1, x_2)\, K^{(q)}(x_2, x_1)\, dx_1\, dx_2 = 0$$

ou, en tenant compte de la symétrie du noyau,

$$\int_a^b \int_a^b \left\{ K^{(q)}(x_1, x_2) \right\}^2 dx_1\, dx_2 = 0$$

et, par suite, $K^{(q)}(x, y) = 0$ (*cf.* n° 587).

2° Soit $K(x, y)$ un noyau borné n'admettant qu'un nombre *fini* de valeurs singulières; $D(\lambda)$, étant au plus du genre deux, est de la forme

$$e^{a\lambda + b\lambda^2}\, P(\lambda),$$

$P(\lambda)$ étant un polynome. La dérivée logarithmique $\dfrac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}$ est donc une fonction rationnelle de λ dont la partie entière est $a + 2b\lambda$. Inversement, si $\dfrac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}$ est une fonction rationnelle, les pôles à distance finie doivent être des pôles simples et les résidus des nombres entiers positifs, sans quoi $D(\lambda)$ aurait des points singuliers à distance finie. Si toutes ces conditions

sont remplies, l'équation $D(\lambda) = 0$ n'aura qu'un nombre fini de racines. Pour exprimer que le noyau $K(x, y)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs singulières, il suffit donc d'exprimer que $\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}$ est une fonction rationnelle. Comme la partie entière de cette fonction est du premier degré au plus en λ, on est conduit à la condition suivante :

Pour que l'équation $D(\lambda) = 0$ n'admette qu'un nombre fini de racines, il faut et il suffit qu'à partir de A_3, p traces consécutives quelconques du noyau vérifient une relation de récurrence à coefficients constants (p étant un nombre entier indéterminé) [1].

En particulier, pour qu'il n'y ait aucune valeur singulière, il faut et il suffit que toutes les traces soient nulles à partir de A_3.

583. **Développements du noyau résolvant.** — Le premier théorème de Fredholm donne l'expression du noyau résolvant sous forme du quotient de deux fonctions entières. Or, toute fonction méromorphe peut aussi s'exprimer, d'une infinité de manières, par la somme d'une série dont chaque terme est une fonction rationnelle n'admettant qu'un pôle à distance finie (II, n° 319). Les propriétés établies plus haut permettent dans certains cas d'obtenir pour la résolvante des développements de cette espèce.

Soit $K(x, y)$ un noyau borné; supposons les pôles de la résolvante rangés par ordre de modules croissants [2], et soit $k_i(x, y)$ le noyau principal relatif au pôle λ_i.

Lorsque la série $H(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} k_i(x, y)$ est uniformément convergente, on peut écrire

$$(87) \qquad K(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} k_i(x, y) + H_1(x, y),$$

les deux noyaux $H(x, y)$ et $H_1(x, y)$ étant orthogonaux. En effet, le noyau $k_1(x, y)$ par exemple est orthogonal à $K(x, y) - k_1(x, y)$ et à chacun des noyaux $k_i(x, y)$ $(i > 1)$. Il est donc orthogonal à leur somme $H(x, y) - k_1(x, y)$ et par suite à la différence

$$K(x, y) - H(x, y) = H_1(x, y).$$

Inversement, $H_1(x, y)$ étant orthogonal à chacun des noyaux $k_1(x, y)$,

(1) *Cf.* Lalesco, *Comptes rendus*, décembre 1907.

(2) On peut supposer que chaque pôle figure une seule fois dans la suite ou un nombre de fois égal au *rang* de ce pôle. Dans ce dernier cas, $k_i(x, y)$ est un noyau canonique.

$k_2(x, y)$, ... est orthogonal à $H(x, y)$. Il s'ensuit qne le noyau $H_1(x, y)$ ne possède aucune valeur singulière et par suite sa résolvante est un polynome ou une fonction entière de λ; nous la représenterons par $E(x, y; \lambda)$. La série qui représente le noyau $H(x, y)$ étant uniformément convergente, nous avons remarqué plus haut (n° 572) que la résolvante de ce noyau s'obtient en faisant la somme des résolvantes $\gamma_i(x, y; \lambda)$ relatives aux noyaux $k_i(x, y)$. La résolvante $\Gamma(x, y; \lambda)$ du noyau donné $K(x, y)$ est donc représentée par le développement

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} \gamma_i(x, y; \lambda) + E(x, y; \lambda), \tag{88}$$

qu'on peut encore écrire

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} P^{(i)}[\Gamma(x, y; \lambda)] + E(x, y; \lambda), \tag{89}$$

$P^{(i)}[\Gamma(x, y; \lambda)]$ représentant la partie principale de Γ dans le domaine du pôle λ_i. En remplaçant $E(x, y; \lambda)$ par une somme de polynomes entiers en λ, il est clair qu'on pourra transformer la série (89) en une série à termes rationnels, dont chacun n'admet qu'un pôle à distance finie, et cela d'une infinité de façons (II, n° 319).

Pour un noyau borné quelconque $K(x, y)$, on ne peut affirmer en général que la série des noyaux principaux est uniformément convergente, ni par suite que la résolvante peut être mise sous la forme (88). Mais il est facile de former autant d'exemples de ce genre qu'on le voudra. Considérons, par exemple, les deux noyaux orthogonaux

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sin(ix)\sin(iy),$$

$$H_1(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} b_j \cos(jx)\cos[(j+1)y],$$

les deux séries $\Sigma |a_i|$, $\Sigma |b_j|$ étant convergentes et les limites a et b étant 0 et 2π, et leur somme $K = H + H_1$. Le noyau résolvant relatif à $H(x, y)$ est égal à

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i \sin(ix)\sin(iy)}{1 - \pi a_i \lambda}.$$

Quant au noyau $H_1(x, y)$, il donne naissance à un noyau résolvant qui est une fonction entière de λ. En effet, si l'on prend d'abord un nombre fini de termes dans la série $H_1(x, y)$, on vérifie (n° 571) que la fonction correspondante $D_n(\lambda)$ se réduit à l'unité, car tous les termes situés au-dessous de la diagonale principale dans le déterminant (44) sont nuls.

et tous les termes de la diagonale principale sont égaux à un. On a donc aussi $D(\lambda) = 1$ pour le noyau $H_1(x, y)$. On peut remarquer que la résolvante $E(x, y; \lambda)$ du noyau $H_1(x, y)$ se réduit à un polynome si H_1 ne contient qu'un nombre fini de termes.

Prenons de même un système orthogonal *quelconque* formé de deux suites de fonctions φ_i et ψ_i, telles qu'on ait $(\varphi_i \psi_i) = 0$ pour $i \neq j$. Au moyen de ces deux suites de fonctions, formons une série uniformément convergente

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \, \varphi_i(x) \, \psi_i(y),$$

les α_i étant des constantes. Les termes de cette série peuvent se partager en deux catégories suivant que l'intégrale $(\varphi_i \psi_i)$ est différente de zéro ou égale à zéro. En distinguant ces deux sortes de termes par une notation différente, nous écrirons le noyau précédent

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i \, \varphi_i(x) \, \psi_i(y) + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta'_j \, \varphi'_j(x) \, \psi'_j(y),$$

avec les conditions $(\varphi_i \psi_j) = \frac{1}{c_i}$, $(\varphi'_j \psi'_j) = 0$. Le noyau résolvant a pour expression

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i \frac{\varphi_i(x) \, \psi_i(y)}{1 - \frac{\lambda}{c_i}} + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta'_j \, \varphi'_j(x) \, \psi'_j(y),$$

et la partie entière du noyau se réduit à un terme indépendant de λ.

Remarque. — Dans ce dernier exemple, les fonctions φ'_j et ψ'_j vérifient les relations

$$\int_a^b K(x, s) \, \varphi'_j(s) \, ds = 0, \qquad \int_a^b K(s, y) \, \psi'_j(s) \, ds = 0.$$

D'une façon générale, soit $K(x, y)$ un noyau pouvant être mis sous la forme (87), tel que la résolvante relative au noyau $H_1(x, y)$ soit un polynome en λ, pouvant se réduire à son premier terme. Si cette résolvante est un polynome de degré $n - 1$ en λ, on aura, d'après l'équation fonctionnelle des noyaux résolvants (n° 559), l'identité

$$\begin{aligned} &\lambda H_1^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} H_1^{(n)}(x, y) \\ &= \lambda \int_a^b H_1(x, s) \left[\lambda^{n-1} H_1^{(n)}(s, y) + \ldots + H_1(s, y) \right] ds \end{aligned}$$

qui donne, en égalant à zéro le coefficient de λ^n,

$$\int_a^b H_1(x, s)\, H_1^{(n)}(s, y)\, ds = 0,$$

relation qu'on aurait pu écrire immédiatement en exprimant que $H_1^{(n+1)}$ est nul. Il s'ensuit que toute fonction $\varphi(x)$ de la forme $H_1^{(n)}(x, y_1)$ est une solution de l'équation $\int_a^b H_1(x, s)\varphi(s)\, ds = 0$. Comme les deux noyaux $H(x, y)$ et $H_1^{(n)}(x, y)$ sont eux-mêmes orthogonaux, la fonction $\varphi(x)$ est aussi une solution de l'équation

(90) $$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\, ds = 0,$$

qui peut être considérée comme un cas limite de l'équation homogène

$$\varphi(x) = c\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\, ds,$$

en supposant la valeur singulière c infinie. Si $n > 1$, les fonctions

$$H_1^{(n-1)}(x, y_1), \quad H_1^{(n-2)}(x, y_1), \quad \ldots,$$

obtenues en donnant à y une valeur numérique quelconque y_1, sont de même analogues aux fonctions principales. Mais, tandis qu'à un pôle à distance finie de la résolvante ne correspondent qu'un nombre fini de fonctions fondamentales, l'exemple précédent montre que l'équation (90) peut avoir une infinité de solutions distinctes.

L'hypothèse qui vient d'être examinée est la plus simple qu'on puisse faire sur le noyau. Supposons, plus généralement, que le noyau $K^{(p)}(x, y)$, déduit de $K(x, y)$ par $p-1$ itérations successives, vérifie la condition voulue, c'est-à-dire que la série $\sum_{i=1}^{+\infty} k_i^{(p)}(x, y)$ soit uniformément convergente. D'après ce qu'on vient d'établir, la résolvante $\Gamma_p(x, y; \lambda)$ du noyau $K^{(p)}(x, y)$ est représentée par le développement

(91) $$\Gamma_p(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} P^{(i)}[\Gamma_p(x, y; \lambda)] + E_p(x, y; \lambda);$$

c_i étant un pôle de $\Gamma(x, y; \lambda)$, c_i^p est un pôle de $\Gamma_p(x, y; \lambda)$, $P^{(i)}(\Gamma_p)$ est la partie principale de Γ_p dans le domaine de ce pôle. Quant à $E_p(x, y; \lambda)$, c'est une fonction entière de λ, qui est la résolvante pour le noyau

$$K^{(p)}(x, y) - \sum_{i=1}^{+\infty} k_i^{(p)}(x, y).$$

Nous pouvons exprimer Γ au moyen de Γ_p; on a, en effet, d'après la formule générale (65) du n° 560,

$$\Gamma(x,y;\lambda) = \mathrm{H}(x,y;\lambda) + \lambda^{p-1}\Gamma_p(x,y;\lambda^p) + \lambda^p \int_a^b \mathrm{H}(x,s;\lambda)\,\Gamma_p(s,y;\lambda^p)\,ds,$$

en posant

$$\mathrm{H}(x,y;\lambda) = \mathrm{K}(x,y) + \lambda\,\mathrm{K}^{(2)}(x,y) + \ldots + \lambda^{p-2}\mathrm{K}^{(p-1)}(x,y).$$

En divisant les deux membres par λ^{p-1} et remplaçant $\Gamma_p(x, y; \lambda^p)$ par son expression tirée de la formule (91), il vient

$$\frac{\Gamma(x,y;\lambda)}{\lambda^{p-1}} = \frac{\mathrm{H}(x,y;\lambda)}{\lambda^{p-1}} + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}^{(i)}[\Gamma_p(x,y;\lambda^p)] + \mathrm{E}_p(x,y;\lambda^p) + \lambda\int_a^b \mathrm{H}(x,s;\lambda)\left\{\sum_i \mathrm{P}^{(i)}[\Gamma_p(s,y;\lambda^p)] + \mathrm{E}_p(s,y;\lambda^p)\right\} ds.$$

Supposons, pour fixer les idées, qu'à un pôle c_i^p de $\Gamma_p(x, y; \lambda)$ corresponde un seul pôle c_i de $\Gamma(x, y; \lambda)$. La partie infinie de $\frac{\Gamma(x,y;\lambda)}{\lambda^{p-1}}$ dans le domaine du point $\lambda = c_i$ ne peut provenir que de

$$\mathrm{P}^{(i)}[\Gamma_p(x,y;\lambda^p)] + \lambda\int_a^b \mathrm{H}(x,s;\lambda)\,\mathrm{P}^{(i)}[\Gamma_p(s,y;\lambda^p)]\,ds,$$

et, par hypothèse, cette fonction de λ ne devient infinie que pour $\lambda = c_i$. D'autre part, $\mathrm{P}^{(i)}[\Gamma_p(x, y; \lambda^p)]$ est une fonction rationnelle de λ dans laquelle le degré du dénominateur surpasse de p unités celui du numérateur. Comme $\lambda\,\mathrm{H}(x, s; \lambda)$ est du degré $p-1$ en λ, on voit que l'expression considérée est nulle pour λ infini. Elle représente donc la partie principale de $\frac{\Gamma(x,y;\lambda)}{\lambda^{p-1}}$ dans le domaine du pôle $\lambda = c_i$, et la formule précédente peut s'écrire

$$\frac{\Gamma(x,y;\lambda)}{\lambda^{p-1}} = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}^{(i)}\left[\frac{\Gamma(x,y;\lambda)}{\lambda^{p-1}}\right] + \frac{\mathrm{H}(x,y;\lambda)}{\lambda^{p-1}} + \mathrm{E}_p(x,y;\lambda^p) + \lambda\int_a^b \mathrm{H}(x,s;\lambda)\,\mathrm{E}_p(s,y;\lambda^p)\,ds;$$

ou encore

$$(92)\quad \Gamma(x,y;\lambda) = \lambda^{p-1}\sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}^{(i)}\left[\frac{\Gamma(x,y;\lambda)}{\lambda^{p-1}}\right] + \mathrm{H}(x,y;\lambda) + \lambda^{p-1}\mathrm{E}_p(x,y;\lambda^p) + \lambda^p\int_a^b \mathrm{H}(x,s;\lambda)\,\mathrm{E}_p(s,y;\lambda^p)\,ds.$$

La fraction rationnelle $y^{p-1}\mathrm{P}^{(i)}\left[\dfrac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}}\right]$, correspondant au pôle c_i, ne dépend évidemment que du noyau principal de $K(x, y)$ relatif à ce pôle. Quant à la partie entière du second membre, elle dépend de K, $K^{(2)}$, ... $K^{(p-1)}$ et de $E_p(x, y; \lambda)$. Si la fonction E_p est nulle, cette partie entière se réduit à un polynome. C'est, en particulier, ce qui arrive pour un noyau symétrique (*voir* le Chapitre suivant).

Il est à remarquer que si le noyau résolvant $\Gamma(x, y; \lambda)$ peut se mettre sous la forme (92), pour une valeur de p, il peut se mettre sous la même forme d'une infinité de façons, car on peut y remplacer le nombre p par tout nombre entier supérieur à p.

586. **Noyaux singuliers.** — Il n'y a aucune difficulté spéciale, à part les complications d'écriture, à étendre les propriétés du noyau résolvant à l'équation

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda \int_{(D)} K(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)\,\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,d\xi_1\ldots d\xi_n + f(x_1, \ldots, x_n),$$

le signe $\int$ indiquant une intégrale multiple étendue à un domaine déterminé D à n dimensions, lorsque le noyau K est borné dans ce domaine et, d'une façon plus générale, lorsqu'on peut en déduire un noyau borné au bout d'un nombre fini d'itérations (n[os] 563, 570).

Mais les propriétés si simples des solutions de l'équation de Fredholm sont profondément modifiées lorsque le noyau $K(x, y)$ possède des singularités essentielles ou des points d'indétermination. Ce Chapitre de la théorie est encore en voie de formation, et nous indiquerons seulement quelques exemples simples. Dans le premier de ces exemples, une des limites est infinie, mais il est facile de ramener une équation intégrale où les limites sont 0 et $+\infty$, par exemple, à une autre équation intégrale où les limites sont 0 et 1. Si, en effet, dans l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{+\infty} K(x, s)\,\varphi(s)\,ds + f(x),$$

on pose

$$x = \frac{x'}{1-x'}, \quad s = \frac{s'}{1-s'}, \quad \Phi(x') = \varphi\left(\frac{x'}{1-x'}\right), \quad F(x') = f\left(\frac{x'}{1-x'}\right),$$

cette équation devient

$$\Phi(x') = \lambda \int_0^1 K\left(\frac{x'}{1-x'}, \frac{s'}{1-s'}\right)\frac{1}{(s'-1)^2}\Phi(s')\,ds' + F(x').$$

De même, si les limites de l'intégrale sont $-\infty$ et $+\infty$, en posant d'abord $x = \log x$, $s = \log s'$, on ramènera ce cas au précédent. Inverse-

ment, une équation intégrale où les limites de l'intégration sont deux nombres finis a et b peut se ramener à une équation intégrale avec une limite infinie pour l'intégrale.

L'équation intégrale [1]

$$(93) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_x^{+\infty} \frac{(s-x)^n}{n!} \varphi(s)\, ds + f(x)$$

peut être considérée comme une équation de seconde espèce où la limite supérieure b est infinie, tandis que la limite inférieure a est un nombre arbitraire inférieur à x, le noyau $K(x, s)$ étant nul pour $s < x$, et égal à $\frac{(s-x)^n}{n!}$ pour $s \geqq x$. Soit α un nombre réel et positif ou un nombre complexe dont la partie réelle est positive; on vérifie aisément, au moyen d'une suite d'intégrations par parties, qu'on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{(s-x)^n}{n!} e^{-\alpha s}\, ds = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^{n+1}},$$

de sorte que $e^{-\alpha x}$ est une solution de l'équation homogène

$$(94) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_x^{+\infty} \frac{(s-x)^n}{n!} \varphi(s)\, ds,$$

où $\lambda = \alpha^{n+1}$. Si nous continuons à appeler *valeur caractéristique* pour l'équation (93) toute valeur de λ telle que l'équation homogène (94) ait une solution différente de zéro, nous pouvons dire que toute valeur de λ, telle que l'une des déterminations de $\sqrt[n+1]{\lambda}$ ait sa partie réelle positive, est caractéristique pour l'équation (93). Si $n > 1$, *tout nombre réel ou complexe, sauf* $\lambda = 0$, *est donc une valeur caractéristique*. Si $n = 0$, tout nombre dont la partie réelle est positive est une valeur caractéristique; si $n = 1$, tout nombre, sauf zéro et les nombres réels et négatifs, est une valeur caractéristique.

On a de même, si la partie réelle de α est positive,

$$\int_0^x \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{x}\right) s^\alpha\, ds = \frac{x^\alpha}{\alpha(\alpha+1)},$$

de sorte que tout nombre λ, tel que l'équation $\alpha^2 + \alpha = \lambda$ ait une racine dont la partie réelle est positive, est une valeur caractéristique pour l'équation

$$(95) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^x \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{x}\right) \varphi(s)\, ds + f(x).$$

---

[1] J'ai donné cet exemple dans une Note des *Comptes rendus* (t. 157, 10 novembre 1913). Le premier exemple de ce genre (*Exercice* 5) est dû à M. Picard (*Annales de l'École Normale*, 1911, p. 313).

Il faut et il suffit pour cela qu'en posant $\lambda = \xi + \eta i$, le point (ξ, η) soit à l'extérieur de la parabole $\xi + \eta^2 = 0$.

On voit qu'il y a une différence essentielle, au point de vue des valeurs caractéristiques, entre les exemples précédents et l'équation régulière de Fredholm. Cette différence n'est pas moins grande, si l'on étudie une solution de l'équation (93), considérée comme fonction de λ, dans tout le plan de la variable λ. Supposons que la fonction $f(x)$ de la variable réelle x vérifie la condition $|f(x)| < Le^{-lx}$, L et l étant deux nombres positifs. On voit aisément, en appliquant la méthode habituelle des approximations successives, que cette équation (93) admet une solution $\varphi(x, \lambda)$ qui est représentée par une série entière en λ convergente dans le cercle C de rayon l^{n+1}. Mais le prolongement de cette fonction analytique en dehors du cercle C peut présenter des coupures naturelles choisies arbitrairement, si $n > 1$. Supposons, en effet, que $f(x)$ soit de la forme $f(x) = \Sigma A_i e^{-\alpha_i x}$, les parties réelles de tous les nombres α_i étant positives, et les deux séries $\Sigma | A_i |$, $\Sigma | A_i \alpha_i^{n+1} |$ étant convergentes. La solution correspondante de l'équation (93) est alors

$$\varphi(x, \lambda) = \sum \frac{A_i \alpha_i^{n+1}}{\alpha_i^{n+1} - \lambda} e^{-\alpha x};$$

considérée comme fonction de λ, cette fonction est méromorphe dans toute région du plan ne renfermant qu'un nombre fini de points α_i^{n+1}. Mais, si l'on a choisi les nombres α_i de telle façon que sur toute portion, aussi petite qu'elle soit, d'un arc de courbe Γ, ne passant pas par l'origine, il y ait une infinité de points α_i^{n+1} (ce qu'on peut toujours faire d'une infinité de manières, si $n > 1$), la courbe Γ est pour la fonction $\varphi(x, \lambda)$ une coupure naturelle (II, n° 345). On remarquera que, dans cet exemple comme pour l'équation régulière de Fredholm, *les points singuliers de* $\varphi(x, \lambda)$ *font partie des valeurs caractéristiques de* λ *pour l'équation intégrale.*

COMPLÉMENTS ET EXERCICES.

1. *Démonstration directe de la formule* (10) (n° 565). — Le développement du déterminant $K\begin{pmatrix} x x_1 \dots x_n \\ y y_1 \dots y_n \end{pmatrix}$ renferme comme premier terme le produit $K(x, y) K\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix}$, et le reste du développement peut s'écrire

$$\Sigma(+1)^p K(x, x_i) K(x_i, x_j) \dots K(x_k, y) K\begin{pmatrix} x'_1 \dots x'_{n-p} \\ u'_1 \dots x'_{n-p} \end{pmatrix},$$

$x_i, x_j, \dots, x_k$ désignant p quelconques des variables $x_1, \dots, x_n$ et x'_1,

$x'_2, \ldots, x'_{n-p}$ les $n-p$ variables restantes. L'intégrale multiple de ce produit est donc égale à

$$(-1)^p K^{(p+1)}(x, y) \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_{n-p} \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-p} \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_{n-p},$$

et ce terme figure $n(n-1)\ldots(n-p+1)$ fois dans le coefficient de λ^n de $D\left(\frac{x}{y}\middle|\lambda\right)$. En faisant varier p de 1 à n, on en déduit facilement la relation (10).

2. *Développement de* $D'(\lambda) : D(\lambda)$ (nº 566). — Représentons par $(-1)^n \frac{U_n}{n!}$ le coefficient de λ^n dans $D(\lambda)$, ce qui revient à poser

$$U_n = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_n, \qquad U_0 = 1.$$

Ces nombres U_n s'expriment au moyen des *traces* A_n du noyau $K(x, y)$. En effet, le développement du déterminant $K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix}$ peut s'écrire

$$K(x_1, x_1) K\begin{pmatrix} x_2 \ldots x_n \\ x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} + \Sigma(-1)^p K(x_1, x_i) \ldots K(x_l, x_1) K\begin{pmatrix} x'_1 x'_2 \ldots x'_{n-p} \\ x'_1 x'_2 \ldots x'_{n-p} \end{pmatrix},$$

$x_i, x_j, \ldots, x_l$ désignant p des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-p}$ les $n-p$ variables restantes. On en déduit en intégrant la relation de récurrence

$$\begin{aligned} U_n = A_1 U_{n-1} - (n-1) A_2 U_{n-2} + (n-1)(n-2) A_3 U_{n-3} + \ldots \\ + (-1)^{p+1}(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) A_p U_{n-p} + \ldots \\ + (-1)^{p+1}(n-1)! A_n U_0, \end{aligned}$$

qui exprime l'identité $D'(\lambda) = -D(\lambda) G(\lambda)$, en posant

$$G(\lambda) = A_1 + A_2 \lambda + \ldots + A_n \lambda^{n-1} + \ldots.$$

3. *Méthode de E. Schmidt pour un noyau quelconque* (*Math. Annalen*, t. 64, p. 161). — Soit $K(x, y)$ un noyau borné. Nous supposerons que le paramètre λ a une valeur déterminée. La méthode de Schmidt pour résoudre l'équation de seconde espèce (1) consiste à décomposer le noyau $K(x, y)$ en deux parties

$$K(x, y) = K_1(x, y) + \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(x) \beta_p(y),$$

les $2n$ fonctions $\alpha_p(x)$, $\beta_p(y)$ étant choisies de telle façon que l'intégrale double $\int_a^b \int_a^b [K_1(x, y)]^2 \, dx \, dy$ soit inférieure à $\frac{1}{\lambda}$, ce qui est toujours possible, d'une infinité de manières (*voir* nº 601). On écrit ensuite l'équa-

tion (1)

(1) $$\varphi(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

en posant

(2) $$f_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(x)\, \beta_p(s)\, \varphi(s)\, ds.$$

D'après la façon dont on a déterminé $K_1(x, y)$ la série entière qui représente la résolvante $\Gamma_1(x, y; \lambda)$ du noyau $K_1(x, y)$ est convergente pour la valeur de λ considérée (note de la page 348). On tire donc de l'équation (1)

(3) $$\varphi(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b \Gamma_1(x, t; \lambda) f_1(t)\, dt,$$

et en remplaçant $f_1(x)$ par son expression (2), il vient

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(x)\, \beta_p(s)\, \varphi(s)\, ds + \lambda \int_a^b \Gamma_1(x, t; \lambda) f(t)\, dt$$
$$+ \lambda^2 \int_a^b \int_a^b \Gamma_1(x, t, \lambda) \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(t)\, \beta_p(s)\, \varphi(s)\, ds\, dt,$$

ce qui est encore une équation de seconde espèce de la forme

$$\varphi(x) = F(x, \lambda) + \lambda \int_a^b \sum_{p=1}^{n} f_p(x, \lambda)\, \beta_p(s)\, \varphi(s)\, ds,$$

dont le noyau a la forme spéciale du n° 571.

On déduit aisément de cette méthode le caractère analytique de la résolvante, comme je l'ai montré dans un article du *Bulletin de la Société mathématique*, t. 37, p. 197 (1909).

4. *Noyau singulier de Weyl* (*Math. Annalen*, t. 66). — On a, d'après un calcul élémentaire, a étant *positif*,

(1) $$\int_0^{+\infty} e^{-as} \sin(xs)\, ds = \frac{x}{a^2 + x^2}.$$

D'autre part, en prenant l'intégrale de la fonction $\frac{z}{a^2 + z^2} e^{izx}$ de la variable complexe z le long du contour de la page 112 (t. II), et en raisonnant comme dans cet exemple, on obtient aisément, si x est un nombre

réel et positif, la relation

$$(2) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{s}{a^2+s^2} \sin(xs)\, ds = \frac{\pi}{2} e^{-ax}.$$

Des formules (1) et (2), on tire

$$\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-as} + \frac{s}{a^2+s^2}\right) \sin(xs)\, ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} + \frac{x}{a^2+x^2}\right),$$

de sorte que $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ est une valeur singulière pour l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{+\infty} \sin(xs)\, \varphi(s)\, ds + f(x),$$

à laquelle correspondent une infinité de fonctions fondamentales dépendant d'un paramètre a.

5. *Équation singulière de M. Picard.* — L'équation homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|}\, \varphi(s)\, ds$$

admet les deux solutions $e^{\pm \alpha i x}$, α étant réel, pourvu que λ soit de la forme $\frac{1+\alpha^2}{2}$. Toute valeur réelle de λ, supérieure à $\frac{1}{2}$, est donc une valeur caractéristique. On obtient ces solutions en remarquant que l'équation proposée, différentiée deux fois, conduit à l'équation linéaire

$$\varphi'' + (2\lambda + 1)\varphi = 0.$$

Au moyen de ces fonctions simples, on pourra former, comme dans le texte, une solution de l'équation avec second membre $f(x)$, admettant pour coupure naturelle un segment quelconque de l'axe réel, à droite du point $\lambda = \frac{1}{2}$.

L'équation de M. Lalesco s'obtient en remplaçant $-\infty$ par zéro dans l'équation de M. Picard. Les valeurs caractéristiques sont les valeurs de λ pour lesquelles la partie réelle de $\sqrt{1-2\lambda}$ est inférieure à l'unité en valeur absolue. La fonction fondamentale correspondante est

$$(\alpha+1)e^{\alpha x} + (\alpha-1)e^{-\alpha x},$$

α étant égal à $\sqrt{1-2\lambda}$.

CHAPITRE XXXII.

LES FONCTIONS FONDAMENTALES.

587. **Noyaux symétriques.** — Les propriétés des noyaux symétriques ont été établies d'abord par M. Hilbert ([1]), et déduites par un passage à l'infini des propriétés des formes quadratiques symétriques. Les résultats de M. Hilbert ont été peu après démontrés par M. Schmidt ([2]) au moyen d'une méthode directe fort élégante. Ces propriétés se déduisent aisément de la théorie générale du Chapitre précédent.

Soit $K(x, y)$ un noyau symétrique *réel*; ainsi qu'on l'a fait observer (n° 584), tous les noyaux qu'on en déduit par des itérations successives sont eux-mêmes symétriques. Nous allons montrer que la série

$$(1) \qquad u(x, \lambda) = u(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, s)\, u(s)\, ds$$

qui représente le développement, suivant les puissances de λ, de la solution de l'équation de Fredholm où la fonction connue $f(x) = u(x)$, ne peut être une fonction entière de λ à moins que $u(x)$ ne soit orthogonale à droite au noyau $K(x, y)$. Nous supposerons, pour fixer les idées, $u(x)$ bornée et intégrable. Admettons, en effet, que la série (1) soit une fonction entière de λ; multiplions tous les termes de cette série par $u(x)$ et intégrons ensuite entre les limites a et b; la série obtenue $\sum \mathfrak{A}_n \lambda^n$, où $\mathfrak{A}_n$ a pour expression

$$\mathfrak{A}_n = \int_a^b \int_a^b K^{(n)}(x, s)\, u(x)\, u(s)\, dx\, ds.$$

([1]) *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen* (*Göttingen Nachrichten*, 1904, 1905, 1906 et 1910).

([2]) *Mathematische Annalen*, Bd 63, 1907, p. 433-476.

sera aussi une fonction entière de λ. Or, on peut écrire, d'après les propriétés des noyaux itérés (n° 558),

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{2n} &= \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}^{(2n)}(x, s)\, u(x)\, u(s)\, dx\, ds \\
&= \int_a^b \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}^{(n)}(x, t)\, \mathrm{K}^{(n)}(t, s)\, u(x)\, u(s)\, dx\, ds\, dt \\
&= \int_a^b dt \left[\int_a^b \mathrm{K}^{(n)}(x, t)\, u(x)\, dx \right]^2,
\end{aligned}$$

d'où il suit que $\mathfrak{A}_{2n}$ est $\geqq 0$, si $b > a$, comme on le suppose. On a aussi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{2n} &= \int_a^b \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}^{(n+1)}(x, t)\, \mathrm{K}^{(n-1)}(t, s)\, u(x)\, u(s)\, dx\, ds\, dt \\
&= \int_a^b dt \times \left\{ \int_a^b \mathrm{K}^{(n+1)}(x, t)\, u(x)\, dx \right\} \times \left\{ \int_a^b \mathrm{K}^{(n-1)}(x, t)\, u(x)\, dx \right\},
\end{aligned}$$

et, par suite, d'après l'inégalité de Schwarz (n° 559),

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{2n}^2 \leqq & \int_a^b dt \left[\int_a^b \mathrm{K}^{(n+1)}(x, t)\, u(x)\, dx \right]^2 \\
& \times \int_a^b dt \left[\int_a^b \mathrm{K}^{(n-1)}(x, t)\, u(x)\, dx \right]^2,
\end{aligned}$$

ou, en comparant à la première expression de $\mathfrak{A}_{2n}$,

$$\mathfrak{A}_{2n}^2 \leqq \mathfrak{A}_{2n+2}\, \mathfrak{A}_{2n-2}. \tag{2}$$

La série $\Sigma \mathfrak{A}_n \lambda^n$ ne peut être convergente pour toute valeur de λ, à moins qu'on ait $\mathfrak{A}_4 = 0$. En effet, si $\mathfrak{A}_4$ est positif, il en sera de même, d'après l'inégalité (2), de $\mathfrak{A}_6$, $\mathfrak{A}_8$, ..., et le rapport $\dfrac{\mathfrak{A}_{2n}}{\mathfrak{A}_{2n-2}}$ ira en croissant avec n. La série obtenue en prenant les termes de degré pair dans $\Sigma \mathfrak{A}_n \lambda^n$ ne peut donc être convergente pour toute valeur de λ, si $\mathfrak{A}_4$ n'est pas nul. Pour que $\mathfrak{A}_4$ soit nul, il faut et il suffit que $u(x)$ soit orthogonal au noyau $\mathrm{K}^{(2)}(x, y)$. Or on peut écrire, en tenant compte de l'expression de $\mathrm{K}^{(2)}(x, y)$,

$$\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}^{(2)}(x, y)\, u(x)\, u(y)\, dx\, dy = \int_a^b dt \left[\int_a^b \mathrm{K}(x, t)\, u(x)\, dx \right]^2,$$

ce qui prouve que $u(x)$ est aussi orthogonal au noyau $\mathrm{K}(x; y)$,

s'il est orthogonal au premier noyau itéré $K^{(2)}(x, y)$. En résumé, si l'on prend pour $u(x)$ une fonction non orthogonale à $K(x, y)$, on ne peut avoir $\mathfrak{A}_1 = 0$, et la série (1) ne peut être convergente pour toute valeur de λ. *Tout noyau symétrique possède donc au moins une valeur singulière* [1] (*cf.* n° 584).

Les théorèmes généraux sur les fonctions fondamentales permettent aisément de compléter ce résultat.

1° *Toutes les valeurs singulières d'un noyau symétrique réel sont réelles.* Supposons, en effet, qu'il y ait une valeur singulière $\alpha + \beta i (\beta \gtrless 0)$; $\alpha - \beta i$ serait aussi une valeur singulière, et à ces deux valeurs singulières correspondraient aussi deux fonctions fondamentales imaginaires conjuguées $u + iv$ et $u - iv$. Le noyau étant symétrique, ce sont aussi des fonctions fondamentales pour le noyau associé, et l'on devrait avoir, d'après la relation générale d'orthogonalité (n° 580)

$$\int_a^b (u + iv)(u - iv)\, dx = \int_a^b (u^2 + v^2)\, dx = 0,$$

ce qui exige que u et v soient nuls.

2° *Les valeurs singulières sont des pôles simples de la résolvante.* Soit, en effet, $\varphi(x)$ une fonction fondamentale correspondant au pôle c; c'est aussi une fonction fondamentale pour l'équation associée, et ces deux fonctions ne peuvent être orthogonales, ce qui suffit pour prouver que c est un pôle simple de la résolvante (n° 578).

On peut encore raisonner comme il suit. Supposons, ce qu'on peut toujours faire, qu'on ait $\int_a^b \varphi^2(x)\, dx = 1$. Les deux noyaux

$$\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{c}, \qquad K(x, y) - \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{c} = K_1(x, y)$$

---

(1) Le raisonnement ne s'applique pas aux noyaux discontinus tels que

$$\int_a^b K(x, t) u(t)\, dt$$

soit nul sauf pour un nombre fini de valeurs de x, quelle que soit la fonction intégrable $u(x)$. Tels seraient les noyaux symétriques nuls dans tout le domaine sauf sur la diagonale $y = x$, et sur un nombre fini de parallèles aux axes, symétriques deux à deux par rapport à la diagonale. De pareils noyaux seront toujours laissés de côté dans la suite.

sont semi-orthogonaux (n° 575) et, comme ils sont symétriques, ils sont orthogonaux. Si c est encore une valeur singulière pour $K_1(x, y)$, on pourra recommencer la même opération sur ce noyau et, au bout d'un nombre fini de transformations de ce genre, on peut mettre $K(x, y)$ sous la forme

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{c} + H(x, y),$$

le noyau symétrique $H(x, y)$ n'admettant plus la valeur singulière c. La première partie du second membre est le noyau principal relatif au pôle c, et, d'après la façon même dont on a opéré, les m fonctions $\varphi_i(x)$ forment un système orthogonal et normal.

Le même raisonnement prouve que tout noyau symétrique ayant un nombre *fini* de valeurs singulières est de la forme

$$(3) \qquad K(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}.$$

En effet, si l'on retranche de $K(x, y)$ la somme $S(x, y)$ des noyaux principaux relatifs aux valeurs singulières, la différence

$$K(x, y) - S(x, y) = H(x, y)$$

est un noyau symétrique orthogonal à $S(x, y)$. Ce noyau n'admettant pas de valeur singulière est donc nul. Pour un noyau symétrique ayant une infinité de valeurs singulières, on aura

$$(4) \qquad K(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i},$$

pourvu que la série du second membre soit uniformément convergente. En résumé, les fonctions fondamentales d'un noyau symétrique réel forment un système orthogonal et normal de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i \ldots$, dont chacune correspond à un pôle du noyau résolvant. Supposons ces pôles rangés dans un ordre tel que le module n'aille jamais en décroissant, chacun d'eux figurant dans la suite autant de fois qu'il lui correspond de fonctions fon-

damentales

(5) $\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_i, \quad \ldots.$

A chaque terme λ_i correspond une fonction déterminée $\varphi_i(x)$ du système orthogonal. Inversement, tout système orthogonal peut être déduit d'un noyau symétrique d'une infinité de façons. Si l'on choisit, en effet, les constantes λ_i de façon que la série (4) soit absolument et uniformément convergente, il est clair que les fonctions $\varphi_i(x)$ sont précisément les fonctions fondamentales de ce noyau [1].

Remarque I. — Si $K(x, y)$ est un noyau symétrique, toutes les valeurs singulières du noyau itéré $K^{(2)}(x, y)$ sont réelles et *positives*. La fonction méromorphe $D'_2(\lambda) : D_2(\lambda)$ n'a donc que des pôles simples positifs, et, par suite, le plus petit de ces pôles est précisément la limite du rapport $\frac{A_{2n-2}}{A_{2n}}$ lorsque n croît indéfiniment (n° 582). La méthode de Kneser pour démontrer qu'un noyau symétrique a au moins une valeur singulière consiste précisément à prouver que ce rapport tend vers une limite (voir *Exercice* 1).

Remarque II. — On a remarqué (n° 580) que, pour un noyau quelconque $K(x, y)$, toute fonction $u(x)$ satisfaisant à la relation $\int_a^b K(x, s)u(s)\,ds = 0$ est orthogonale à toutes les fonctions fondamentales $\psi_i(x)$ du noyau associé. La réciproque n'est pas vraie pour un noyau quelconque [2], mais elle l'est pour un noyau symétrique. En effet, si une fonction $u(x)$ est orthogonale à toutes les fonctions fondamentales d'un noyau symétrique, la fonction

---

[1] Tous ces théorèmes ne s'appliquent qu'à un noyau symétrique réel. Si l'on prend, par exemple, $K(x, y) = x(1+iy\sqrt{3}) + y(1+ix\sqrt{3})$, $a = -1$, $b = 1$, on vérifie facilement que $1+ix\sqrt{3}$ et x forment un système de fonctions principales correspondant à la valeur singulière $\frac{\sqrt{3}}{2i}$.

[2] Soit $K(x, y) = \sin x \sin y + \sin 2x \cos y$ ($a = 0$, $b = 2\pi$). La fonction $\cos x$ est orthogonale à la fonction fondamentale unique $\sin x$, et cependant l'intégrale $\int_0^{2\pi} K(x, s) \cos\,ds$ n'est pas nulle.

$u(x, \lambda)$ qui représente la solution de l'équation de Fredholm où $f(x) = u(x)$ est une fonction entière du paramètre λ (n° 582), et nous venons de démontrer que ceci ne peut avoir lieu que si l'on a $\int_a^b K(x, s)u(s)\,ds = 0$; la série $u(x, \lambda)$ se réduit alors à son premier terme.

588. **Inégalité de Bessel.** — Soit S un système normal de fonctions orthogonales $\varphi_i(x)$ dans un intervalle (a, b). Si une fonction $f(x)$ est représentée dans cet intervalle par une série uniformément convergente de la forme

$$(6) \qquad f(x) = f_1\varphi_1(x) + f_2\varphi_2(x) + \ldots + f_n\varphi_n(x) + \ldots,$$

les coefficients f_i etant des constantes, ces coefficients peuvent être déterminés comme les coefficients d'une série de Fourier. Multiplions, en effet, les deux membres de la formule (6) par $\varphi_i(x)$, et intégrons terme à terme le second membre; il reste, en tenant compte des relations d'orthogonalité,

$$(7) \qquad f_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx.$$

Quelle que soit la fonction intégrable $f(x)$, on dit que la série $\Sigma f_i\varphi_i(x)$, où le coefficient f_i a la valeur (7), est la série de Fourier de $f(x)$ relativement au système orthogonal considéré S. Bien entendu, ce calcul ne prouve nullement que cette série est convergente et qu'elle a pour somme $f(x)$. Nous ne traiterons que quelques cas particuliers qui se rattachent à la théorie des équations intégrales. Remarquons seulement que, si la série de Fourier de $f(x)$ est uniformément convergente et a pour somme $S(x)$, la différence $R(x) = f(x) - S(x)$ est orthogonale à chacune des fonctions $\varphi_i(x)$ (d'après la façon même dont on a calculé f_i), et par suite, à $S(x)$.

Lorsque le carré de $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a, b), c'est-à-dire lorsque $\int_a^b f^2(x)\,dx$ a une valeur finie, les coefficients f_i vérifient une inégalité importante due à Bessel : *quel que soit le nombre n, on a*

$$(8) \qquad f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 \leqq \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

On l'obtient immédiatement en développant l'inégalité évidente

$$\int_a^b [f(x) - f_1 \varphi_1(x) - f_2 \varphi_2(x) - \ldots - f_n \varphi_n(x)]^2 \, dx \geqq 0$$

et en tenant compte des formules (7) qui donnent les coefficients f_i et des relations qui expriment que S est un système orthogonal et normal. Si le système S se compose d'une infinité de fonctions, le nombre n peut êre supposé aussi grand qu'on le veut, et par suite *la série Σf_i^2 des carrés des coefficients de Fourier d'une fonction $f(x)$ de carré intégrable est toujours convergente.*

La somme de cette série est au plus égale à $\int_a^b f^2(x)\,dx$, mais elle peut lui être inférieure, et la distinction des deux cas se rattache à une classification importante des systèmes orthogonaux. Un système orthogonal S est dit *complet* ou *fermé* s'il est impossible de trouver une autre fonction $\psi(x)$ telle qu'en l'ajoutant aux fonctions de S on ait un nouveau système orthogonal et *normal* (¹) S'. Dans le cas contraire, le système orthogonal est dit *incomplet* ou *ouvert*. Il est clair qu'un système orthogonal qui ne comprend qu'un nombre fini de fonctions ne peut être fermé. Soit S un système incomplet; il existe au moins une autre fonction $\psi(x)$ orthogonale à toutes les fonctions $\varphi_i(x)$, pour laquelle $\int_a^b \psi^2\,dx = 1$. La série de Fourier correspondante, relative à ce système, est identiquement nulle, et par suite la somme de la série $\Sigma \psi_i^2$ est inférieure à un. Par conséquent, *pour qu'un système orthogonal soit fermé, il suffit que la somme de la série Σf_i^2 soit toujours égale à $\int_a^o f^2(x)dx$, quelle que soit la fonction $f(x)$ de carré intégrable.*

Inversement, *si le système orthogonal* S *est fermé, on a, pour*

(¹) En ne considérant que les fonctious $\psi(x)$ telles qu'on ait $\int_a^b (x)dx = 1$, on exclut les fonctions discontinues $u(x)$ vérifiant la relation $\int_a u^2(x)\,dx = 0$. Il est clair que, pour une fonction de cette espèce, on a toujours $(\varphi, u) = 0$, d'après l'inégalité de Schwarz. Ces fonctions $u(x)$ ne peuvent être différentes de zéro qu'en tous les points d'un ensemble de *mesure nulle* (LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*).

toute fonction $f(x)$ de carré intégrable, l'égalité [1]

$$(9) \qquad \int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i^2;$$

la relation (9) est appelée pour cette raison *condition de fermeture* du système orthogonal.

Appliquons les définitions précédentes au système orthogonal S formé par les fonctions fondamentales $\varphi_i(x)$ d'un noyau symétrique $K(x, y)$. Ce noyau est dit *fermé*, s'il n'existe aucune fonction $\psi(x)$ telle qu'on ait $\int_a^b K(x, s)\psi(s)\,ds = 0$ identiquement, en exceptant toujours les fonctions discontinues qui sont nulles, sauf en tous les points d'un ensemble de mesure nulle. D'après une remarque antérieure, le noyau $K(x,y)$ est fermé, si le système S est lui-même fermé et réciproquement.

Exemple. — Les fonctions 1, ..., $\cos nx$, $\sin nx$, ... forment un système orthogonal dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. MM. Liapounoff et Hurwitz (*Annales de l'École Normale*, 1902) ont démontré que *ce système est fermé.*

589. **Théorème de Hilbert-Schmidt.** — M. Hilbert et, après lui, M. E. Schmidt ont démontré un théorème important relatif au développement de certaines fonctions en séries de fonctions fondamentales. Nous supposerons dans ce paragraphe que $K(x.y)$ est un noyau symétrique continu, ou du moins qu'il ne peut devenir discontinu que sur la droite $y = x$, de telle façon qne le produit $|x-y|^\alpha K(x, y)$ reste borné, l'exposant α étant inférieur à $\frac{1}{2}$, d'où il suit que l'intégrale $\int_a^b [K(x, y)]^2\,dy$ a une valeur finie. Le premier noyau itéré $K^{(2)}(x, y)$ est alors continu, ainsi que les fonctions fondamentales $\varphi_i(x)$, et toute fonction de la forme

$$\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds,$$

[1] Pour démonstration, *voir* LAURICELLA (*Rendiconti di Palermo*, t. 29, 1910. — STEKLOFF, *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, vol. 30, 1911. *Voir* aussi plus loin, n° 599.

où le carré de $h(x)$ est intégrable, est aussi une fonction continue de x [1] (n° 556).

Toute fonction de la forme

$$f(x)=\int_a^b \mathrm{K}(x, s)\, h(s)\, ds, \tag{10}$$

où $h(x)$ est une fonction de carré intégrable, est développable en une série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales.

Supposons les valeurs singulières λ_i du noyau rangées en série, comme on l'a expliqué au n° 587 et soit $\varphi_i(x)$ la fonction fondamentale correspondant à λ_i. Le coefficient de Fourier f_i de la fonction $f(x)$ relatif à $\varphi_i(x)$ a pour expression

$$f_i=\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(x, s)\, h(s)\, \varphi_i(x)\, dx\, ds = \frac{1}{\lambda_i}\int_a^b \varphi_i(s)\, h(s)\, ds = \frac{h_i}{\lambda_i},$$

h_i étant le coefficient correspondant pour $h(x)$. La série ainsi obtenue

$$\mathrm{S}(x)=\frac{h_1}{\lambda_1}\varphi_1(x)+\ldots+\frac{h_n}{\lambda_n}\varphi_n(x)+\ldots \tag{11}$$

est absolument et uniformément convergente dans l'intervalle (a, b). Nous avons en effet, d'après l'identité de Lagrange généralisée,

$$\left\{\left|\frac{h_n\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right|+\ldots+\left|\frac{h_m\varphi_m(x)}{\lambda_m}\right|\right\}^2$$
$$\leqq \left\{h_n^2+\ldots+h_m^2\right\}\left\{\left|\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right|^2+\ldots+\left|\frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m}\right|^2\right\}.$$

La série Σh_i^2 étant convergente, on peut choisir un nombre N assez grand pour qu'on ait $h_n^2+\ldots+h_m^2<\varepsilon$, quel que soit $m>n$, pourvu que n soit $\geqq$ N, en désignant par ε un nombre positif arbitraire. D'autre part, la somme $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right\}^2+\ldots+\left\{\frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m}\right\}^2$ reste inférieure, quels que soient x, m et n, à un nombre fini M, car la série dont le terme général est $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right\}^2$ est convergente; $\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}$ est,

[1] Il est facile d'étendre les raisonnements à des hypothèses plus générales. On pourrait, par exemple, supposer que $\mathrm{K}(x, y)$ a un nombre fini de lignes de discontinuité, parallèles aux axes, où il peut devenir infini de façon que son carré soit intégrable.

en effet, le coefficient de Fourier pour le noyau lui-même $K(x, y)$ considéré comme fonction de y. On peut donc prendre N assez grand pour que la somme des valeurs absolues d'un nombre quelconque de termes de la série (11), à partir du $n^{\text{ième}}$, soit plus petite que tout nombre positif donné dès qu'on a $n \geqq N$.

La somme $S(x)$ de la série (11) est donc continue dans l'intervalle (a, b). Pour prouver que *cette somme est égale à* $f(x)$, considérons la différence $R(x) + f(x) - S(x)$; d'après la façon même dont on a déterminé les coefficients f_i, $R(x)$ est orthogonale à toutes les fonctions $\varphi_i(x)$ et, par suite, à $S(x)$. Étant orthogonale à toutes les fonctions fondamentales du noyau $K(x, y)$, elle est orthogonale au noyau lui-même (n° 587) et, par suite, à $f(x)$, puisqu'on peut écrire

$$\int_a^b f(x)\,R(x)\,dx = \int_a^b \int_a^b K(x, s)\,R(x)\,h(s)\,dx\,ds$$
$$= \int_a^b h(s)\,ds \int_a^b K(x, s)\,R(x)\,dx = 0.$$

On a donc aussi

$$\int_a^b R^2(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,R(x)\,dx - \int_a^b S(x)\,R(x)\,dx = 0,$$

ce qui exige que $R(x)$ soit nul et, par suite, $S(x) = f(x)$.

De ce théorème, M. E. Schmidt a déduit une solution explicite de l'équation de seconde espèce, où figurent seulement les valeurs singulières et les fonctions fondamentales. Supposons que λ ne soit pas une valeur singulière pour le noyau; l'équation

$$(12) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds + f(x).$$

où le carré de $f(x)$ est intégrable, admet une solution unique telle que la différence $\varphi(x) - f(x)$ puisse être développée en une série uniformément convergente de la forme

$$\varphi(x) - f(x) = c_1\,\varphi_1(x) + \ldots + c_n\,\varphi_n(x) + \ldots.$$

En substituant dans les deux membres de l'équation (12), il vient

$$\sum c_n\,\varphi_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) f(s)\,ds + \lambda \sum \frac{c_n}{\lambda_n}\,\varphi_n(x)$$
$$= \lambda \sum \frac{f_n}{\lambda_n}\,\varphi_n(x) + \lambda \sum \frac{c_n}{\lambda_n}\,\varphi_n(x)$$

et, par suite, $c_n = \frac{\lambda f_n}{\lambda_n - \lambda}$. La solution $\varphi(x)$ est donc représentée par la série

$$(13) \qquad \varphi(x) = f(x) + \sum_{1}^{+\infty} \frac{\lambda f_n \varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda},$$

et l'on démontrerait aisément, en raisonnant comme avec la série (11), que cette série est absolument et uniformément convergente pourvu que λ ne soit pas une valeur singulière.

Remarque. — On peut encore appliquer la formule (13) au cas où λ est égal à une valeur singulière λ_i du noyau. Si le nombre λ_i ne figure qu'une fois dans la suite, on sait que l'équation (12) n'admet une solution que si l'on a $f_i = 0$, et il suffira alors de remplacer, dans la série (13), le coefficient de $\varphi_i(x)$, qui se présente sous forme indéterminée, par une constante quelconque C_i. On opérerait de même s'il y avait plusieurs fonctions fondamentales distinctes correspondant à la valeur λ_i (*cf.* nos 568, 575).

590. **Classification des noyaux symétriques.** — Soient $h(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de carrés intégrables; le théorème de Hilbert permet aisément de calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_a^b \int_a^b K(x, y)\, h(x)\, g(y)\, dx\, dy.$$

On peut écrire, en effet, successivement

$$I = \int_a^b g(y)\, dy \int_a^b K(x, y)\, h(x)\, dx$$

$$= \int_a^b g(y)\, dy \sum \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(y) = \sum \frac{g_n h_n}{\lambda_n},$$

puisque la série $\sum \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(y)$ est uniformément convergente; h_n et g_n sont les coefficients de Fourier pour les fonctions h et g.

En particulier, si l'on fait $g(x) = h(x)$, il vient

$$(14) \qquad I = \int_a^b \int_a^b K(x, y)\, h(x)\, h(y)\, dx\, dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n^2}{\lambda_n},$$

relation tout à fait analogue à la formule qui exprime une forme quadratique par une somme de carrés, et qui permet de classer ces noyaux. Si toutes les valeurs singulières λ_i sont du même

signe, positives par exemple, on a toujours $I \geqq 0$, quelle que soit la fonction $h(x)$; le noyau est dit *positif*. Au contraire, si toutes les valeurs singulières sont négatives, on a toujours $I \leqq 0$, et le noyau est *négatif*. S'il y a des valeurs singulières de signes différents, le noyau est *ambigu*; l'intégrale I peut être positive ou négative suivant la fonction $h(x)$. Si l'on a, par exemple, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, on aura une valeur positive pour I en prenant $h(x) = \varphi_1(x)$, et une valeur négative en prenant $h(x) = \varphi_2(x)$.

Pour un noyau ambigu, l'intégrale I peut être nulle sans que $h(x)$ soit nulle. Supposons toujours $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$; si l'on prend

$$h(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x),$$

l'intégrale I correspondante a pour valeur $\frac{\alpha_1^2}{\lambda_1} + \frac{\alpha_2^2}{\lambda_2}$, et sera nulle en choisissant convenablement le rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Au contraire, lorsque le noyau $K(x, y)$ est positif, l'intégrale I ne peut être nulle que s'il existe une fonction $h(x)$ orthogonale à toutes les fonctions fondamentales $\varphi_n(x)$ et, par suite, au noyau lui-même. Dans le cas d'un noyau *fermé et positif*, on a donc toujours $I > 0$; ce noyau est dit *défini*. Un noyau fermé et négatif est aussi un noyau *défini*. Il résulte de cette définition qu'un noyau défini est nécessairement fermé, mais la réciproque n'est pas vraie; un noyau ambigu peut être fermé.

Les fonctions fandamentales d'un noyau positif non défini forment un système incomplet S; s'il est possible de leur adjoindre un nombre *fini* de fonctions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_p(x)$, de façon à obtenir un système orthogonal fermé S', le noyau $K(x, y)$ est appelé *quasi-défini*; en ajoutant à ce noyau un noyau orthogonal dépendant de p constantes arbitraires, tel que

$$C_1 \psi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + C_p \psi_p(x)\psi_p(y),$$

on le transforme en un noyau fermé.

Supposons que quelques-unes des valeurs singulières du noyau $K(x, y)$ soient positives, et soit λ_1 la plus petite. Parmi toutes les fonctions $h(x)$ satisfaisant à la condition $\int_a^b h^2(x)\,dx = 1$, il y en a une qui donne à l'intégrale (14) une valeur maximum. En effet, d'après l'inégalité de Bessel, la série Σh_i^2 est convergente et a pour somme $1 - \alpha$, α étant $\geqq 0$; l'inté-

grale I peut donc s'écrire

$$\mathrm{I} = \frac{1-\alpha}{\lambda_1} - \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_i} \right) h_i^2,$$

et sa valeur ne peut être supérieure à $\frac{1}{\lambda_1}$, valeur qu'elle atteint si l'on prend $h(x) = \varphi_1(x)$. S'il y a des valeurs singulières négatives, on verrait de même que l'intégrale I prend une valeur minimum négative lorsque $h(x)$ est égale à la fonction fondamentale correspondant à la valeur singulière négative dont la valeur absolue est la plus petite.

Inversement, M. Hilbert a montré comment l'existence d'un maximum ou d'un minimum pour I permet de démontrer l'existence de valeurs singulières pour le noyau. La démonstration offre beaucoup d'analogie avec le raisonnement de Riemann pour établir le principe de Dirichlet (n° 512) et prête aux mêmes objections. Si l'on considère une fonction intégrable $h(x)$ satisfaisant à la condition $\int_a^b h^2(x)\,dx = 1$, il est facile de démontrer que la valeur absolue de I est bornée, car l'inégalité de Schwarz donne la relation

$$\mathrm{I}^2 \leqq \iint [\mathrm{K}(x, y)]^2\,dx\,dy \times \iint h^2(x)\,h^2(y)\,dx\,dy.$$

Admettons que parmi ces fonctions $h(x)$ il y en ait une pour laquelle I atteint sa borne supérieure, et supposons par exemple que I soit maximum pour $h(x) = \varphi(x)$. Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonction continues quelconques, α et β deux paramètres variables liés par la relation

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int_a^b [\varphi(x) + \alpha\,u(x) + \beta\,v(x)]^2\,dx = 1.$$

La fonction auxiliaire $\mathrm{I}(\alpha, \beta)$

$$\mathrm{I}(\alpha,\beta) = \iint \mathrm{K}(x,y) \{ \varphi(x) + \alpha u(x) + \beta v(x) \} \{ \varphi(y) + \alpha u(y) + \beta v(y) \}\,dx\,dy$$

doit être maximum pour $\alpha = \beta = 0$, ce qui exige, d'après la théorie élémentaire (I, n° 52), qu'on ait

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \beta}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0$$

pour $\alpha = \beta = 0$. Cette relation s'écrit

(15)
$$\frac{\iint \mathrm{K}(x, y) \{ \varphi(x)\,u(y) + \varphi(y)\,u(x) \}\,dx\,dy}{2\int_a^b \varphi(x)\,u(x)\,dx} = \frac{\iint \mathrm{K}(x, y) \{ \varphi(x)\,v(y) + \varphi(y)\,v(x) \}\,dx\,dy}{2\int_a^b \varphi(x)\,v(x)\,dx}$$

et, par suite, la valeur commune de ces rapports doit se réduire à une constante C indépendante de la forme des fonctions $u(x)$ et $v(x)$. En tenant compte de la symétrie du noyau $K(x, y)$, on voit que $u(x)$ doit satisfaire à la condition

$$\int_a^b u(x)\,dx \left\{ \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy - C\,\varphi(x) \right\} = 0,$$

et cette relation ne peut évidemment être satisfaite, quelle que soit la fonction continue $u(x)$, que si l'on a

$$\int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = C\,\varphi(x).$$

L'existence d'une première fonction fondamentale $\varphi(x)$ étant établie, on verrait de même que, parmi les fonctions $h(x)$ orthogonales à $\varphi(x)$, et satisfaisant à la condition $\int_a^b h^2\,dx = 1$, celle qui donne à I une valeur maximum fournit une nouvelle fonction fondamentale, et ainsi de suite.

591. **Développement des noyaux itérés.** — Dans l'expression (10), prenons pour $h(x)$ le noyau $K(x, y)$ lui-même, y étant considéré comme un paramètre; on a alors $f(x) = K^{(2)}(x, y)$, et le théorème de Hilbert fournit le développement du noyau itéré $K^{(2)}(x, y)$ suivant les fonctions fondamentales. Le coefficient h_n est dans ce cas égal à $\frac{\varphi_n(y)}{\lambda_n}$, et la formule générale (6) devient

$$K^{(2)}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n^2}. \tag{16}$$

Le raisonnement du n° 589 prouve seulement que, quand on donne à y une valeur constante, la série (16) est uniformément convergente par rapport à x. Par raison de symétrie, quand on donne à x une valeur constante, elle est uniformément convergente par rapport à y, mais on ne peut en conclure immédiatement qu'elle est uniformément convergente *relativement à l'ensemble des deux variables*. Pour établir ce point, considérons la série obtenue en faisant $y = x$

$$K^{(2)}(x, x) = \frac{\varphi_1^2(x)}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2^2(x)}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2} + \ldots; \tag{17}$$

c'est une série à termes continus, *tous positifs*, dont la somme est

une fonction continue; elle est donc uniformément convergente [1]. Cela étant, l'inégalité

$$\left|\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^2}\right| \leqq \frac{1}{2}\,\frac{\varphi_n^2(x)+\varphi_n^2(y)}{\lambda_n^2}$$

prouve que la série (16) est elle-même absolument et uniformément convergente. De la formule (16) on déduit de proche en proche les développements des noyaux itérés successifs $K^{(3)}(x, y)$, $K^{(4)}(x, y)$, ..., au moyen de la formule de récurrence qui lie deux noyaux consécutifs, et l'on a pour $m \geqq 2$

$$(18)\qquad K^{(m)}(x, y) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^m} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^m} + \ldots.$$

Toutes ces séries sont elles-mêmes absolument et uniformément convergentes, comme on le voit aisément en les comparant à la série (16) [2]. En remplaçant y par x dans la série (18) et intégrant, on obtient l'expression du coefficient A_m pour $m \geqq 2$,

$$(19)\qquad A_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}.$$

---

(1) La démonstration de ce théorème, dû à Dini, revient évidemment à la démonstration de la proposition suivante : *Soit $u_n(x)$ une fonction continue positive dans l'intervalle (a, b), qui tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment : si l'on a $u_{n+1}(x) \leqq u_n(x)$, elle tend uniformément vers zéro.*

Soit $M_n(a, b)$ le maximum de $u_n(x)$ dans l'intervalle (a, b); on a par hypothèse $0 < M_{n+1}(a, b) \leqq M_n(a, b)$, et par suite, $M_n(a, b)$ tend vers une limite $L(a, b) \geqq 0$ lorsque n croît indéfiniment. Tout revient à démontrer que cette limite est nulle. Supposons, en effet, $L(a, b) > 0$; si l'on décompose (a, b) en deux intervalles partiels (a, c), (c, b), l'une au moins des limites $L(a, c)$, $L(c, b)$ serait égale à $L(a, b)$. En procédant par subdivisions successives, comme on l'a fait plusieurs fois (I, n° 8), on prouverait qu'il existe un nombre x_0 de l'intervalle (a, b) tel que la limite $L(x_0 - h, x_0 + h)$ soit toujours égale à un nombre positif L' indépendant de h, aussi petit que soit ce nombre h. Or, cette conclusion est incompatible avec les hypothèses. En effet, on peut d'abord trouver un nombre entier m tel que $u_m(x_0)$ soit $< \frac{L'}{2}$, puis un nombre h assez petit pour que dans l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$, la valeur absolue $|u_m(x) - u_m(x_0)|$ soit inférieure à $\frac{L'}{2}$. On aura donc dans tout cet intervalle $u_m(x) < L'$ et, par suite, $u_n(x) < L'$, pour $n \geqq m$. La limite $L(x_0 - h, x_0 + h)$ ne peut donc être égale à L'.

(2) La formule (18) a d'abord été établie par M. E. Schmidt pour $m \geqq 3$, puis par M. Kowalewski pour $m = 2$.

La fonction entière

$$F(\lambda) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}},$$

qu'on peut encore écrire sous la forme

$$F(\lambda) = e^{-\lambda^2 \sum \frac{1}{2\lambda_n^2} - \ldots - \lambda^m \sum \frac{1}{m\lambda_n^m} - \ldots}$$

ne diffère de $D(\lambda)$ que par le facteur exponentiel $e^{-A_1\lambda}$, et l'on a

$$(20) \qquad D(\lambda) = e^{-A_1\lambda} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}}.$$

La fonction $D(\lambda)$ est donc au plus du *premier genre*, mais elle peut être de *genre zéro*, comme nous le prouverons plus bas dans le cas particulier des noyaux positifs.

Des formules qui donnent les développements des noyaux itérés, on peut aussi déduire le développement du noyau résolvant

$$(21) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, y) + \ldots.$$

Si l'on remplace dans cette formule $K^{(n)}(x, y)$ $(n \geqq 2)$ par le développement (18), on obtient un tableau à double entrée, et si l'on fait la somme de ce tableau en groupant ensemble les termes en $\varphi_n(x)\varphi_n(y)$, on obtient la formule

$$(22) \qquad \Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)};$$

on démontre aisément que la série ainsi obtenue est absolument et uniformément convergente pourvu que λ ne soit pas une valeur singulière du noyau en comparant ses termes à ceux de la série (16); ce qui suffit pour justifier le mode de sommation adopté. Mais, tandis que la formule (21) ne s'applique qu'aux valeurs de λ dont la valeur absolue est inférieure à $|\lambda_1|$, la formule (22) donne le développement de la fonction méromorphe $\Gamma(x, y; \lambda)$ dans tout le plan de la variable λ (*cf.* n° 585).

592. **Noyaux positifs.** — Les noyaux symétriques positifs continus ont

été étudiés par M. Mercer dans un intéressant Mémoire [1], dont nous indiquerons les principaux résultats.

Pour qu'un noyau symétrique $K(x, y)$ *soit positif, il faut et il suffit que tous les déterminants de Fredholm* $K\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}$ *soient* $\geqq 0$ *pour tous les systèmes de valeurs de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *dans l'intervalle* (a, b).

Nous démontrerons seulement l'inégalité $K(x, x) \geqq 0$, qui sera utile un peu plus loin; les autres inégalités se démontrent d'une façon analogue. Supposons qu'on ait $K(x_0, x_0) < 0$ pour une valeur x_0 de l'intervalle (a, b); le noyau étant continu pour le système de valeurs $x = x_0$, $y = x_0$, soit l un nombre positif assez petit pour que $K(x, y)$ soit négatif lorsque x et y sont compris entre $x_0 - l$ et $x_0 + l$. Si l'on prend pour $h(x)$ une fonction continue nulle en dehors de l'intervalle $(x_0 - l, x_0 + l)$ et positive dans cet intervalle, il est clair que tous les éléments de l'intégrale (14) seront nuls ou négatifs, et l'intégrale elle-même aura une valeur négative, ce qui est impossible, puisque le noyau $K(x, y)$ est supposé positif.

La réciproque est à peu près évidente. Si tous les déterminants de Fredholm sont positifs ou nuls, tous les coefficients des puissances paires de λ dans $D(\lambda)$ seront positifs ou nuls, et les coefficients des puissances impaires de λ seront négatifs ou nuls. L'équation $D(-\lambda) = 0$ ne peut donc avoir aucune racine positive, et par suite l'équation $D(\lambda) = 0$ ne peut avoir aucune racine négative.

Cela posé, nous pouvons écrire le développement du noyau résolvant d'après la formule (22) en y faisant $y = x$,

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Gamma(x, x; \lambda) - \sum_{n=m+1}^{+\infty} \lambda \frac{[\varphi_n(x)]^2}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} \\ &= K(x, x) + \sum_{n=1}^{m} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n - \lambda} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n}, \end{aligned} \right.$$

m étant un nombre entier positif quelconque. Quand on donne à λ une valeur *négative* arbitraire, le premier membre de cette égalité est positif. En effet, d'une part, tous les termes de la série sont négatifs puisqu'on a $\lambda_n > 0$; d'autre part, le noyau $\Gamma(x, y; \lambda)$ est un noyau positif lorsque λ a une valeur négative car les valeurs singulières de ce noyau s'obtiennent en retranchant λ des valeurs singulières du noyau $K(x, y)$ (n° 560). On peut encore le reconnaître directement en observant que, d'après les formules (22) et (14), la valeur de l'intégrale double $\int\int \Gamma(x, y; \lambda) h(x) h(y)\, dx\, dy$ ne peut être négative, lorsque λ est négatif. On a donc aussi $\Gamma(x, x; \lambda) \geqq 0$, d'après le résultat établi tout à l'heure, et par suite le second membre de la formule (23) a aussi une valeur positive. Ceci ayant lieu pour toute

[1] *Philosophical Transactions*, London, t. 209 A, 1909, p. 415.

valeur de $\lambda < 0$, observons que le terme qui dépend de λ tend vers zéro, lorsque λ tend vers $-\infty$. On a donc aussi

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{[\varphi_n(x)]^2}{\lambda_n} \leqq K(x, x);$$

m étant un nombre entier quelconque, on en conclut que la série $\sum \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n}$ est convergente et que sa somme est inférieure ou au plus égale à $K(x, x)$. Par un raisonnement analogue à celui du n° 589, on prouve ensuite que la série

$$S(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n} = \sum_{1}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\varphi_n(y)}{\sqrt{\lambda_n}}$$

est absolument et uniformément convergente dans l'intervalle (a, b) par rapport à chacune des variables prise séparément.

La somme symétrique $S(x, y)$ est donc une fonction continue de chacune des variables x, y, prise séparément, et il en est de même de la différence $R(x, y) = K(x, y) - S(x, y)$.

Pour prouver que cette différence $R(x, y)$ est identiquement nulle, partons de la relation

$$\int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds = \int_a^b S(x, s)\, h(s)\, ds + \int_a^b R(x, s)\, h(s)\, ds,$$

où $h(x)$ est une fonction quelconque de carré intégrable. La série $S(x, s)$ étant uniformément convergente en s, la première intégrale du second membre est égale à la somme de la série $\sum \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x)$; c'est aussi la valeur du premier membre, d'après le théorème de Hilbert. On a donc

$$\int_a^b R(x, s)\, h(s)\, ds = 0,$$

quelle que soit la fonction $h(x)$, ce qui exige évidemment que $R(x, y)$ soit nul identiquement.

Le noyau $K(x, y)$ est donc égal à la somme de la série

$$(24) \qquad K(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n};$$

et il suffit de répéter le raisonnement qui a été fait sur la série (16) pour montrer que la série (24) est absolument et uniformément convergente par rapport à l'ensemble des deux variables.

De cette formule (24) on déduit, en faisant $y = x$, et intégrant terme à terme,

$$(25) \qquad A_1 = \int_a^b K(x, x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n};$$

la fonction $D(\lambda)$ est donc *du genre zéro*

$$(26) \qquad D(\lambda) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right).$$

Il est clair que ces derniers résultats s'appliquent aussi aux noyaux négatifs, et plus généralement aux noyaux dont toutes les valeurs singulières ont le même signe, à l'exception d'un nombre fini d'entre elles. Tout noyau de cette espèce est, en effet, la somme de deux noyaux symétriques orthogonaux, dont l'un est positif ou négatif, et dont l'autre n'a qu'un nombre fini de valeurs singulières.

593. **Noyaux de Schmidt.** — M. E. Schmidt a remarqué que les propriétés du noyau symétrique s'étendent facilement aux noyaux de la forme $A(x)\,S(x, y)$, S étant symétrique et $A(x)$ gardant un signe constant dans l'intervalle (a, b). Plus généralement, soit $K(x, y) = A(x)\,B(y)\,S(x, y)$, $S(x, y)$ étant symétrique, et le produit $A(x)\,B(x)$ étant toujours positif dans l'intervalle (a, b); nous supposerons de plus, pour préciser, que ces fonctions $A(x)$, $B(x)$ sont bornées. On peut écrire

$$(27) \qquad \begin{aligned} K(x, y) &= \sqrt{\frac{A(x)\,B(y)}{A(y)\,B(x)}} \times S(x, y)\sqrt{A(x)\,A(y)\,B(x)\,B(y)} \\ &= \sqrt{\frac{A(x)\,B(y)}{A(y)\,B(x)}}\,S_1(x, y); \end{aligned}$$

soit $\Gamma_1(x, y; \lambda)$ le noyau résolvant relatif au noyau symétrique auxiliaire $S_1(x, y)$. Ce noyau résolvant satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(28) \qquad \Gamma_1(x, y; \lambda) = S_1(x, y) + \lambda\int_a^b S_1(x, s)\,\Gamma_1(s, y; \lambda)\,ds.$$

On a donc aussi, en posant

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \sqrt{\frac{A(x)\,B(y)}{A(y)\,B(x)}}\,\Gamma_1(x, y; \lambda),$$

$$(29) \qquad \Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda\int_a^b K(x, s)\,\Gamma(s, y; \lambda)\,ds,$$

car on a évidemment

$$S_1(x, s)\,\Gamma_1(s, y; \lambda)\sqrt{\frac{A(x)\,B(y)}{A(y)\,B(x)}} = K(x, s)\,\Gamma(s, y; \lambda).$$

La dernière relation (29) est celle qui caractérise le noyau résolvant relatif au noyau $K(x, y)$; et par suite *le noyau résolvant relatif à* $K(x, y)$ *est égal au produit*

$$\sqrt{\frac{A(x)\,B(y)}{A(y)\,B(x)}}\,\Gamma_1(x, y;\,\lambda),$$

$\Gamma_1(x, y; \lambda)$ *étant le noyau résolvant relatif au noyau symétrique* $S_1(x, y)$ (*Comptes rendus,* t. 146, p. 327).

Il est essentiel de remarquer que tous les noyaux déduits de $S_1(x, y)$ par itérations successives contiennent en facteur le radical $\sqrt{A(x)\,B(x)\,A(y)\,B(y)}$, de sorte que $\Gamma_1(x, y; \lambda)$ est lui-même divisible par ce radical. La fonction $\Gamma(x, y; \lambda)$ contient donc en facteur $A(x)\,B(y)$, et l'intégrale qui figure dans la formule (29) a bien une valeur finie.

Les pôles de $\Gamma_1(x, y; \lambda)$ sont réels et simples; il en est donc de même des pôles de $\Gamma(x, y; \lambda)$. Si l'on a décomposé d'une façon quelconque S_1 en deux noyaux orthogonaux $h_1(x, y)$, $h_2(x, y)$, on vérifie immédiatement que les deux noyaux

$$h_1(x, y)\sqrt{\frac{A(x)\,B(y)}{A(y)\,B(x)}} \qquad \text{et} \qquad h_2(x, y)\sqrt{\frac{A(x)\,B(y)}{A(y)\,B(x)}}$$

sont eux-mêmes orthogonaux. Les parties principales se correspondent donc dans les deux noyaux résolvants $L_1(x, y; \lambda)$ et $\Gamma(x, y; \lambda)$. Soit $\theta_i(x)$ une fonction fondamentale de $S_1(x, y)$ correspondant à un pôle λ_i; elle est évidemment de la forme $\sqrt{A(x)\,B(x)}\,u_i(x)$. L'expression

$$\frac{\sqrt{A(x)\,B(x)\,A(y)\,B(y)}\,u_i(x)\,u_i(y)}{\lambda_i}$$

est un noyau canonique relatif à la valeur singulière λ_i pourvu qu'on ait

$$\int_a^b A(x)\,B(x)\,u_i^2(x)\,dx = 1.$$

A ce noyau canonique correspond pour $K(x, y)$ le noyau canonique

$$\frac{A(x)\,B(y)\,u_i(x)\,u_i(y)}{\lambda_i},$$

de sorte que $\varphi_i(x) = A(x)\, u_i(x)$ et $\psi_i(x) = B(x)\, u_i(x)$ sont deux fonctions fondamentales associées des deux noyaux $K(x, y)$ et $K(y, x)$. Ces deux fonctions sont liées par la relation

$$A(x)\,\psi_i(x) = B(x)\,\varphi_i(x),$$

ce qui permet d'énoncer la propriété suivante : *Si* $\varphi(x)$ *est une fonction fondamentale du noyau* $K(x, y)$, $\psi(x) = \frac{B(x)}{A(x)}\varphi(x)$ *est une fonction fondamentale du noyau associé, pour la même valeur singulière.*

Cette propriété subsiste quel que soit le signe des fonctions $A(x)$, $B(x)$, et s'établit directement sans peine. De la formule

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b A(x)\, B(s)\, S(x, s)\, \varphi(s)\, ds$$

on tire, en effet, en posant $\varphi(x) = A(x)\,\pi(x)$,

$$\pi(x) = \lambda \int_a^b B(s)\, A(s)\, S(x, s)\, \pi(s)\, ds;$$

or, on serait conduit à la même équation en remplaçant $\psi(x)$ par $B(x)\,\pi(x)$ dans la formule

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b A(s)\, B(x)\, S(x, s)\, \psi(s)\, ds.$$

Cette propriété permettrait aisément de démontrer que tous les pôles de $\Gamma(x, y; \lambda)$ sont réels et simples lorsque le produit $A(x)\, B(x)$ est positif. Supposons, en effet, que $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ soient deux pôles imaginaires conjugués; $u + iv$ étant une fonction fondamentale de $K(x, y)$ correspondant au premier pôle, $\frac{B(x)}{A(x)}(u - iv)$ sera une fonction fondamentale de l'équation associée pour le second pôle, et la condition d'orthogonalité ne peut être satisfaite lorsque A et B sont du même signe. Un pôle quelconque ne peut être un pôle multiple, puisque les deux fonctions fondamentales associées $\varphi(x)$ et $\psi = \frac{B(x)\,\varphi(x)}{A(x)}$ ne peuvent être orthogonales pour la même raison (n° 578). A chaque propriété des noyaux symétriques correspond de la même façon une propriété des noyaux $A(x)\, B(y)\, S(x, y)$, où $A(x)\, B(x) \geqq 0$. Par exemple, on démontrera, comme au n° 587, que si le noyau $A(x)\, B(y)\, S(x, y)$ n'admet qu'un nombre fini de valeurs singulières, ce noyau est le

produit de $A(x)B(y)$ par un noyau $S(x, y)$ de la forme (3), qui n'admet lui-même qu'un nombre fini de valeurs singulières.

Considérons, en particulier, un noyau de la forme $S(x,y)B(y)$, B étant une fonction bornée *positive*. Les fonctions fondamentales de ce noyau, et du noyau associé, forment un système biorthogonal de fonctions (φ_i, ψ_i), qu'on peut supposer ramené à la forme normale (n° 580). D'après ce que nous venons de démontrer, les fonctions correspondantes φ_i et ψ_i sont liées par la relation $\psi_i(x) = B(x)\varphi_i(x)$, et les conditions qui expriment l'orthogonalité prennent la forme

$$(30)\quad \int_a^b B(x)\varphi_i^2(x)\,dx = 1, \qquad \int_a^b B(x)\varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx = 0 \qquad (i \neq k).$$

Étant donnée une suite de fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ satisfaisant à ces conditions, nous dirons, pour abréger, qu'elles forment un système orthogonal *relativement à* $B(x)$. Si une fonction $f(x)$ est développable en série uniformément convergente de fonctions $\varphi_i(x)$ dans l'intervalle (a, b), le coefficient f_i de $\varphi_i(x)$ dans cette série s'obtient encore comme pour une série de Fourier et a pour expression, d'après les relations (30),

$$(31)\qquad f_i = \int_a^b B(x)f(x)\varphi_i(x)\,dx;$$

quelle que soit la fonction $f(x)$, nous dirons que les coefficients f_i donnés par cette formule sont les coefficients de Fourier de $f(x)$ relativement au système de fonctions $\varphi_i(x)$. L'inégalité évidente

$$\int_a^b B(x)[f(x) - f_1\varphi_1(x) - \ldots - f_n\varphi_n(x)]^2\,dx \geqq 0$$

permet d'étendre à ces coefficients l'inégalité de Bessel [1]

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \leqq \int_a^b B(x)f^2(x)\,dx.$$

La série $\Sigma f_i\varphi_i(x)$, déduite d'une fonction arbitraire $f(x)$, ne

[1] On peut remarquer d'ailleurs que les fonctions $\Phi_i(x) = \varphi_i(x)\sqrt{B(x)}$ forment un système orthogonal lorsque les fonctions $\varphi_i(x)$ satisfont aux relations (30), et que les coefficients de Fourier de $f(x)$ relatifs au système de fonctions $\varphi_i(x)$ sont identiques aux coefficients de Fourier de $f(x)\sqrt{B(x)}$ relatifs au système orthogonal des $\Phi_i(x)$.

représente pas nécessairement cette fonction, mais il en est ainsi des fonctions de la forme

(32) $$f(x) = \int_a^b S(x, s)\,B(s)\,h(s)\,ds,$$

où $h(s)$ est une fonction de carré intégrable. Cette égalité peut s'écrire, en effet,

$$\sqrt{B(x)}\,f(x) = \int_a^b S(x, s)\sqrt{B(x)\,B(s)}\,\{\sqrt{B(s)}\,h(s)\}\,ds$$

et, par suite, $f(x)\sqrt{B(x)}$ (n° 589) peut être développée en série uniformément convergente ordonnée suivant les fonctions fondamentales du noyau $S(x, y)\sqrt{B(x)\,B(y)}$. Ces fonctions fondamentales, on vient de le voir, s'obtiennent en multipliant par $\sqrt{B(x)}$ les fonctions fondamentales du noyau $S(x, y)\,B(y)$. La fonction $f(x)$ peut donc être développée en série uniformément convergente ordonnée suivant les fonctions fondamentales $\varphi_i(x)$ du noyau $S(x, y)\,B(y)$.

Pour une fonction de la forme

(33) $$f(x) = \int_a^b B(x)\,S(x, s)\,g(s)\,ds,$$

on aura de même

$$\frac{f(x)}{\sqrt{B(x)}} = \int_a^b S(x, s)\sqrt{B(x)\,B(s)}\,\frac{g(s)}{\sqrt{B(s)}}\,ds$$

et, par suite, $f(x)$ sera développable en une série uniformément convergente de la forme

$$\Sigma f_i\,B(x)\,\varphi_i(x) = \Sigma f_i\,\psi_i(x).$$

594. Extension de l'inégalité de Bessel aux systèmes biorthogonaux. — Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ deux suites de fonctions réelles formant un système biorthogonal et normal (n° 573), c'est-à-dire vérifiant les relations

(34) $$\int_a^b \varphi_i(x)\,\psi_i(x)\,dx = 1, \qquad \int_a^b \varphi_i(x)\,\psi_k(x)\,dx = 0 \qquad (i \neq k).$$

Si une fonction $f(x)$ est développable en une série uniformément convergente de fonctions $\varphi_i(x)$, on peut encore obtenir le

coefficient f_i de $\varphi_i(x)$ dans cette série en multipliant les deux membres de la relation

$$(35) \qquad f(x) = f_1\varphi_1(x) + \ldots + f_i\varphi_i(x) + \ldots$$

par $\psi_i(x)$ et intégrant terme à terme entre les limites a et b. On trouve ainsi l'expression

$$(36) \qquad f_i = \int_a^b f(x)\psi_i(x)\,dx;$$

quelle que soit la fonction $f(x)$, nous dirons que la série $\Sigma f_i\varphi_i(x)$, où les coefficients f_i ont les valeurs (36), est la série de Fourier de $f(x)$ relativement au système des fonctions φ_i.

Remarquons que tout système biorthogonal peut être ramené à une forme normale d'une infinité de façons, car les relations (34) ne changent pas quand on remplace $\varphi_i(x)$ par $C_i\varphi_i(x)$, et $\psi_i(x)$ par $\frac{1}{C_i}\psi_i(x)$, quelle que soit la constante C_i. Supposons, par exemple, qu'il existe un noyau symétrique *positif* $S(x, y)$ tel qu'on ait, quel que soit i,

$$\int_a^b S(x, y)\varphi_i(y)\,dy = C_i\psi_i(x),$$

C_i étant une constante non nulle. Les relations (34) deviennent

$$\int_a^b\int_a^b S(x, y)\varphi_i(x)\varphi_i(y)\,dx\,dy = C_i,$$
$$\int_a^b\int_a^b S(x, y)\varphi_i(x)\varphi_k(y)\,dx\,dy = 0$$
$$(i \neq k);$$

le noyau $S(x, y)$ étant positif, les constantes C_i sont nécessairement positives et, en remplaçant $\varphi_i(x)$ par $\varphi_i(x)\sqrt{C_i}$, ces relations (34) sont remplacées par les suivantes, où les fonctions ψ_i ne figurent plus explicitement :

$$(34)' \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b\int_a^b S(x, y)\varphi_i(x)\varphi_i(y)\,dx\,dy = 1, \\ \displaystyle\int_a^b\int_a^b S(x, y)\varphi_i(x)\varphi_k(y)\,dx\,dy = 0 \\ (i \neq k). \end{cases}$$

Les formules (36) deviennent de même

$$(36)' \quad f_i = \int_a^b f(x)\,\psi_i(x)\,dx = \int_a^b \int_a^b S(x, y) f(x)\,\varphi_i(y)\,dx\,dy.$$

Nous dirons qu'un système de fonctions $\varphi_i(x)$ vérifiant les relations (34)' est un système orthogonal et normal, relativement au noyau $S(x, y)$. De tout système biorthogonal, vérifiant les relations (34), on peut déduire d'une infinité de façons un système orthogonal relatif à un noyau symétrique positif. On peut, par exemple, procéder comme il suit : choisissons une suite de nombres positifs μ_n de telle façon que la série

$$(37) \qquad S(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi_n(x)\,\psi_n(y)}{\mu_n}$$

soit absolument et uniformément convergente, ce qui peut se faire d'une infinité de façons. Il est clair que $\int_a^b S(x, y)\,\varphi_n(y)\,dy$ est égal à $\frac{\psi_n(x)}{\mu_n}$, et par suite on peut ramener les relations d'orthogonalité à la forme (34)' en remplaçant $\varphi_i(x)$ par $\sqrt{\mu_i}\,\varphi_i(x)$. Or le noyau $S(x, y)$ est positif, car on vérifie facilement que l'intégrale (14) du n° 590 est positive pour $K(x, y) = S(x, y)$ quelle que soit $h(x)$.

Soit $f(x)$ une fonction de carré intégrable, le noyau $S(x, y)$ étant positif, on a (n° 590)

$$\int_a^b \int_a^b S(x, y) \left[f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i\,\varphi_i(x) \right] \left[f(y) - \sum_{i=1}^{n} f_i\,\varphi_i(y) \right] dx\,dy \geqq 0,$$

les coefficients f_i étant donnés par la formule (36). En développant cette inégalité, et tenant compte des relations (34), elle prend la forme équivalente

$$(38) \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \leqq \int_a^b \int_a^b S(x, y) f(x) f(y)\,dx\,dy,$$

tout à fait analogue à l'inégalité de Bessel. Si la fonction $f(x)$ est de carré intégrable, le second membre a une valeur finie, et par suite *la série des carrés des coefficients f_i est convergente.*

595. Noyaux de la forme $A(x)\, S(x, y)$. — Les propriétés si simples des noyaux $A(x)\, S(x, y)$, où $A(x)$ est positif, ne s'étendent pas aux noyaux de même forme, lorsque $A(x)$ change de signe dans l'intervalle (a, b). Par exemple, le noyau $\cos x \sin x \sin y$, où $a = 0$, $b = \pi$, est orthogonal à lui-même. Cependant on peut étendre les propriétés les plus importantes des noyaux symétriques, sauf dans un cas singulier, aux noyaux de cette espèce où $S(x, y)$ est un noyau *positif* [1], quel que soit le signe du coefficient $A(x)$ dans l'intervalle (a, b).

D'après une remarque déjà faite (n° 593), si $\varphi(x)$ est une solution de l'équation homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b A(x)\, S(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

la fonction $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{A(x)}$ est une solution de l'équation associée

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b S(x, s)\, A(s)\, \psi(s)\, ds.$$

Cette fonction $\psi(x)$ est encore égale à $\lambda \int_a^b S(x, s)\, \varphi(s)\, ds$, et en supprimant le facteur constant λ, on peut énoncer le résultat comme il suit : *Si $\varphi(x)$ est une fonction fondamentale du noyau $K(x, y) = A(x)\, S(x, y)$ pour une valeur singulière λ, la fonction*

$$\psi(x) = \int_a^b S(x, s)\, \varphi(s)\, ds \tag{39}$$

est une fonction fondamentale du noyau associé pour la même valeur singulière.

On déduit aisément de ce résultat les propriétés suivantes :

1° *Toutes les valeurs singulières sont réelles.* En effet, s'il y avait deux valeurs singulières imaginaires conjuguées, on aurait pour les deux noyaux $K(x, y)$ et $K(y, x)$ deux fonctions fonda-

[1] La fonction $A(x)$ est supposée bornée, mais peut avoir un nombre fini de discontinuités entre a et b. Les équations intégrales de cette espèce ont d'abord été étudiées par M. Hilbert (*Göttingen Nachrichten*, 1906, p. 462) qui les appelle équations *polaires* ou *de troisième espèce*. Les démonstrations du texte ont été indiquées par M. Marty (*Comptes rendus*, 28 février et 25 avril 1910). *Voir* aussi Fubini (*Annali di Matematica*, 3e série, t. 17).

mentales $\varphi(x) = u(x) + iv(x)$ et

$$\psi(x) = \int_a^b S(x, y)[u(y) - iv(y)]\,dy$$

qui devraient être orthogonales, ce qui exigerait qu'on eût

$$\int_a^b \int_a^b S(x, y)[u(x) + iv(x)][u(y) - iv(y)]\,dx\,dy = 0,$$

et par suite, en prenant la partie réelle,

$$\int_a^b \int_a^b S(x, y)\{u(x)u(y) + v(x)v(y)\}\,dx\,dy = 0.$$

Le noyau $S(x, y)$ étant positif, le premier membre est la somme de deux intégrales positives ou nulles. Pour que chacune d'elles soit nulle, il faut, d'après la formule (14) du n° 590, que $u(x)$ et $v(x)$ soient orthogonales à toutes les fonctions fondamentales du noyau et par suite au noyau $S(x, y)$ lui-même. On aurait donc aussi $\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° *Tous les pôles de la résolvante sont simples.* — Si $\varphi(x)$ est une fonction fondamentale pour un pôle c, la fonction $\psi(x)$ donnée par la formule (39) est fonction fondamentale pour le noyau associé, et nous venons de voir que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ne peuvent être orthogonales, ce qui suffit à prouver que le pôle c est un pôle simple (n° 578).

On peut encore raisonner comme pour les noyaux symétriques (n° 587). Soit $\varphi(x)$ une fonction fondamentale correspondant à la valeur singulière c, telle qu'on ait

$$\int_a^b \int_a^b S(x, y)\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy = 1.$$

On vérifie aisément, d'après les propriétés précédentes, que les deux noyaux

$$\frac{1}{c}\varphi(x)\int_a^b S(y, s)\varphi(s)\,ds, \qquad K_1 = K(x, y) - \frac{1}{e}\varphi(x)\int_a^b S(y, s)\varphi(s)\,ds$$

sont orthogonaux. Ce nouveau noyau $K_1(x, y)$ est encore de la forme $A(x)S_1(x, y)$. S'il admet encore la valeur singulière c, on peut lui appliquer la même décomposition, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un noyau n'admettant plus la valeur sin-

gulière c. Le même raisonnement prouve qu'on peut choisir, pour le noyau $K(x, y)$, un système de fonctions fondamentales vérifiant les relations $(34)'$, c'est-à-dire formant un système orthogonal relativement à $S(x, y)$. S'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs singulières, le noyau est de la forme

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{A(y)\lambda_i} + K_1(x, y),$$

le noyau $K_1(x, y)$ sans valeurs singulières étant encore égal au produit de $A(x)$ par un noyau symétrique.

L'exemple du noyau $\cos x(\sin x \sin y)$ montre qu'un noyau polaire n'a pas toujours de valeur singulière. L'énoncé du n° 587 doit être modifié comme il suit :

3° *Si le premier noyau itéré* $K^{(2)}(x, y)$ *n'est pas identiquement nul, le noyau polaire* $A(x)S(x, y)$ *admet au moins une valeur singulière.*

La démonstration est très analogue à celle qui a été donnée pour les noyaux symétriques (n° 587). Pour le développement de cette démonstration, ainsi que pour l'extension du théorème d'Hilbert, nous renverrons aux Notes de M. Marty. Dans le cas particulier où $S(x, y)$ est non seulement positif, mais *défini*, et par suite *fermé*, le noyau $K^{(2)}(x, y)$ ne peut être identiquement nul.

596. **Noyaux symétrisables.** — Les noyaux de M. Hilbert sont des cas particuliers des noyaux symétrisables de Marty (*Comptes rendus*, 6 juin 1910). Soient $K(x, y)$, $G(x, y)$ deux noyaux quelconques ; on dit que les deux noyaux

$$H_1(x, y) = \int_a^b G(x, s)K(s, y)\,ds, \qquad H_2(x, y) = \int_a^b K(x, s)G(s, y)\,ds,$$

en général distincts, s'obtiennent par la composition de $K(x, y)$ avec $G(x, y)$, à gauche pour H_1, à droite pour H_2. Si l'on peut choisir pour $G(x, y)$ un noyau symétrique, de telle façon que H_1 ou H_2 soit lui-même symétrique, le noyau $K(x, y)$ est dit *symétrisable* à droite ou à gauche. Il est clair que le noyau $A(x)$ $S(x, y)$ est symétrisable à gauche par composition avec le noyau $S(x, y)$.

Tout noyau $K(x, y)$, *dont la résolvante n'a que des pôles réels et simples, est symétrisable des deux côtés.*

Nous avons vu, en effet, que les fonctions fondamentales associées (φ_i, ψ_i)

forment un système biorthogonal, qu'on peut supposer normal. Si l'on prend des constantes μ_n choisies de telle façon que la série

$$S(x,y)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\psi_i(x)\psi_i(y)}{\mu_i}$$

soit absolument et uniformément convergente, ce qu'on peut faire d'une infinité de manières, le noyau $K(x, y)$ donnera par composition à gauche avec $S(x, y)$ un noyau symétrique. Nous avons en effet

$$\int_a^b S(x, s)K(s, y)\,ds=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\psi_i(x)}{\mu_i}\int_a^b \psi_i(s)\,K(s, y)\,ds=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\psi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i\mu_i},$$

λ_i étant la valeur singulière correspondant à φ_i. Il est évident qu'on pourrait former de même une infinité de noyaux symétriques dont la composition avec $K(x, y)$ dans l'ordre inverse donnerait un nouveau noyau symétrique.

Si l'on prend les constantes μ_i positives, le noyau $S(x, y)$ sera positif, et, d'après la façon dont on le forme, il n'est orthogonal à aucune des fonctions fondamentales φ_i de $K(x, y)$.

La réciproque ne peut être énoncée d'une façon aussi absolue, même en supposant le noyau $S(x, y)$ positif. Par exemple, en composant le noyau symétrique $\varphi(x)\varphi(y)$ avec le noyau $K(x, y)+\varphi(x)\varphi(y)$, où le noyau $K(x, y)$ satisfait à la condition $\int_a^b K(s, y)\varphi(s)\,ds=0$, on obtient un noyau symétrique $C\varphi(x)\varphi(y)$, et cependant le noyau $K(x, y)$ peut avoir des valeurs singulières quelconques.

Supposons que $K(x, y)$ donne par composition à gauche avec un noyau symétrique $S(x, y)$ un nouveau noyau symétrique

$$S_1(x, y)=\int_a^b S(x, s)\,K(s, y)\,ds;$$

on peut étendre au noyau $K(x, y)$ la propriété établie pour le noyau polaire : *Si $\varphi(x)$ est une solution de l'équation homogène*

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds, \tag{40}$$

$\psi(x)=\int_a^b S(x, t)\,\varphi(t)\,dt$ est solution de l'équation homogène associée.

De la relation (40) on tire en effet

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\int_a^b S(x, t)\,\varphi(t)\,dt\\ &=\lambda\int\int S(x, t)\,K(t, s)\,\varphi(s)\,ds\,dt=\lambda\int_a^b S_1(x, s)\,\varphi(s)\,ds,\end{aligned}$$

ce qu'on peut encore écrire, en vertu de la symétrie de S_1,

$$\psi(x) = \lambda \int\int S(s, t) K(t, x) \varphi(s) \, ds \, dt = \lambda \int_a^b K(t, x) \psi(t) \, dt,$$

d'où résulte la propriété énoncée.

Cela étant, supposons que $\alpha + \beta i (\beta \neq 0)$ soit une valeur singulière, $u + iv$ une fonction fondamentale correspondante;

$$\psi(x) = \int_a^b S(x, t) \{ u(t) - iv(t) \} \, dt$$

sera une fonction fondamentale pour l'équation associée, correspondant à la valeur singulière $\alpha - \beta i$, et la condition d'orthogonalité donne

$$\int\int S(x, t) \{ u(x) + iv(x) \} \{ u(t) - iv(t) \} \, dx \, dt = 0$$

ou

$$\int\int S(x, t) u(x) u(t) \, dx \, dt + \int\int S(x, t) v(x) v(t) \, dx \, dt = 0.$$

Pour qu'on puisse affirmer qu'une telle relation est impossible, sans autre hypothèse sur $K(x, y)$, on doit supposer que le noyau $S(x, y)$ est *défini;* il ne suffit plus que ce noyau soit *positif* comme au n° 595. Il pourrait se faire, en effet, que les fonctions u et v, et par suite $u + iv$, soient orthogonales au noyau $S(x, y)$, ce qui peut arriver pour une fonction fondamentale du noyau $K(x, y)$. On a donc le résultat suivant :

Si un noyau $K(x, y)$ est symétrisable par composition avec un noyau symétrique DÉFINI, *tous les pôles de la résolvante sont réels et simples.*

Ce dernier point résulte de ce que les deux fonctions fondamentales $\varphi(x)$ et $\psi(x) = \int S(x, s) \varphi(s) ds$, correspondant à une même valeur singulière, ne peuvent être orthogonales.

Tout noyau $K(x, y)$, symétrisable par composition avec un noyau symétrique défini, a au moins une valeur singulière.

Nous renverrons à la Note de M. Marty pour la démonstration (*Exercice 4*).

597. **Noyaux symétriques gauches.** — Si le noyau $K^{(n)}(x, y)$ déduit de $K(x, y)$ par itération est un noyau symétrique, on peut affirmer que $K(x, y)$ a au moins une valeur singulière, et que les puissances $n^{\text{ièmes}}$ de toutes les valeurs singulières sont des nombres réels. Considérons, en particulier, un noyau *symétrique gauche* (Lalesco), c'est-à-dire tel que

$$K(y, x) = - K(x, y).$$

Le premier noyau itéré est évidemment symétrique, et par suite tous les pôles du noyau résolvant de $K(x, y)$ sont simples, réels ou de la forme μi, μ étant réel. *Il ne peut y avoir de pôle réel.* Soit, en effet, $\varphi(x)$ une fonction fondamentale réelle pour un pôle réel c. Les relations

$$\varphi(x) = c\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = -c\int_a^b K(s, x)\,\varphi(s)\,ds$$

prouvent que $-c$ est aussi un pôle de la résolvante et $\varphi(x)$ une fonction fondamentale pour l'équation associée correspondant à ce pôle. Ces deux fonctions devant être orthogonales, on aurait $\varphi(x) = 0$; il ne peut donc y avoir de pôle réel, et *tous les pôles sont de la forme* μi.

Soient μi un pôle, $u(x) + iv(x)$ une fonction fondamentale correspondante; $u(x) + iv(x)$ est aussi une fonction fondamentale du noyau associé eorrespondant au pôla $-\mu i$, et la condition d'orthogonalité donne

$$\int_a^b u^2\,dx = \int_a^b v^2\,dx, \qquad \int_a^b uv\,dx = 0.$$

La fonction $u - iv$ est une fonction fondamentale de $K(x, y)$ pour le pôle $-\mu i$ et de $K(y, x)$ pour le pôle μi.

Si l'on a choisi u et v de façon qu'on ait $\int_a^b u^2 dx = 1$, on vérifie aisément le noyau

$$k(x, y) = \frac{v(x)\,u(y) - u(x)\,v(y)}{\mu}$$

et le noyau $K(x, y) - k(x, y) = K_1(x, y)$ sont orthogonaux. Or, $k(x, y)$ est un noyau symétrique gauche qui admet les deux pôles simples μi et $-\mu i$; $K_1(x, y)$ est donc aussi un noyau symétrique gauche. Si μi est encore une valeur singulière pour ce noyau, au bout d'un nombre fini de transformations de ce genre, on pourra écrire

$$K(x, y) = \sum_{p=1}^{m} \frac{v_p(x)\,u_p(y) - u_p(x)\,v_p(y)}{\mu} + K_1(x, y),$$

$K_1(x, y)$ étant un nouveau noyau symétrique gauche qui n'admet plus les valeurs singulières μi et $-\mu i$. Si $K(x, y)$ n'admet qu'un nombre fini de valeurs singulières, il est donc de la forme

$$K(x, y) = \sum_{h=1}^{n} \frac{v_h(x)\,u_h(y) - u_h(x)\,v_h(y)}{\mu_h}.$$

Dans le cas où il existe une infinité de valeurs singulières, si la série dont le terme général est formé par la somme de deux noyaux principaux conjugués est uniformément convergente, sa somme est encore égale au

noyau $K(x, y)$. Le premier noyau itéré $K^{(2)}(x, y)$ étant négatif, on peut lui appliquer le résultat de M. Mercer; s'il est continu, ce noyau est donc égal à la somme de la série uniformément convergente

$$K^{(2)}(x, y) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n(x)\,u_n(y) + v_n(x)\,v_n(y)}{\mu_n^2}.$$

Pour l'extension du théorème de Hilbert aux noyaux symétriques gauches, nous renverrons à l'Ouvrage de M. Lalesco.

598. **Fonctions fondamentales de Schmidt.** — M. Schmidt a rattaché à tout noyau non symétrique $K(x, y)$ deux systèmes orthogonaux de fonctions qui n'ont, en général, aucune relation simple avec les fonctions fondamentales de ce même noyau considérées jusqu'à présent. Pour M. Schmidt, deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ forment un couple de fonctions fondamentales associées, si elles satisfont aux deux relations

$$(41) \quad \varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\,\psi(s)\,ds, \qquad \psi(x) = \lambda \int_a^b K(s, x)\,\varphi(s)\,ds;$$

la valeur de la constante λ, *différente de zéro*, est une valeur singulière du noyau $K(x, y)$.

Il existe toujours des couples de fonctions fondamentales; en effet, l'élimination de $\psi(x)$ entre les deux équations (41) conduit à l'équation intégrale homgène *à noyau symétrique*

$$(42) \qquad \varphi(x) = \lambda^2 \int_a^b \overline{K(x, s)}\,\varphi(s)\,ds,$$

où l'on a posé

$$\overline{K(x, s)} = \int_a^b K(x, t)\,K(s, t)\,dt.$$

L'élimination de $\varphi(x)$ conduit de même à une autre équation de même forme à noyau symétrique

$$(43) \qquad \psi(x) = \lambda^2 \int_a^b \underline{K(x, s)}\,\psi(s)\,ds,$$

où l'on a posé

$$\underline{K(x, s)} = \int_a^b K(t, x)\,K(t, s)\,dt.$$

Les deux noyaux $\overline{K(x, y)}$, $\underline{K(x, y)}$ sont positifs en supposant toujours $b > a$; on a, par exemple,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \int_a^b \overline{K(x, y)}\, h(x)\, h(y)\, dx\, dy \\
&\quad = \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, K(y, t)\, h(x)\, h(y)\, dx\, dy\, dt \\
&\quad = \int_a^b dt \left[\int_a^b K(x, t)\, h(x)\, dx \right]^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$

D'après la façon dont on déduit les équations (42) et (43) du système (41), si ce système admet les solutions $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ pour une valeur λ_i du paramètre, λ_i^2 est une valeur singulière pour chacun des noyaux $\overline{K(x, y)}$, $\underline{K(x, y)}$, et φ_i, ψ_i sont des fonctions fondamentales pour ces deux noyaux respectivement. Inversement, soit c une valeur singulière pour l'un de ces noyaux, $\overline{K(x, y)}$ par exemple; ce nombre c est toujours positif. Soit $\varphi(x)$ une fonction fondamentale correspondante. Si l'on pose

$$\psi(x) = \sqrt{c} \int_a^b K(s, x)\, \varphi(s)\, ds,$$

on remonte aisément des deux équations

$$\varphi(x) = c \int_a^b \overline{K(x, t)}\, \varphi(t)\, dt, \qquad \psi(x) = \sqrt{c} \int_a^b K(t, x)\, \varphi(t)\, dt$$

aux équations (41), où l'on aurait $\lambda = \sqrt{c}$. Il revient donc au même de chercher tous les systèmes de solutions des équations (41) ou de chercher toutes les valeurs singulières et les fonctions fondamentales de l'un des noyaux symétriques $\overline{K(x, y)}$, $\underline{K(x, y)}$. Toutes ces valeurs singulières, les mêmes pour les deux noyaux, étant positives, nous les représenterons par $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots$, en convenant de prendre $\lambda_i > 0$. Cela est permis, puisque le système (41) ne change pas quand on change λ en $-\lambda$ à condition de remplacer φ par $-\varphi$. Cela étant, soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i, \ldots$ le système orthogonal et normal formé par les fonctions fondamentales du noyau $\overline{K(x, y)}$. A la fonction $\varphi_i(x)$, la seconde formule (41), où l'on prend $\lambda = \lambda_i$, fait correspondre une fonction

fondamentale $\psi_i(x)$ du noyau $\underline{K(x, y)}$ relative à la même valeur singulière λ_i^2. Ces fonctions $\psi_i(x)$ forment aussi un système orthogonal et normal. Des relations

$$\psi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(t, x)\,\varphi_i(t)\,dt, \qquad \psi_k(x) = \lambda_k \int_a^b K(s, x)\,\varphi_k(s)\,ds$$

on tire, en effet,

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi_i(x)\,\psi_k(x)\,dx &= \lambda_i\lambda_k \int\int\int K(t, x)\,K(s, x)\,\varphi_i(t)\,\varphi_k(s)\,dx\,ds\,dt \\ &= \lambda_i\lambda_k \int\int \overline{K(t, s)}\,\varphi_i(t)\,\varphi_k(s)\,dt\,ds \\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda_k}\int_a^b \varphi_i(t)\,\varphi_k(t)\,dt;\end{aligned}$$

l'intégrale a donc pour valeur zéro ou un, suivant qu'on a $i \neq k$, ou $i = k$. Nous représenterons par f_i et f_i^* les coefficients des deux séries de Fourier déduites d'une fonction $f(x)$, relatives à ces deux systèmes orthogonaux

$$f_i = \int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx, \qquad f_i^* = \int_a^b f(x)\,\psi_i(x)\,dx.$$

Le théorème de Hilbert a été étendu aussi par M. Schmidt aux fonctions de la forme

$$(44) \qquad f(x) = \int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds,$$

où $h(x)$ est une fonction de carré intégrable, $K(x, y)$ un noyau non symétrique continu, ou ne présentant pas d'autres discontinuités que celles qui ont été spécifiées plus haut; la fonction $f(x)$ est alors continue. *Toute fonction de cette espèce est développable en une série uniformément convergente de fonction $\varphi_i(x)$.*

La démonstration comprend encore deux parties. Le coefficient f_i a pour expression

$$f_i = \int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi_i(x)\,h(s)\,ds\,dx = \frac{1}{\lambda_i}\int_a^b \psi_i(s)\,h(s)\,ds = \frac{h_i^*}{\lambda_i};$$

d'autre part, $\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}$ est le coefficient de $\psi_i(y)$ dans la série de Fourier déduite de $K(x, y)$, où x est regardée comme une cons-

tante, car

$$\int_a^b \mathrm{K}(x, y)\,\psi_i(y)\,dy = \frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(x).$$

Les deux séries $\sum (h_i^\star)^2$, $\sum \left\{\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right\}^2$ étant convergentes, on en conclut (*voir* n° 589) que la série

$$(45)\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{h_i^\star}{\lambda_i}\varphi_i(x)$$

est absolument et uniformément convergente. La différence

$$\mathrm{R}(x) = f(x) - \mathrm{S}(x)$$

est orthogonale à toutes les fonctions $\varphi_i(x)$ et par suite à $\mathrm{S}(x)$. Pour démontrer que $\mathrm{R}(x)$ est orthogonal à $f(x)$, partons de la relation

$$\int_a^b \mathrm{K}(x, t) f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{K}(x, t)\,\mathrm{S}(x)\,dx + \int_a^b \mathrm{K}(x, t)\,\mathrm{R}(x)\,dx,$$

qu'on peut écrire, en remplaçant $f(x)$ par l'expression (44),

$$\int_a^b \underline{\mathrm{K}(t, s)}\,h(s)\,ds = \int_a^b \mathrm{K}(x, t)\,\mathrm{S}(x)\,dx + \int_a^b \mathrm{K}(x, t)\,\mathrm{R}(x)\,dx.$$

La fonction $\int_a \underline{\mathrm{K}(t, s)}\,h(s)\,ds$ peut être représentée par une série uniformément convergente de fonctions $\psi_i(t)$, le coefficient de $\psi_i(t)$ étant $\frac{h_i^\star}{\lambda_i^2}$. D'autre part, on peut intégrer terme à terme le produit $\mathrm{K}(x, t)\,\mathrm{S}(x)$, ce qui donne

$$\int_a^b \mathrm{K}(x, t)\,\mathrm{S}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{h_i^\star}{\lambda_i^2}\psi_i(t).$$

On a donc $\int^b \mathrm{K}(x, t)\,\mathrm{R}(x)\,dx = 0$, et par suite

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{R}(x)\,dx = \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(x, s)\,\mathrm{R}(x)\,h(s)\,dx\,ds = 0;$$

on en déduit, comme au n° 589, que $\mathrm{R}(x)$ est nul, et la fonction $f(x)$ est égale à la somme $\mathrm{S}(x)$ de la série (45). De cette formule

on déduit aussi, en supposant que $h(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions de carrés intégrables

$$(46) \qquad \int_a^b \int_a^b K(x, y)\, g(x)\, h(y)\, dx\, dy = \sum_{i+1}^{+\infty} \frac{g_i h_i^*}{\lambda_i}.$$

On verrait de même que toute fonction de la forme

$$f(x) = \int_a^b K(s, x)\, g(s)\, ds$$

est développable en série uniformément convergente de fonctions $\psi_i(x)$

$$(47) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{g_i}{\lambda_i} \psi_i(x).$$

Appliquons en particulier la formule (45) au noyau symétrique

$$\overline{K(x, y)} = \int_a^b K(x, s)\, K(y, s)\, ds;$$

il suffit de prendre $h(s) = K(y, s)$, y étant regardé comme un paramètre; on trouve ainsi le développement

$$(48) \qquad \overline{K(x, y)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i^2},$$

qui est uniformément convergent par rapport à chacune des deux variables. Le raisonnement du n° 591 s'applique encore et prouve que la série est uniformément convergente par rapport à l'ensemble des deux variables, car le noyau $\overline{K(x, y)}$ est continu. On trouve de même le développement de $\underline{K(x, y)}$,

$$(49) \qquad \underline{K(x, y)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\psi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i^2}.$$

Remarques. — Un noyau non symétrique $K(x, y)$ est complètement déterminé par la connaissance des nombres λ_i, et des deux séries de fonctions orthogonales $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$. S'il y avait, en effet, deux noyaux de cette espèce, K et H, on aurait, pour

toute fonction $h(x)$ de carré intégrable,

$$\int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds = \int_a^b H(x, s)\, h(s)\, ds = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{h_i^* \varphi_i(x)}{\lambda_i},$$

et par suite

$$\int_a^b [K(x, s) - H(x, s)]\, h(s)\, ds = 0,$$

quelle que soit $h(x)$, ce qui exige qu'on ait $K = H$. Le noyau $K(x, y)$ est donc représenté par la série

$$(50) \qquad K(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varphi_i(x)\,\psi_i(y)}{\lambda_i},$$

si cette série est uniformément convergente.

On voit que les deux systèmes de fonctions orthogonales φ_i et ψ_i sont absolument indépendants l'un de l'autre ; l'un d'eux peut être complet sans que l'autre le soit. Ils peuvent avoir des fonctions communes en nombre quelconque, se correspondant ou non. Si le noyau $K(x, y)$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$, les deux noyaux $\overline{K(x, y)}$ et $\underline{K(x, y)}$ sont de la même forme. Il y a un nombre fini de valeurs singulières, et les trois séries (48), (49) et (50) se réduisent à des sommes d'un nombre limité de termes.

599. **Théorème de Fischer-Riesz.** — Étant donné un système orthogonal et normal S composé d'une infinité de fonctions $\varphi_i(x)$, à chacune desquelles on fait correspondre un nombre f_i, pour que ces nombres f_i soient les coefficients de Fourier d'une fonction $f(x)$ de carré intégrable, il est nécessaire, d'après l'inégalité de Bessel, que la série $\sum_{i=1}^{+\infty} f_i^2$ soit convergente.

Inversement, *si une série* $\sum_{i=1}^{+\infty} f_i^2$ *est convergente, il existe une fonction* $f(x)$ *de carré intégrable pour laquelle les coefficients de Fourier relatifs au système* S *sont les nombres* f_i.

Nous indiquerons seulement la marche générale suivie pour établir cet important théorème, démontré à la fois par M. E. Fischer et F. Riesz [1].

---

[1] E. Fischer, *Comptes rendus*, t. 144, 1907, p. 1022. — F. Riesz, *Göttinger Nachrichten*, 1907; *Comptes rendus*, t. 144, 1907, p. 615.

Il repose sur une proposition préliminaire, importante par elle-même, et relative à la *convergence en moyenne*. On dit qu'une suite de fonctions

$$(51) \qquad f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

converge en moyenne vers une fonction limite $f(x)$ dans un intervalle (a, b), si l'on a

$$(52) \qquad \lim_{n=\infty} \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx = 0.$$

Il est clair que la condition (52) est remplie, si $f_n(x)$ tend uniformément vers $f(x)$, mais elle peut l'être alors même que $f_n(x)$ n'a pas de limite au sens habituel du mot. Il existe, pour la convergence en moyenne d'une suite, un critérium analogue au critérium de Cauchy (I, n° 5) pour la convergence ordinaire. *Pour que la suite* (51) *soit convergente en moyenne, il faut et il suffit qu'on ait*

$$(53) \qquad \lim \int_a^b [f_{n+p} - f_n]^2 dx = 0,$$

lorsque les deux nombres n *et* $n+p$ *augmentent indéfiniment.*

1° La condition est *nécessaire*. On le déduit immédiatement de l'inégalité $\int_a^b [A - B]^2 dx \leqq 2 \int_a^b A^2 dx + 2 \int_a^b B^2 dx$.

2° La condition est *suffisante*. C'est là le point essentiel que nous admettrons [1]. Remarquons seulement que la fonction limite $f(x)$ n'est pas entièrement définie par la condition (52). Si une fonction $f(x)$ satisfait à cette condition, il en sera évidemment de même de toute fonction obtenue en lui ajoutant une fonction $u(x)$ telle que $\int_a^b u^2(x)\, dx = 0$. Inversement, si deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ satisfont à la condition (52), il est clair que l'intégrale $\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$ est nulle, car elle est moindre que tout nombre positif donné. On obtiendra donc toutes les fonctions vérifiant la condition (52) en ajoutant à l'une d'elles une fonction égale à zéro dans l'intervalle (a, b), sauf en tous les points d'un ensemble de mesure nulle.

Ce point étant admis, considérons un système orthogonal et normal S

---

(1) *Voir* à ce sujet : H. Weyl, *Mathematische Annalen*, Bd. 67, 1909, p. 225. — M. Plancherel, *Rendiconti di Palermo*, 1910, p. 282. — F. Riesz, *Comptes rendus*, t. 150, 1910, p. 1404. — Lalesco, p. 91-94. La démonstration exige, sur la mesure des ensembles et l'intégrale définie au sens de Lebesgue, des notions dont nous n'avons pas eu besoin jusqu'ici dans cet Ouvrage.

de fonctions $\varphi_i(x)$ et faisons correspondre à chacune de ces fonctions un nombre h_i tel que la série $\sum_{i=1}^{+\infty} h_i^2$ soit convergente. Posons

$$\Phi_n = h_1\varphi_1(x) + \ldots + h_n\varphi_n(x);$$

la suite des fonctions $\Phi_n(x)$ est convergente en moyenne. On a, en effet, d'après les relations d'orthogonalité,

$$\int_a^b [\Phi_{n+p} - \Phi_n]^2\,dx = h_{n+1}^2 + h_{n+2}^2 + \ldots + h_{n+p}^2,$$

expression qui tend vers zéro lorsque les deux nombres n et $n+p$ croissent indéfiniment. Soient $f(x)$ une fonction limite de cette suite de fonctions $\Phi_n(x)$, f_i le coefficient $\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx$; nous avons

$$(54)\quad \int_a^b [f(x) - \Phi_n(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{i=1}^n h_i f_i + \sum_{i=1}^n h_i^2$$
$$= \left[\int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^n f_i^2\right] + \sum_{i=1}^n [h_i - f_i]^2.$$

Le second membre est une somme de quantités positives; le premier membre tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment, il faut qu'on ait, quels que soient l'indice i et le nombre positif ε, $(h_i - f_i)^2 < \varepsilon$ et, par suite, $h_i = f_i$. Les coefficients de la série de Fourier déduite de $f(x)$ sont donc les nombres donnés h_i. Toute autre fonction ayant les mêmes coefficients de Fourier s'obtiendra en ajoutant à celle-là une fonction quelconque orthogonale à toutes les fonctions du système S. En particulier, si ce système est complet, une fonction ayant les mêmes coefficients de Fourier que $f(x)$ ne peut différer de $f(x)$ qu'en tous les points d'un ensemble de mesure nulle.

La condition de fermeture d'un système orthogonal (n° 588) se déduit aisément du théorème sur la convergence en moyenne. Le système S étant supposé complet, soient $f(x)$ une fonction quelconque de carré intégrable, f_i les coefficients de Fourier correspondants. La suite des fonctions

$$\Phi_n = f_1\varphi_1(x) + \ldots + f_n\varphi_n(x)$$

converge en moyenne vers une fonction limite $\Phi(x)$ qui ne peut différer de $f(x)$ qu'en tous les points d'un ensemble de mesure nulle, puisque les deux fonctions f et Φ ont les mêmes coefficients de Fourier, et que le système S est complet. L'intégrale $\int_a^b [f(x) - \Phi_n]^2\,dx$ tend donc vers

zéro lorsque n croît indéfiniment; or elle est égale à $\int_a^b f^2\,dx - \sum_1^n f_i^2$, et, en faisant croître n indéfiniment, on trouve bien l'équation de fermeture (9). Du même raisonnement on déduit encore la conclusion suivante : étant donné un système orthogonal complet, une fonction $f(x)$ n'est pas forcément représentée par la série de Fourier correspondante, mais la somme S_n des n premiers termes de cette série *converge en moyenne* vers $f(x)$, lorsque n croît indéfiniment.

600. **Équation intégrale de première espèce.** — Les fonctions fondamentales de M. E. Schmidt interviennent dans la résolution de l'équation de première espèce

$$\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds = f(x), \tag{55}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée, $h(x)$ la fonction inconnue. Soient (φ_i, ψ_i) deux couples quelconques de fonctions fondamentales de M. Schmidt, correspondant à la valeur singulière λ_i. Les coefficients f_i, h_i^* ayant la même signification qu'au n° 598, on a $h_i^* = f_i\lambda_i$. Pour que l'équation (55) admette une solution $h(x)$ de carré intégrable, *il est donc nécessaire que la série $\Sigma\lambda_i^2 f_i^2$ soit convergente.*

M. Picard [1] a démontré que *cette condition est suffisante, lorsque les fonctions $\varphi_i(x)$ forment un système complet.* En effet, d'après le théorème de Fischer-Riesz, il existe alors une fonction $h(x)$ dont les coefficients de Fourier relatifs au système des fonctions $\psi_i(x)$ sont précisément les nombres $\lambda_i f_i$. Les deux fonctions $f(x)$ et $\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds$ ont alors mêmes coefficients de Fourier relativement au système orthogonal des fonctions $\varphi_i(x)$. Ce système étant fermé, elles sont donc identiques, ou du moins ne peuvent différer qu'en tous les points d'un ensemble de mesure nulle. Si la fonction $f(x)$ est continue, ainsi que les fonctions $\varphi_i(x)$, la différence est nulle en tous les points de l'intervalle (a, b).

Si le système des fonctions $\psi_i(x)$ n'est pas complet, on peut ajouter à la fonction $h(x)$ une fonction quelconque orthogonale à tous les ψ_i; mais, d'après la formule (45), cela ne change pas la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds.$$

Lorsque la suite des fonctions $\varphi_i(x)$ n'est pas fermée, on peut encore

---

[1] É. Picard, *Comptes rendus*, 14 et 28 juin 1909; *Rendiconti di Palermo*. t. 29, 1910.

Voir aussi différents articles de M. Lauricella dans les *Atti della r. Accad. dei Lincei*, 1903, 1909, 1911.

déterminer une fonction $h(x)$ dont les coefficients de Fourier h_i^* ont les valeurs $f_i\lambda_i$, mais le raisonnement prouve seulement qu'on a

$$(56) \qquad \int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds = f(x) + R(x),$$

$R(x)$ étant une fonction orthogonale à toutes les fonctions $\varphi_i(x)$. Il est à remarquer que quand on ajoute à $f(x)$ une fonction quelconque orthogonale à tous les $\varphi_i(x)$, les coefficients f_i et par suite les coefficients h_i^* ne sont pas changés; on trouve donc toujours la même valeur pour l'intégrale

$$\int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds.$$

On en conclut que, parmi toutes les équations de la forme (56), où $R(x)$ est une fonction quelconque orthogonale aux $\varphi_i(x)$, il y en a une, *et une seule*, qui admet une solution en $h(x)$.

Remarques. — 1° Les conclusions s'appliquent aussi à un noyau symétrique; les deux systèmes orthogonaux (φ_i, ψ_i) sont alors identiques, et sont complets si le noyau est fermé.

2° Supposons le système des fonctions φ_i complet. Si la série $\Sigma\lambda_i^2 f_i^2$ est divergente, l'équation (55) n'est pas résoluble, mais il est possible de trouver une fonction $h(x)$ telle que $\int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds$ diffère *en moyenne* de $f(x)$ d'aussi peu qu'on le veut. Posons, en effet, $h_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \psi_i(x)$; la fonction $f_n(x) = \int_a^b K(x, s)\, h_n(s)\, ds$ est identique à la somme des n premiers termes de la série de Fourier de $f(x)$ relative au système des $\varphi_i(x)$. On peut donc choisir n assez grand pour que l'intégrale

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2\, dx$$

soit moindre qu'un nombre positif ε.

3° En résumé, une équation intégrale de première espèce à limites fixes n'admet pas toujours de solution, si le second membre $f(x)$ est quelconque. Ce fait explique pourquoi l'on ne peut résoudre le problème de Dirichlet au moyen d'un potentiel de simple couche, car la densité serait déterminée par une équation de première espèce. D'ailleurs, les propriétés du potentiel de simple couche expliquent aussi ce résultat. On sait, en effet, (n° 538) que la dérivée normale $\frac{dV}{dn}$ d'un potentiel de simple couche a une valeur finie sur le contour, tandis que les dérivées partielles de la fonction

harmonique qui donne la solution du problème de Dirichlet peuvent devenir infinies sur ce contour (note de la page 198).

601. Approximation en moyenne. — La définition de la convergence en moyenne dans un domaine s'étend à des suites de fonctions de plusieurs variables. Soit $K(x, y)$ un noyau non symétrique; rangeons les valeurs singulières λ_i, définies au n° 598, par ordre de grandeur croissante, et soit (φ_i, ψ_i) le couple de fonctions fondamentales de Schmidt correspondant à la valeur λ_i. En tenant compte des relations d'orthogonalité et des formules (41) qui définissent les fonctions $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, on vérifie facilement qu'on a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i} \right]^2 dx\,dy \\ &= \int_a^b \int_a^b K^2(x, y)\,dx\,dy - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}. \end{aligned}$$

D'autre part, en faisant $y = x$ dans la relation (48) et intégrant terme à terme, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} &= \int_a^b \overline{K(x, x)}\,dx \\ &= \int_a^b \int_a^b K(x, t)\,K(x, t)\,dx\,dt = \int_a^b \int_a^b K^2\,dx\,dy; \end{aligned}$$

l'intégrale I_n tend donc vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

Ce résultat donne un moyen d'approcher en moyenne de $K(x, y)$ d'aussi près qu'on le veut, avec la somme d'un nombre fini de termes dont chacun est le produit d'une fonction de x par une fonction de y. M. Schmidt a démontré que la solution précédente est celle qui donne la meilleure approximation pour une valeur donnée du nombre n. En termes plus précis, les lettres X_i et Y_i désignant des fonctions de x et de y respectivement, on a toujours

$$\begin{aligned} &\int_a^b \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i} \right]^2 dx\,dy \\ &\leq \int_a^b \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i \right]^2 dx\,dy, \end{aligned}$$

quelles que soient les fonctions X_i et Y_i, si l'on a $m \leq n$ (*Math. Annalen*, Bd. 63).

COMPLÉMENTS ET EXERCICES.

1. *Méthode de Kneser pour les noyaux symétriques.* — Soit $K(x, y)$ un noyau symétrique borné; la trace A_{2n} de ce noyau peut se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes

$$A_{2n} = \int_a^b \int_a^b [K^{(n)}(x, t)]^2\, dx\, dt = \int_a^b \int_a^b K^{(n+1)}(x, t)\, K^{(n-1)}(x, t)\, dx\, dt,$$

et l'inégalité de Schwarz conduit à la nouvelle inégalité

$$A_{2n}^2 \leqq A_{2n+2}\, A_{2n-2},$$

d'où l'on déduit que la série $\Sigma A_n \lambda^n$ ne peut être convergente pour toute valeur de λ, à moins que A_4 ne soit nul. Il faudrait pour cela qu'on eût $K^{(2)}(x, t) = 0$, et par suite $K(x, t) = 0$ (n° 587).

2. *Généralisation de l'inégalité de Bessel.* — Une suite de n fonctions $\varphi_i(x)$ de la variable *réelle* x, pouvant prendre des valeurs *complexes*, forme un système orthogonal et normal si l'intégrale

$$\int_a^b \varphi_i(x)\, \overline{\varphi_k}(x)\, dx = (\varphi_i \overline{\varphi_k})$$

est nulle pour $i \neq k$, et égale à un pour $i = k$; a et b désignant d'une façon générale deux imaginaires conjuguées. On peut étendre à ces systèmes l'inégalité de Bessel. Soit $f(x)$ une fonction quelconque réelle ou complexe de la variable x, mais dont le carré du module est intégrable. Posons

$$f_i = \int_a^b f(x)\, \overline{\varphi_i}(x)\, dx, \qquad \overline{f_i} = \int_a^b \overline{f(x)}\, \varphi_i(x)\, dx.$$

On a évidemment

$$\int_a^b [f(x) - f_1\varphi_1(x) - \ldots - f_n\varphi_n(x)]\left[\overline{f(x)} - \overline{f_1}\,\overline{\varphi_1}(x) - \ldots - \overline{f_n}\,\overline{\varphi_n}(x)\right] dx \geqq 0,$$

ce qui donne, en développant le produit,

$$\int_a^b f(x)\overline{f(x)}\, dx - \sum_{i=1}^n \overline{f_i} \int_a^b f(x)\, \overline{\varphi_i}(x)\, dx - \sum_{i=1}^n f_i \int_a^b \overline{f(x)}\, \varphi_i(x)\, dx$$
$$+ \sum_i \sum_k f_i \overline{f_k} \int_a^b \varphi_i(x)\, \overline{\varphi_k}(x)\, dx \geqq 0.$$

En tenant compte des relations d'orthogonalité, il reste

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \leqq \int_a^b |f(x)|^2\, dx.$$

Application. — Supposons que les n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ du système orthogonal vérifient n relations de la forme

$$(2) \qquad K(\varphi_\alpha) = \int_a^b K(x, s)\, \varphi_\alpha(s)\, ds = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\, \varphi_\beta(x),$$

$K(x, y)$ étant un noyau tel que $|K(x, y)|^2$ soit intégrable, et les coefficients $a_{\alpha\beta}$ étant constants. On aura aussi les relations

$$(3) \qquad \overline{K}(\overline{\varphi_\alpha}) = \int_a^b \overline{K(x, s)}\, \overline{\varphi_\alpha}(s)\, ds = \sum_{\beta=1}^{n} \overline{a_{\alpha\beta}}\, \overline{\varphi_\beta}(x).$$

Appliquons l'inégalité (1) à la fonction $K(x, t)$, en y considérant x comme un paramètre et t comme la variable indépendante, et remplaçant $\varphi_i(t)$ par $\overline{\varphi_i}(t)$. Nous poserons pour cela

$$A_\alpha = \int_a^b K(x, t)\, \varphi_\alpha(t)\, dt = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\, \varphi_\beta(x),$$

$$\overline{A_\alpha} = \int_a^b \overline{K(x, t)}\, \overline{\varphi_\alpha}(t)\, dt = \sum_{\gamma=1}^{n} \overline{a_{\alpha\gamma}}\, \overline{\varphi_\gamma}(x).$$

D'après l'inégalité de Bessel, on a

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \overline{A_\alpha} \leqq \int_a^b [K(x, t)]\, dt$$

et, par suite,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int_a^b A_\alpha \overline{A_\alpha}\, dx \leqq \int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2\, dx\, dt.$$

Or, si l'on remplace A_α et $\overline{A_\alpha}$ par leurs expressions, le premier membre de cette inégalité se réduit, d'après les conditions d'orthogonalité, à

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} |a_{\alpha\beta}|^2.$$

Il reste donc

$$(4) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} |a_{\alpha\beta}|^2 \leqq \int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2\, dx\, dt.$$

3. *Théorème de Schur* (*Math. Annalen*, Bd 66, p. 508). — Soit $K(x, y)$ un noyau borné ou, plus généralement, un noyau tel que $|K(x, y)|^2$ soit intégrable. Considérons un système S de n fonctions principales appartenant à ce noyau (n° 580), c'est-à-dire un système de n fonctions linéairement distinctes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ vérifiant des relations de la forme (2) de l'exercice précédent. Désignons par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les n racines de l'équation

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\omega & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Nous pouvons toujours prendre une fonction $\Phi_1(x)$ du système S vérifiant les relations

$$K(\Phi_1) = \omega_1 \Phi_1(x), \qquad (\Phi_1 \overline{\Phi_1}) = 1,$$

et supposer que les n fonctions $\Phi_1 \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont linéairement distinctes. Choisissons ensuite les $n-1$ coefficients $c_i (i > 1)$ de telle façon qu'on ait $(\Phi_1, \overline{\varphi_i} - \overline{c_i} \overline{\Phi_1}) = 0$, et posons $\pi_i(x) = \varphi_i - c_i \Phi_1$. Il est clair que les $n-1$ fonctions $\pi_2, \ldots, \pi_n$ sont distinctes et orthogonales à $\Phi_1(x)$, et par suite $\Phi_1(x)$ est orthogonale à toute combinaison linéaire de ces $n-1$ fonctions. Nous pouvons ensuite trouver une combinaison linéaire Φ_2 de $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n$ vérifiant les deux relations

$$K(\Phi_2) = b_{21} \Phi_1 + \omega_2 \Phi_2, \qquad (\Phi_2 \overline{\Phi_2}) = 1,$$

et ainsi de suite. En continuant de la sorte, il est clair qu'on arrivera à former un système orthogonal et normal de n fonctions principales Φ_1, $\Phi_2, \ldots, \Phi_n$, équivalent au système donné S, et vérifiant n relations de la forme

$$\begin{aligned} K(\Phi_1) &= \omega_1 \Phi_1, \\ K(\Phi_2) &= b_{21} \Phi_1 + \omega_2 \Phi_2, \\ K(\Phi_3) &= b_{31} \Phi_1 + b_{32} \Phi_2 + \omega_3 \Phi_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(\Phi_n) &= b_{n1} \Phi_1 + b_{n2} \Phi_2 + \ldots + \omega_n \Phi_n. \end{aligned}$$

L'application de l'inégalité (4) de l'exercice précédent à ce système orthogonal conduit à l'inégalité

$$\Sigma |\omega_i|^2 \leqq \int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 \, dx \, dt,$$

d'où l'on déduit aisément le théorème de Schur (*voir* n° 584).

4. *Noyaux symétrisables* (n° 596). — Soit $K(x, y)$ un noyau symétrisable, tel que le noyau $G(x, y) = \int_a^b S(x, t) K(t, y) \, dt$ soit symé-

trique, $S(x, y)$ étant lui-même symétrique et *positif*. En désignant par $K^{(n)}(x, y)$ le $n^{\text{ième}}$ noyau itéré de $K(x, y)$, nous poserons

$$K_n(x,y)=\int_a^b S(x,t)\,K^{(n)}(t,y)\,dt, \qquad K_1(x,y)=G(x,y).$$

Nous allons d'abord montrer que $K_n(x, y)$ *est lui-même un noyau symétrique*. On peut écrire, en effet

$$K_n(x,y)=\int\int\int\cdots\int S(x,t_1)\,K(t_1,t_2)\,K(t_2,t_3)\ldots K(t_n,y)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n,$$

les limites de toutes les intégrations étant a et b, ou encore

$$\begin{aligned}
K_n(x,y) &= \int\int\cdots\int G(x,t_2)\,K(t_2,t_3)\ldots K(t_n,y)\,dt_2\,dt_3\ldots dt_n\\
&= \int\int\cdots\int G(t_2,x)\,K(t_2,t_3)\ldots K(t_n,y)\,dt_2\,dt_3\ldots dt_n\\
&= \int\int\cdots\int S(t_2,t_1)\,K(t_1,x)\,K(t_2,t_3)\ldots K(t_n,y)\,dt_1\ldots dt_n\\
&= \int\int\cdots\int K(t_1,x)\,S(t_1,t_2)\,K(t_2,t_3)\ldots K(t_n,y)\,dt_1\ldots dt_n.
\end{aligned}$$

En recommençant la même suite de transformations sur le produit $S(t_1, t_2)\,K(t_2, t_3)$, et ainsi de suite, on voit qu'on a, d'une manière générale,

$$\begin{aligned}
K_n(x,y) = \int\int\cdots\int & K(t_1,x)\,K(t_2,t_1)\ldots\\
&\times K(t_p,t_{p-1})\,S(t_p,t_{p+1})\,K(t_{p+1},t_{p+2})\ldots K(t_n,y)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n,
\end{aligned}$$

ce qu'on peut encore écrire

$$K_n(x,y)=\int\int S(u,v)\,K^{(p)}(u,x)\,K^{(q)}(v,y)\,du\,dv \qquad (p+q=n).$$

En échangeant p et q, on voit immédiatement qu'on a $K_n(x, y) = B_n(y, x)$.

La suite des noyaux $K_n(x, v)$ *est illimitée, à moins que* $G(x, y)$ *ne soit nul*. Nous avons en particulier

$$\begin{aligned}
K_{2p}(x,y) &= \int\int S(u,v)\,K^{(p)}(u,x)\,K^{(p)}(v,y)\,du\,dv\\
&= \int\int S(u,v)\,K^{(p+1)}(u,x)\,K^{(p-1)}(v,y)\,du\,dv
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$K_{2p}(x,x)=\int\int S(u,v)\,K^{(p)}(u,x)\,K^{(p)}(v,x)\,du\,dv.$$

Si le noyau $K_{2p}(x, x)$ était nul identiquement, il en serait de même de l'intégrale

$$\int\int S(u, v) K^{(p)}(u, x) \psi(v) \, du \, dv = \int_a^b \psi(v) \, dv \int_a^b S(u, v) K^{(p)}(u, x) \, du,$$

quelle que soit la fonction $\psi(v)$, d'après l'inégalité de Schwarz généralisée (¹)

$$\left[\int\int S(u, v) \varphi(u) \psi(v) \, du \, dv\right]^2 \leq \left[\int\int S(u, v) \varphi(u) \varphi(v) \, du \, dv\right] \times \left[\int\int S(u, v) \psi(u) \psi(v) \, du \, dv\right],$$

et, par suite, le noyau

$$K_p(v, x) = \int_a^b S(u, v) K^{(p)}(u, x) \, du$$

serait nul aussi identiquement. D'autre part, on a évidemment, d'après la définition même de $K_n(x, y)$,

$$K_{n+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, u) K(u, y) \, du,$$

de sorte que si $K_n(x, y)$ est identiquement nul, il en est de même de K_{n+1}, K_{n+2}, ... Par suite, si $K_{2p}(x, y)$ ou $K_{2p-1}(x, y)$ est identiquement nul, il en est de même de $K_p(x, y)$. S'il y avait un noyau identiquement nul dans la suite des noyaux $K_n(x, y)$, on en déduirait donc, en remontant de proche en proche, qu'on a $K_1(x, y) = 0$. Le raisonnement prouve même que $K_{2p}(x, x)$ ne peut être identiquement nul.

La série

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, y) + \ldots$$

ne peut être convergente, pour toute valeur λ. En effet, il en serait de même de la série

$$\int_a^b S(x, t) \Gamma(t, y; \lambda) \, dt = K_1(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x, y) + \ldots$$

et, par suite, de la série

$$K_1(x, x) + \lambda K_2(x, x) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x, x) + \ldots.$$

(¹) On l'obtient en écrivant que l'intégrale double

$$\int\int S(u, v) [\alpha\varphi(u) + \beta\psi(u)][\alpha\varphi(v) + \beta\psi(v)] \, du \, dv$$

est une fonction quadratique positive en α, β.

Or, d'après l'inégalité de Schwarz généralisée, on a

$$\left[\int\int S(u,v)\,K^{(p+1)}(u,x)\,K^{(p-1)}(v,x)\,du\,dv\right]^2$$
$$\leqq \left[\int\int S(u,v)\,K^{(p+1)}(u,x)\,K^{(p+1)}(v,x)\right]du\,dv$$
$$\times\left\{\int\int S(u,v)\,K^{(p-1)}(u,x)\,K^{(p-1)}(v,x)\,du\,dv\right\},$$

c'est-à-dire

$$[K_{2p}(x,x)]^2 \leqq K_{2p+2}(x,x)\times K_{2p-2}(x,x)$$

et le raisonnement s'achève comme pour un noyau symétrique (n° 587). *Tout noyau symétrisable admet donc au moins une valeur singulière.*

5. *Minimum de l'intégrale* $\int_a^b\int_a^b [K(x,y)-\varphi(x)\psi(y)]^2\,dx\,dy$ (n° 601). — Supposons que cette intégrale soit minimum pour un système de fonctions $\varphi(x)$, $\psi(y)$. En y remplaçant $\varphi(x)$ par $\varphi(x)+\alpha\varphi_1(x)$, $\psi(y)$ par $\psi(y)+\beta\psi_1(y)$, on obtient une fonction $I(\alpha,\beta)$ des deux paramètres α, β, qui doit être minimum pour $\alpha=\beta=0$, quelles que soient les deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\psi_1(y)$.

La condition $\frac{\partial I}{\partial\alpha}=0$, pour $\alpha=\beta=0$, donne

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,dx\int_a^b [K(x,y)\psi(y)-\varphi(x)\psi^2(y)]\,dy=0,$$

ce qui exige qu'on ait, puisque $\varphi_1(x)$ est arbitraire,

$$\int_a^b K(x,y)\psi(y)\,dy=\varphi(x)\int_a^b \psi^2(y)\,dy = C\,\varphi(x);$$

la condition $\frac{\partial I}{\partial\beta}=0$ donne une autre équation de même forme

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(x)\,dx = C'\,\psi(y),$$

C et C′ étant des constantes. Ces constantes C et C′ étant nécessairement positives, on peut ramener le système obtenu à la forme (41) du n° 598, en remplaçant les fonctions φ et ψ par $h\varphi$ et $\frac{\psi}{h}$ respectivement, et choisissant convenablement la constante h.

CHAPITRE XXXIII.

APPLICATIONS DES ÉQUATIONS INTÉGRALES.

Les applications des équations intégrales sont déjà nombreuses et importantes. Nous allons en indiquer quelques-unes, relatives au calcul intégral et à la physique mathématique.

I. — APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

602. **Sur quelques propriétés des équations linéaires.** — Nous établirons d'abord quelques propriétés très simples des intégrales d'une équation linéaire, concernant les zéros de ces intégrales. Soit

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{1}$$

une équation linéaire, dont les coefficients p et q sont continus dans un intervalle (a, b), où $a < b$. On sait que toutes les intégrales sont continues dans le même intervalle, et l'intégrale prenant la valeur y_0 pour une valeur x_0 de x, compris entre a et b, a pour expression (II, nº 366)

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} p\,dx} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^{x} q\,dx\,e^{-\int_{x_0}^{x} p\,dx} \right\}; \tag{2}$$

il résulte de cette formule que si l'on a $y_0 \geqq 0$, $q \geqq 0$, y sera positif pour $x > x_0$. Par conséquent, *si la fonction $q(x)$ n'est jamais négative dans l'intervalle (a, b), une intégrale ne peut passer d'une valeur positive à une valeur négative lorsque x croît de a à b*. Les conclusions seraient renversées si l'on avait $q \leqq 0$.

Considérons, en second lieu, une équation de Riccati

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{P}u^2 + \mathrm{Q}u + \mathrm{R} \tag{3}$$

dont les coefficients sont continus dans l'intervalle (a, b). Toute intégrale $u(x)$, continue dans cet intervalle, satisfait aussi à une équation linéaire de la forme (1) dont les coefficients auraient pour valeurs $p = Pu + Q$, $q = R$. Par suite, si R n'est jamais négatif dans l'intervalle (a, b), une intégrale continue dans cet intervalle ne peut passer d'une valeur positive à une valeur négative lorsque x croît de a à b.

Plus généralement, soit $y(x)$ une intégrale, continue dans l'intervalle (a, b), d'une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = y\,P(x, y) + R(x),$$

les fonctions $P(x, y)$ et $R(x)$ étant continues, et $R(x)$ n'étant jamais négatif entre a et b. Cette intégrale ne peut passer d'une valeur positive à une valeur négative lorsque x croît de a à b.

Prenons maintenant une équation linéaire du second ordre

$$(4) \qquad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

dont les coefficients sont continus entre a et b. On a déjà établi (II, note de la page 425) que deux racines consécutives d'une intégrale quelconque $y_1(x)$ comprennent une racine et une seule de toute autre intégrale $y_2(x)$. Une intégrale $y_1(x)$ est complètement déterminée, à un facteur constant près, si l'on connaît une racine x_0 de cette intégrale, car on peut disposer du facteur C de façon que la dérivée $Cy'_1(x)$ prenne une valeur donnée quelconque pour $x = x_0$. Il s'ensuit que les racines d'une intégrale sont déterminées si l'on connaît l'une d'elles, et il résulte du théorème de Sturm que nous venons de rappeler que toutes ces racines varient dans le même sens, si l'on fait varier l'une d'elles.

Si l'on a $Q(x) \leq 0$ *dans l'intervalle* (a, b), *une intégrale ne peut avoir plus d'une racine dans cet intervalle.* Supposons, en effet, que x_0 et x_1 soient deux racines consécutives d'une intégrale $y(x)$, comprises entre a et b. La dérivée logarithmique $u = \frac{y'}{y}$ de cette intégrale serait continue de $x_0 + \varepsilon$ à $x_1 - \varepsilon'$, et elle devrait passer de $+\infty$ à $-\infty$ lorsque x croît de $x_0 + \varepsilon$ à $x_1 + \varepsilon'$. Or, ceci est impossible, puisque u satisfait à une équation de Riccati de la forme (3) dans laquelle le terme tout connu

est précisément $-\mathrm{Q}(x)$ (n° 402). Si $\dfrac{y'}{y} > 0$ pour $x = a$, on voit de plus que l'intégrale ne peut avoir de racine entre a et b.

Lorsque $\mathrm{Q}(x)$ a un signe quelconque, on peut avoir des renseignements sur le nombre des racines d'une intégrale, comprises entre a et b, au moyen d'un autre théorème de comparaison, dû aussi à Sturm. Pour énoncer ce théorème, nous supposerons que l'équation linéaire a été mise sous la forme canonique suivante

$$\frac{d}{dx}\left\{k\frac{dy}{dx}\right\} + gy = 0, \tag{5}$$

k et g étant des fonctions continues, dont la première k peut être supposée *positive*. Pour ramener l'équation (4) à cette forme, il suffit de multiplier tous les termes par le facteur positif $e^{\int \mathrm{P}\,dx}$. Cela posé, considérons une seconde équation de même forme

$$\frac{d}{dx}\left\{k_1\frac{dz}{dx}\right\} + g_1 z = 0, \tag{6}$$

et soient x_0, x_1 deux racines consécutives d'une intégrale $y(x)$ de (5) entre a et b; *si l'on a constamment* $k_1 \leqq k$, $g_1 \geqq g$, *entre* x_0 *et* x_1, *toute intégrale* $z(x)$ *de l'équation* (6) *a au moins une racine comprise entre* x_0 *et* x_1.

Il suffit évidemment de prouver qu'il ne peut y avoir d'intégrale $z(x)$ de l'équation (6) restant positive de x_0 à x_1, y compris ces limites. Admettons pour un moment l'existence d'une telle intégrale, et posons

$$\omega = \frac{k}{y}\frac{dy}{dx}, \qquad \omega_1 = \frac{k_1}{z}\frac{dz}{dx}, \qquad u = \omega - \omega_1;$$

cette fonction u serait continue de $x_0 + \varepsilon$ à $x_1 - \varepsilon'$, et passerait de $+\infty$ à $-\infty$, car ω_1 reste finie pour $x = x_0$ et $x = x_1$. Or on a

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\omega}{dx} - \frac{d\omega_1}{dx} = -g - \frac{1}{k}\omega^2 + g_1 + \frac{1}{k_1}\omega_1^2;$$

ce qu'on peut écrire encore

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k}\right\}(\omega + \omega_1)u + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right\}(\omega^2 + \omega_1^2) + g_1 - g.$$

C'est une équation linéaire en u, dont les coefficients sont con-

tinus dans l'intervalle $(x_0+\varepsilon, x_1-\varepsilon')$ et où le terme tout connu est *positif* dans cet intervalle. Elle ne peut donc, d'après la propriété établie au début de ce paragraphe, admettre d'intégrale passant de $+\infty$ à $-\infty$ lorsque x croît de $x_0+\varepsilon$ à $x_1-\varepsilon'$. Toute intégrale de l'équation (6) a donc au moins une racine entre x_0 et x_1 ([1]).

Applications. — 1° Considérons l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(x^\gamma \frac{dy}{dx}\right) + x^{\gamma-1} y = 0,$$

qui ne diffère de l'équation de Bessel (II, n° 414) que par le changement de x en $-x$. Si l'on fait varier x d'une valeur positive l à une valeur quelconque supérieure à l, le coefficient $x^{\gamma-1}$ est

([1]) On peut étendre la proposition aux intégrales $z(x)$ de l'équation (6) qui admettent la racine x_0. Soit, en effet, $z(x)$ une intégrale telle que $z(x_0)=0$; nous allons montrer que cette intégrale admet au moins une autre racine entre x_0 et x_1. Choisissons, en effet, un nombre c, compris entre x_0 et x_1 et assez voisin de x_0 pour que les deux rapports

$$\zeta(x) = \frac{y(x)}{ky'(x)} = \frac{1}{\omega}, \qquad \zeta_1(x) = \frac{z(x)}{k_1 z'(x)} = \frac{1}{\omega_1}$$

soient continus et positifs de x_0 à c. En posant $v=\zeta-\zeta_1$, on trouve, d'après les équations (5) et (6) elles-mêmes,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\zeta_1}{dx} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k_1} + g\zeta^2 - g_1\zeta_1^2$$

ou

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k_1} + \frac{1}{2}(g-g_1)(\zeta^2+\zeta_1^2) + \frac{1}{2}(g+g_1)(\zeta+\zeta_1)v;$$

le terme indépendant de v dans le second membre est négatif ou nul entre x_0 et c, et l'on a $v(x_0)=0$. Il s'ensuit que $v(c)$ est négatif et par suite

$$\omega(c) - \omega_1(c) = u(c)$$

est positif. Cela étant, si l'intégrale $z(x)$ ne s'annulait pas entre x_0 et x_1, ni pour la valeur x_1, la fonction $u(x)$ passerait d'une valeur positive à $-\infty$ lorsque x croît de c à x_1, ce qu'on a démontré être impossible. Si l'on avait à la fois

$$z(x_0) = z(x_1) = 0,$$

on prouverait, de même, que $\omega(c')-\omega_1(c')$ est négatif pour une valeur c comprise entre x_0 et x_1 et très voisine de x_1 et la différence $\omega(x)-\omega_1(x)$ passerait d'une valeur positive à une valeur négative lorsque x croît de c à c' (*voir* M. Böcher, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1902, p. 196).

supérieur à $lx^{\gamma-2}$ dans cet intervalle. Par suite, deux racines quelconques supérieures à l d'une intégrale de l'équation auxiliaire

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\gamma}\frac{dY}{dx}\right) + lx^{\gamma-2}Y = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2Y'' + \gamma xY' + lY = 0$$

comprennent au moins une racine d'une intégrale de l'équation proposée. Or, si l'on prend $4l > (\gamma - 1)^2$, l'équation auxiliaire admet une intégrale de la forme $x^a \sin|b \log x|$ qui admet pour zéros tous les nombres $e^{\frac{K\pi}{b}}$, parmi lesquels il y en a une infinité de supérieurs à l. Toute intégrale de l'équation considérée admet donc une infinité de racines positives.

2° Supposons g positif entre a et b, et soient l et L une limite inférieure et une limite supérieure de g, l étant positif; soient de même m et M deux nombres positifs jouant le même rôle pour k. La comparaison de l'équation (5) avec les deux équations auxiliaires

$$(7) \qquad \frac{d}{dx}\left(m\frac{dY}{dx}\right) + LY = 0,$$

$$(8) \qquad \frac{d}{dx}\left(M\frac{dZ}{dx}\right) + lZ = 0$$

donne des renseignements sur le nombre et la disposition des racines d'une intégrale $y(x)$ comprises entre a et b.

D'une part, entre deux zéros consécutifs d'une intégrale $Z(x)$, il y a au moins une racine de $y(x)$; d'autre part, entre deux racines consécutives de $y(x)$, il y a au moins une racine de $Y(x)$. Or, les équations auxiliaires (7) et (8) sont des équations à coefficients constants, et les zéros de $Y(x)$ et de $Z(x)$ sont respectivement $\alpha + K\pi\sqrt{\frac{m}{L}}$, $\beta + K'\pi\sqrt{\frac{M}{l}}$, α et β étant des nombres quelconques, K et K' des entiers arbitraires. Il s'ensuit que la différence $x_1 - x_0$ de deux racines consécutives de $y(x)$ ne peut être inférieure à $\pi\sqrt{\frac{m}{L}}$, ni supérieure à $\pi\sqrt{\frac{M}{l}}$. En d'autres termes, tout intervalle de longueur $\pi\sqrt{\frac{M}{l}}$, compris dans l'intervalle (a, b), contient au moins une racine de $y(x)$, et un intervalle de longueur $\pi\sqrt{\frac{m}{L}}$ ne peut en contenir plus d'une. Si l'équa-

tion $y(x) = 0$ a n racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, comprises entre a et b, ces n racines déterminent, avec a et b, $n+1$ intervalles dont l'amplitude est inférieure à $\pi\sqrt{\frac{M}{l}}$. On a donc

$$(n+1)\pi\sqrt{\frac{M}{l}} > b-a \quad \text{ou} \quad n+1 > \frac{b-a}{\pi}\sqrt{\frac{l}{M}}.$$

D'autre part, les $(n-1)$ intervalles compris entre deux racines consécutives sont supérieurs à $\pi\sqrt{\frac{m}{L}}$. On a donc

$$(n-1)\pi\sqrt{\frac{m}{L}} < b-a \quad \text{ou} \quad n-1 < \frac{b-a}{\pi}\sqrt{\frac{L}{m}}.$$

Si g est négatif entre a et b, nous avons vu qu'une intégrale de l'équation (5) a au plus une racine dans cet intervalle. Si g change de signe entre a et b, on a seulement une limite inférieure pour la différence de deux racines.

603. **Nouveaux problèmes sur les équations linéaires.** — On a vu plus haut (n° 551) comment la résolution du problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire conduisait à une équation intégrale de Volterra. L'étude de certains problèmes aux limites, dans lesquels l'intégrale doit satisfaire à des conditions où figurent à la fois les deux limites d'un intervalle, conduit de même à des équations intégrales de Fredholm. Nous nous bornerons au cas d'une équation du second ordre. Les fonctions fondamentales pour ces équations de Fredholm comprennent, comme cas particuliers, un grand nombre de familles de fonctions orthogonales qui s'étaient déjà présentées dans diverses questions d'Analyse ou de Physique mathématique. La recherche de ces fonctions fondamentales se ramène en général, comme on le verra un peu plus loin, au problème suivant. Étant donnée une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda r - g)y = 0, \tag{9}$$

où λ est un paramètre, k, r, g des fonctions de x dont la première est positive dans l'intervalle (a, b), trouver les valeurs de λ pour lesquelles il existe une intégrale $y(x)$, différente de zéro, continue

entre a et b, et satisfaisant à des conditions aux limites de la forme suivante

$$(10)\qquad A\left(\frac{dy}{dx}\right)_a + B\,y(a) = 0, \qquad A_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_b + B_1\,y(b) = 0,$$

A, B, A_1, B_1 étant des constantes données. L'existence d'une infinité de valeurs de λ, pour lesquelles il existe une intégrale satisfaisant à ces conditions, est une conséquence immédiate de la théorie des équations intégrales, dans les cas que nous traiterons. Les propriétés d'orthogonalité se démontrent très simplement en partant de l'équation différentielle elle-même. Soient, en effet, λ_1 et λ_2 deux valeurs du paramètre λ, à chacune desquelles correspond une intégrale de l'équation (9), satisfaisant aux conditions aux limites (10); ces deux intégrales $y_1(x)$ et $y_2(x)$ vérifient aussi la relation suivante, qui se déduit des deux équations différentielles en éliminant le coefficient g,

$$\begin{aligned} y_2\frac{d}{dx}\left\{k\frac{dy_1}{dx}\right\} &- y_1\frac{d}{dx}\left\{k\frac{dy_2}{dx}\right\} + (\lambda_1-\lambda_2)\,r\,y_1y_2 \\ &= \frac{d}{dx}\left\{k\left(y_2\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy_2}{dx}\right)\right\} + (\lambda_1-\lambda_2)\,r\,y_1y_2 = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(\lambda_2-\lambda_1)\int_a^b r(x)\,y_1(x)\,y_2(x)\,dx = \left[k\left(y_2\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy_2}{dx}\right)\right]_a^b.$$

Mais les conditions aux limites (10) que vérifient par hypothèse les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ prouvent que $y_2\dfrac{dy_1}{dx} - y\,\dfrac{dy_2}{dx}$ est nul pour $x = a$ et pour $x = b$. On a donc, en supposant $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$(11)\qquad \int_a^b r(x)\,y_1(x)\,y_2(x)\,dx = 0.$$

On a aussi étudié des cas où la fonction $k(x)$ est nulle pour $x = a$ ou pour $x = b$. Si $k(a) = 0$, la première condition aux limites doit être remplacée par la condition que l'intégrale reste finie pour $x = a$; il en est de même de la seconde condition aux limites si l'on a aussi $k(b) = 0$.

604. Déterminations d'une intégrale par ses valeurs $y(a)$ et $y(b)$. — Nous allons étudier en détail le plus simple des problèmes dont

il vient d'être question, la recherche d'une intégrale prenant des valeurs données aux deux extrémités d'un intervalle. On peut évidemment supposer que ces valeurs sont nulles, car il suffit d'un changement bien facile d'inconnue pour être ramené à ce cas; c'est ce que nous ferons désormais. Considérons l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda\, A(x) y + f(x), \tag{12}$$

$A(x)$ et $f(x)$ étant continues dans l'intervalle (a, b). Pour appliquer la méthode des approximations successives à la résolution de ce nouveau problème, on est conduit, comme on l'a déjà observé à plusieurs reprises, à chercher un développement ordonné suivant les puissances entières de λ, satisfaisant formellement à l'équation (12), et dont chaque coefficient est nul pour $x = a$ et pour $x = b$,

$$y = y_0(x) + \lambda\, y_1(x) + \ldots + \lambda^n y_n(x) + \ldots. \tag{13}$$

Le premier terme $y_0(x)$ s'obtient en résolvant le problème pour l'équation simple obtenue en faisant $\lambda = 0$. Or, on sait que l'intégrale générale de l'équation $y''_0(x) = f(x)$ est

$$y_0(x) = \int_a^x (x - s) f(s)\, ds + C_1 x + C_2;$$

en déterminant C_1 et C_2 de façon que $y_0(a) = y_0(b) = 0$, on trouve que l'intégrale cherchée a pour expression

$$y_0(x) = \int_a^x (x - s) f(s)\, ds - \frac{x - a}{b - a} \int_a^b (b - s) f(s)\, ds,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$y_0(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds \tag{14}$$

en posant

$$\left\{ \begin{aligned} K(x, s) &= \frac{(x - b)(s - a)}{b - a} \qquad \text{pour} \qquad s \leqq x, \\ K(x, s) &= \frac{(x - a)(s - b)}{b - a} \qquad \text{pour} \qquad a \geqq x. \end{aligned} \right. \tag{15}$$

Cette fonction $K(x, s)$, qui va jouer un rôle essentiel dans la suite,

est évidemment continue et symétrique en x et s. Considérée comme fonction de x, c'est une intégrale de l'équation $\frac{d^2K}{dx^2} = 0$, dont la dérivée première est discontinue pour $x = s$; cette dérivée première augmente brusquement de l'unité lorsque x passe de $s - \varepsilon$ à $s + \varepsilon$, mais la dérivée seconde est continue. La courbe figurative se compose des deux côtés d'un triangle ayant pour sommets les trois points

$$(x = a,\ y = 0), \qquad (x = b,\ y = 0), \qquad \left[x = s,\ y = \frac{(s-b)(s-a)}{b-a}\right].$$

Tous les autres termes de la série (13) se calculent aisément par voie de récurrence; d'une façon générale, $y_n(x)$ est une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} = A(x) y_{n-1}(x)$$

s'annulant pour $x = a$, $x = b$. On a donc, d'après le calcul qui vient d'être fait,

$$y_n(x) = \int_a^b K(x, s) A(s) y_{n-1}(s)\, ds;$$

ce sont précisément les calculs qu'il faudrait effectuer pour résoudre par approximations successives l'équation de Fredholm

$$(16) \qquad y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) A(s) y(s)\, ds + \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds;$$

ce qui s'explique aisément d'après la façon même dont on a introduit la fonction $K(x, s)$. En effet, si l'intégrale $y(x)$ de l'équation (12) est nulle pour $x = a$ et pour $x = b$, le calcul fait pour l'équation $y'' = f(x)$ prouve que $y(x)$ doit satisfaire à l'équation intégrale (16). La réciproque est d'ailleurs immédiate. En résumé, *la recherche d'une intégrale de l'équation* (12) *s'annulant pour $x = a$ et pour $x = b$ revient à la résolution de l'équation de Fredholm* (16). On voit par là les différences essentielles entre le problème de Cauchy et ce nouveau problème aux limites. Tandis que la méthode des approximations successives, appliquée au problème de Cauchy, conduit toujours à une série convergente, la série (13) ne converge que si $|\lambda|$ est assez petit. De plus, il existe, nous le verrons tout à l'heure, une infinité de valeurs de λ pour

lesquelles le nouveau problème n'est possible que si la fonction $f(x)$ vérifie une condition subsidiaire.

Supposons d'abord que la valeur donnée du paramètre λ ne soit pas une valeur singulière pour le noyau $K(x, s)A(s)$; d'après la théorie générale, l'équation (16) admet une solution et une seule qu'on peut représenter par

$$y(x) = \int_a^b f(s) H(x, s; \lambda) ds. \tag{17}$$

$H(x, s; \lambda)$ étant une fonction méromorphe de λ, qui n'est pas identique à la résolvante, mais qui s'en déduirait aisément. D'ailleurs, en substituant l'expression (17) de $y(x)$ dans la relation (16) et en écrivant qu'on obtient une identité, on arrive à une équation fonctionnelle permettant de définir la fonction $H(x, s; \lambda)$

$$H(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(x, t) A(t) H(t, s; \lambda) dt. \tag{18}$$

On voit que $H(x, s; \lambda)$ est la somme de deux termes dont le second H_1 est continu, ainsi que sa dérivée $\frac{dH_1}{dx}$, dans l'intervalle (a, b). D'après les propriétés de $K(x, s)$, on a

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = \frac{d^2 H_1}{dx^2} = \lambda A(x) H(x, s; \lambda);$$

la dérivée $\frac{dH}{dx}$ présente donc la même discontinuité que la dérivée de $K(x, s)$ pour $x = s$, et H est nul, quel que soit s, pour $x = a$ et pour $x = b$. Ces propriétés suffisent à déterminer la fonction $H(x, s; \lambda)$. Soient, en effet, $y_1(x, \lambda)$ et $y_2(x, \lambda)$ deux intégrales de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda A(x) y. \tag{19}$$

continues ainsi que $y'_1(x)$, $y'_2(x)$ dans l'intervalle (a, b) et satisfaisant aux conditions de Cauchy, $y_1(a) = 0$, $y'_1(a) = 1$, $y_2(b) = 0$, $y'_2(b) = 1$. Toute intégrale de l'équation (19), qui est nulle pour $x = a$, et continue ainsi que sa dérivée dans l'intervalle (a, s), est de la forme $C_1 y_1(x, \lambda)$ dans cet intervalle; de même, si elle est continue ainsi que sa dérivée dans l'intervalle (s, b) et nulle pour $x = b$, elle est de la forme $C_2 y_2(x, \lambda)$ dans cet intervalle.

Pour que la fonction soit continue pour $x = s$, et que sa dérivée présente la même discontinuité que la dérivée de $K(x, s)$, il faut qu'on ait

$$(20) \qquad \begin{cases} C_2 y_2(s, \lambda) - C_1 y_1(s, \lambda) = 0, \\ C_2 y'_2(s, \lambda) - C_1 y'_1(s, \lambda) = 1, \end{cases}$$

équations qui donnent, en général, des valeurs finies pour C_1 et C_2. Le cas où le déterminant $y_2 y'_1 - y_1 y'_2$ serait nul sera examiné tout à l'heure.

Si l'on sait intégrer l'équation homogène (19), on peut donc former, sauf dans ce cas exceptionnel, la fonction $H(x, s; \lambda)$ qui joue le même rôle dans ce problème que la fonction $\varphi(x, \alpha)$ pour la résolution du problème de Cauchy (II, n° 401). Il est facile de vérifier que la fonction $y(x)$, représentée par la formule (17), donne la solution du problème. En effet, cette formule peut s'écrire

$$(17)' \qquad y(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds + \int_a^b H_1(x, s; \lambda) f(s)\, ds,$$

la fonction $H_1(x, s; \lambda)$ étant continue ainsi que ses dérivées entre a et b. On en déduit, en différentiant deux fois, et tenant compte de la propriété caractéristique de $K(x, s)$,

$$y''(x) = f(x) + \int_a^b \frac{d^2 H_1}{dx^2} f(s)\, ds = f(x) + \lambda \int_a^b A(x) H(x, s; \lambda) f(s)\, ds$$

ou

$$y''(x) = f(x) + \lambda A(x) y.$$

605. **Étude des valeurs singulières.** — Si λ est une valeur singulière pour le noyau $K(x, s) A(s)$ l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) A(s) \varphi(s)\, ds$$

admet une solution différente de zéro, et par suite l'équation (19) a une intégrale $\varphi(x)$ s'annulant aux deux limites a et b, ce qui prouve qu'à une valeur singulière ne correspond qu'une fonction fondamentale distincte. *Ces valeurs singulières sont en nombre infini.* Nous prouverons d'abord que $K(x, s)$ est un noyau défini. D'une part, ce noyau est *fermé*; si l'on a, en effet,

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s)\, ds = 0,$$

quel que soit x, on en déduit $\psi''(x) = \varphi(x) = 0$. De plus, toutes

les valeurs singulières de $K(x, s)$ sont *négatives*, car on obtient ces valeurs singulières en cherchant les valeurs de λ pour lesquelles l'équation $y'' = \lambda y(x)$ admet une intégrale s'annulant en a et b. Ces valeurs sont évidemment de la forme $-\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$, n étant un nombre entier, et les fonctions fondamentales sont

$$\sin\left\{\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right\}.$$

Il suit de là que le noyau $K(x, s)A(s)$ appartient à la classe étudiée au n° 595; la résolvante admet donc une infinité de pôles, tous réels et simples, et à chacun d'eux correspond une seule fonction fondamentale. Dans le cas particulier où la fonction $A(x)$ a le même signe entre a et b, le noyau $K(x, s)A(s)$ est un noyau de Schmidt, et les propriétés précédentes se démontrent encore plus simplement (n° 593). Si, par exemple, $A(x)$ est négatif, toutes les valeurs singulières sont positives. L'application de la méthode de Schwarz permet de déterminer de proche en proche les pôles de la résolvante et les fonctions fondamentales [1].

On peut former directement l'équation $D(\lambda) = 0$ qui donne les valeurs singulières en partant de l'équation différentielle elle-même. Soit, en effet, $y_1(x, \lambda)$ l'intégrale de l'équation (19) qui satisfait aux conditions initiales $y_1(a, \lambda) = 0$, $y'_1(a, \lambda) = 1$. Cette intégrale est une fonction entière du paramètre λ, qu'on peut développer suivant les puissances du paramètre λ en calculant les coefficients par la méthode des approximations successives (II, n° 390). En écrivant que cette intégrale est nulle aussi pour $x = b$, on obtient une équation entière en λ, $y_1(b, \lambda) = 0$, dont les racines sont précisément les valeurs singulières demandées. On peut remarquer que cette équation s'obtiendrait aussi en égalant à zéro le déterminant $y_2(s, \lambda)\, y'_1(s, \lambda) - y_1(s, \lambda)\, y'_2(s, \lambda)$ des équations (20); d'après la forme de l'équation (19) qui ne renferme pas de terme en y', ce déterminant est indépendant de s (II, n° 400) et identique à $-y_1(b, \lambda)$.

---

[1] E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. VI. Pour le cas où $A(x)$ a un signe quelconque, *voir* aussi la Thèse de M. SANIELEVICI (*Annales de l'École Normale*, 1909).

606. Refroidissement d'une barre hétérogène. — La méthode que nous venons de suivre dans le cas simple du numéro précédent s'étend sans difficulté à des équations du second ordre de forme plus générale avec des conditions aux limites un peu moins simples. Étant donnée une équation linéaire du second ordre

$$y'' + p(x)y' + \{q(x) + \lambda r(x)\}y = f(x)$$

où le coefficient de y est une fonction linéaire d'un paramètre λ, supposons qu'on veuille développer suivant les puissances de λ une intégrale satisfaisant à des conditions initiales de la forme (10). Le premier terme du développement s'obtiendra en résolvant le problème pour l'équation

$$(21) \qquad y'' + p(x)y + q(x)y = f(x);$$

l'application de la méthode de la variation des constantes permet de mettre cette intégrale sous la forme $\int_a^b K(x, s) f(s)\,ds$, $K(x, s)$ étant une fonction qui dépend à la fois des conditions aux limites imposées à l'intégrale et des coefficients $p(x)$ et $q(x)$. Cette fonction $K(x, s)$ étant déterminée, la résolution du problème proposé pour l'équation générale de la forme (21) est ramenée à la résolution de l'équation intégrale

$$(22) \qquad y(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\,r(s)\,y(s)\,ds = \int_a^b K(x, s) f(s)\,ds,$$

dont le noyau est $-K(x, s)\,r(s)$. Nous allons appliquer cette méthode au problème du refroidissement d'une barre hétérogène. Analytiquement, le problème est le suivant : *Trouver une intégrale de l'équation*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right) - lU = g\frac{\partial U}{\partial t}$$

se réduisant pour $t = 0$ à une fonction donnée $U_0(x)$ $(0 < x < X)$, et satisfaisant, en outre, aux conditions aux limites

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} + hU = 0 & \text{pour} \quad x = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial x} + HU = 0 & \text{pour} \quad x = X; \end{cases}$$

h et H sont des constantes positives, $k(x)$, $l(x)$, $g(x)$ des fonctions de x qui, d'après leur signification physique, sont essentiellement positives.

On commence par chercher des solutions simples de la forme

$$U = v\, e^{-\lambda t},$$

λ étant une constante et v une fonction de x satisfaisant aux conditions aux limites (23). En remplaçant U par $ve^{-\lambda t}$ dans l'équation (22), on voit que v doit être une intégrale de l'équation linéaire

$$\frac{d}{dx}\left\{ k\frac{dv}{dx} \right\} + (g\lambda - l)v = 0, \tag{24}$$

et l'on a tout d'abord à rechercher les valeurs de λ pour lesquelles l'équation (24) admet une intégrale non nulle satisfaisant aux conditions aux limites (23). Ces valeurs de λ sont les racines d'une équation transcendante facile à former. Soit, en effet, $V(x, \lambda)$ l'intégrale de (24) satisfaisant aux conditions initiales

$$V(x, \lambda) = 1, \qquad \frac{dV}{dx} = h \qquad \text{pour} \qquad x = 0;$$

cette intégrale est une fonction entière du paramètre λ et, en écrivant qu'on a aussi $\frac{dV}{dx} + HV = 0$ pour $x = X$, on a une équation entière en λ, $D(\lambda) = 0$, dont les racines sont précisément les valeurs du paramètre cherchées.

En s'appuyant sur les théorèmes d'oscillation de Sturm, on peut démontrer que cette équation a une infinité de racines réelles et distinctes [1]. Nous allons montrer que ces racines sont les valeurs singulières d'un noyau de Schmidt. Pour cela, nous allons tout d'abord résoudre le problème suivant : *Trouver une intégrale de l'équation linéaire*

$$\frac{d}{dx}\left\{ k\frac{dv}{dx} \right\} - lv = f(x) \tag{25}$$

satisfaisant aux conditions limites (23). Soient $v_1(x)$, $v_2(x)$ deux intégrales distinctes de l'équation sans second membre; la

---

[1] JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. III. Les fonctions ainsi déterminées sont les *fonctions de Sturm-Liouville* (*Journal de Liouville*, t. I).

méthode de Cauchy (II, n° 401) donne aisément l'intégrale générale de l'équation avec second membre

$$(26)\quad v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) + \int_0^x \{ v_1(s) v_2(x) - v_2(s) v_1(x) \} f(s)\, ds;$$

nous supposons, pour simplifier, qu'on a

$$k(0) = 1, \qquad v_1(0) = 1, \qquad v_1'(0) = 0, \qquad v_2(0) = 0, \qquad v_2'(0) = 1.$$

En écrivant que la fonction $v(x)$ satisfait aux deux conditions (23), on trouve pour valeurs des constantes C_1 et C_2

$$C_1 = \int_0^X \frac{A v_2(s) - B v_1(s)}{A + hB} f(s)\, ds,$$

$$C_2 = h \int_0^X \frac{A v_2(s) - B v_1(s)}{A + hB} f(s)\, ds,$$

en posant

$$A = v_1'(X) + H v_1(X), \qquad B = v_2'(X) + H v_2(X).$$

L'intégrale cherchée a donc pour expression

$$(27)\qquad v(x) = \int_0^X K(x, s) f(s)\, ds,$$

en posant

$$K(x, s) = \frac{v_1(x) + h v_2(x)}{A + hB} [A v_2(s) - B v_1(s)] \qquad \text{pour} \qquad x \leqq s,$$

$$K(x, s) = \frac{v_1(s) + h v_2(s)}{A + hB} [A v_2(x) - B v_1(x)] \qquad \text{pour} \qquad s \leqq x.$$

Le calcul suppose toutefois que $A + hB$ n'est pas nul; s'il en était ainsi, l'intégrale $v = v_1(x) + hv_2(x)$ de l'équation homogène satisferait aux conditions aux limites (23). Or, le rapport $\frac{v'}{v}$ est positif pour $x = 0$, et le coefficient $-l$ de v est négatif par hypothèse; ce rapport ne peut donc passer d'une valeur positive h à une valeur négative $-H$ lorsque x croît de 0 à X (n° 602).

Toute intégrale de l'équation (24), satisfaisant aux conditions aux limites (23), est donc solution de l'équation intégrale homogène

$$(28)\qquad y(x) + \lambda \int_0^X K(x, s) g(s) y(s)\, ds = 0,$$

obtenue en remplaçant $f(x)$ par $-\lambda g(x) y(x)$ dans les équa-

tions (25) et (27), et réciproquement. Le noyau $K(x, s)$ est encore fermé, car s'il existait une fonction continue $\varphi(x)$ telle que

$$\int_0^X K(x, s)\varphi(s)\,ds$$

fût nul quel que soit x, l'équation (25) où l'on aurait remplacé $f(x)$ par $\varphi(x)$ admettrait l'intégrale particulière $v = 0$, et, par suite, $\varphi(x)$ serait nul. Comme $g(x)$ est positif, le noyau $K(x, s)\,g(s)$ est un noyau de Schmidt, et il existe une infinité de valeurs singulières, toutes réelles, qui sont des pôles simples de la résolvante. A chacune de ces valeurs singulières correspond une seule fonction fondamentale, car deux intégrales de l'équation (24), satisfaisant à la première des conditions aux limites (23), ne peuvent différer que par un facteur constant.

Pour la même raison que tout à l'heure, aucune de ces valeurs singulières ne peut être négative. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$ ces valeurs singulières, rangées par ordre de grandeur croissante, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ les fonctions fondamentales correspondantes. Si la fonction $U_0(x)$ peut être représentée par une série uniformément convergente de la forme

$$(29)\qquad U_0(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots,$$

les coefficients $a_1, a_2, \ldots$ étant constants, la fonction

$$(30)\qquad U(x, t) = a_1 e^{-\lambda_1 t}\varphi_1(x) + a_2 e^{-\lambda_2 t}\varphi_2(x) + \ldots$$

satisfait à toutes les conditions du problème. Nous laisserons de côté l'examen des conditions suffisantes pour qu'une fonction $U_0(x)$ soit développable en une série uniformément convergente de la forme (29).

607. **Examen d'un cas singulier.** — Il peut se faire qu'en appliquant la méthode des approximations successives, on soit arrêté dès le début par cette circonstance que la première équation à résoudre n'admet pas d'intégrale satisfaisant aux conditions aux limites données. Soit, par exemple, à trouver une intégrale de l'équation linéaire

$$(31)\qquad y'' = A(x)y + f(x)$$

telle que $y'(a) = y'(b) = 0$. Pour appliquer la méthode habituelle, il faut d'abord chercher une intégrale de l'équation $y'' = f(x)$ satisfaisant à ces conditions; or, une telle intégrale n'existe que si la fonction $f(x)$ satisfait à la relation

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \tag{32}$$

et, dans ce cas, il existe une infinité d'intégrales répondant à la question, qui sont comprises dans la formule

$$y(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\,ds + C, \tag{33}$$

C étant une constante arbitraire, et le noyau $K(x, s)$ étant égal à $x - s$ pour $s \leqq x$, et à zéro pour $s \geqq x$.

Lorsque la fonction $f(x)$ ne vérifie pas la condition (32), on ne peut donc appliquer la méthode habituelle d'approximations à l'équation (31). Pour tourner la difficulté, un nouvel artifice est nécessaire. Toute intégrale de l'équation (31), telle que

$$y'(a) = y'(b) = 0,$$

satisfait aussi à la condition

$$\lambda \int_a^b A(x) y(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = 0, \tag{34}$$

qui est l'analogue de la condition (32). De plus, cette intégrale est aussi une solution de l'équation intégrale

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) A(s) y(s)\,ds + \int_a^b K(x, s) f(s)\,ds + C, \tag{35}$$

qui se déduit de (33) en remplaçant $f(x)$ par $f(x) + \lambda A(x) y(x)$. Nous avons donc un système de deux équations (34) et (35) pour déterminer la fonction inconnue $y(x)$ et la constante C. Il est possible d'éliminer la constante C, car si l'on remplace, dans la condition (34), $y(x)$ par son expression tirée de la formule (35), on obtient une relation

$$\lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x, s) A(x) A(s) y(s)\,dx\,ds$$
$$+ \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, s) A(x) f(s)\,dx\,ds + \lambda C \int_a^b A(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

d'où l'on tire la valeur de C pourvu que $\int_a^b A(x)\,dx$ ne soit pas nul. Bornons-nous à ce cas; en remplaçant C par l'expression ainsi obtenue dans la relation (35), on obtient pour déterminer $y(x)$ une équation de Fredholm

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} y(x) = \lambda \int_a^b & K_1(x, s)\,A(s)\,y(s)\,ds \\ & + \int_a^b K_1(x, s)\,f(s)\,ds - \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{\displaystyle\lambda \int_a^b A(x)\,dx}, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$K_1(x, s) = K(x, s) - \frac{\displaystyle\int_a^b K(x, s)\,A(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b A(x)\,dx} = K(x, s) - \Phi(s).$$

Le nouveau noyau $K(x, s)$ se déduit de $K(x, s)$ en retranchant une fonction de s choisie de façon qu'on ait

$$\int_a^b K_1(x, s)\,A(x)\,dx = 0.$$

Toute solution de l'équation intégrale (36) satisfait aux conditions voulues; d'une part, c'est une intégrale de l'équation (31), car elle satisfait aussi à l'équation intégrale (35). D'autre part, il suffit de refaire le calcul inverse du précédent pour voir que cette fonction satisfait aussi à la condition (34). C'est donc ici cette équation intégrale (36) qui donnera la solution du problème. On s'explique aisément, d'après ce résultat, pourquoi la méthode des approximations successives n'est plus applicable en général; en effet, si $\int_a^b f(x)\,dx$ n'est pas nul, l'intégrale cherchée $y(x, \lambda)$, considérée comme fonction du paramètre λ, admet, outre les pôles de la résolvante, le pôle $\lambda = 0$, provenant du terme tout connu dans l'équation intégrale.

Remarque. — Si λ est une valeur singulière du noyau $K_1(x, s)\,A(s)$, l'équation homogène $y'' = \lambda A(x)\,y$ admet une intégrale non identiquement

nulle, dont la dérivée est nulle aux deux limites a et b. Ces valeurs singulières sont aussi les valeurs singulières d'une infinité d'autres noyaux de même espèce. D'une façon générale, considérons une équation intégrale homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K_1(x, s)\, A(s)\, \varphi(s)\, ds, \tag{37}$$

pour laquelle on a $\int_a^b K_1(x, s)\, A(x)\, dx = 0$. On en déduit immédiatement qu'on a $\int_a^b A(x)\varphi(x)\, dx = 0$ pour toute fonction fondamentale $\varphi(x)$ de ce noyau, et par suite $\varphi(x)$ satisfait aussi à la nouvelle équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b [K_1(x, s) + X]\, A(s)\, \varphi(s)\, ds, \tag{38}$$

quelle que soit la fonction X de la variable x. Toute fonction fondamentale pour le noyau $K_1(x, s)\, A(s)$ est aussi une fonction fondamentale pour le noyau $\{K_1(x, s) + X\}\, A(s)$, correspondant à la même valeur singulière. Inversement, soit $\varphi(x)$ une solution de l'équation (38); elle vérifie aussi la relation

$$\int_a^b A(x)\, \varphi(x)\, dx = \lambda \int_a^b A(s)\, \varphi(s)\, ds \times \int_a^b XA(x)\, dx.$$

On a donc $\int_a^b A(x)\varphi(x)\, dx = 0$, à moins que le produit $\lambda \int_a^b XA(x)\, dx$ ne soit égal à l'unité. Dans le premier cas, $\varphi(x)$ est aussi une solution de l'équation (37); la seconde hypothèse donne pour λ une valeur déterminée, à laquelle ne peuvent correspondre qu'un nombre *fini* de solutions distinctes de l'équation (38).

608. **Solutions périodiques.** — Un artifice du même genre permet de ramener à la résolution d'une équation de Fredholm la recherche des solutions périodiques d'une équation linéaire

$$y''(x) = \lambda A(x) y + f(x), \tag{39}$$

où $A(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions périodiques de période ω. Une intégrale de cette équation sera périodique si l'on a

$$y(\omega) = y(0), \qquad y'(\omega) = y'(0).$$

Considérons d'abord l'équation obtenue en supposant $\lambda = 0$; pour

que cette équation admette une solution périodique, il faut évidemment qu'on ait $\int_0^\omega f(x)\,dx = 0$, condition qui exprime que $y'(\omega) = y'(0)$ et, si cette condition est satisfaite, il existe une infinité d'intégrales répondant à la question

$$y = \int_0^x (x-s)f(s)\,ds - \frac{x}{\omega}\int_0^\omega (\omega - s)f(s)\,ds + C,$$

C étant une constante arbitraire. On peut encore écrire cette intégrale

$$y = \int_0^\omega K(x, s)f(s)\,ds + C,$$

$K(x, s)$ étant égal à $\frac{s}{\omega}(x-\omega)$ pour $s < x$, et à $\frac{x}{\omega}(s-\omega)$ pour $x < s$.

Supposons maintenant que l'équation (39) admette une intégrale périodique; cette intégrale vérifie les deux relations

$$\lambda \int_0^\omega A(x)y(x)\,dx + \int_0^\omega f(x)\,dx = 0,$$

$$y(x) = \int_0^\omega K(x, s)[\lambda A(s)y(s) + f(s)]\,ds + C,$$

et l'élimination de C conduit, comme au numéro précédent, en supposant que $\int_0^\omega A(x)\,dx$ n'est pas nul, à une équation intégrale dont le noyau est de la forme $K_1(x, s)A(s)$, où $K_1(x, s)$ ne diffère de $K(x, s)$ que par une fonction $\Phi(s)$ de s choisie de telle façon que $\int_0^\omega K_1(x, s)A(x)\,dx$ soit nul. Les remarques qui ont été faites à propos de l'équation (36) s'appliquent aussi à cette équation. En supposant $f(x) = 0$, on obtient une équation intégrale homogène dont les solutions sont les intégrales périodiques de l'équation $y'' = \lambda A(x)y$, les valeurs correspondantes de λ étant les valeurs singulières du noyau. Ces valeurs singulières sont aussi les valeurs singulières d'un noyau de la forme

$$[K(x, s) - \Phi(x) - \Phi(s)]\,A(s),$$

$\Phi(s)$ étant défini comme on vient de le dire (n° 607, *Remarque*).

II. — APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

609. **Problèmes relatifs aux fonctions harmoniques.** — Une des premières et des plus belles applications de la théorie de Fredholm concerne le problème de Dirichlet. Nous développerons les raisonnements pour le problème dans l'espace, en considérant une surface fermée régulière Σ, admettant un plan tangent unique en chaque point, dont la position varie d'une manière continue avec le point de contact. Conformément à une notation déjà expliquée, les symboles $f(M)$, $\varphi(M)$, $f(M, P)$, ... représentent des fonctions des coordonnées du point M ou des coordonnées des deux points M et P, variables sur la surface Σ, et nous mettrons un seul signe $\int$ pour représenter une intégrale multiple, comme il n'y a aucune ambiguïté à craindre. Pour trouver une fonction harmonique dans le domaine D intérieur à Σ et se réduisant sur cette surface à une fonction continue donnée $g(M)$, la méthode de Neumann consiste (n° 533) à représenter cette fonction harmonique par un potentiel de double couche dû à l'action d'une double couche étalée sur la surface Σ. Si l'on prend pour inconnue la densité $\rho(M)$ de cette couche, cette densité doit satisfaire à l'équation intégrale

$$(40) \qquad 2\pi\rho(M) + \int_{(\Sigma)} \rho(P)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma_P = g(M),$$

r étant la distance des deux points M et P, φ l'angle de la normale intérieure en P avec la direction PM; M et P sont deux points de la surface Σ, dont l'un M est supposé fixe dans l'intégrale, tandis que le point P décrit la surface Σ. La résolution du problème de Dirichlet extérieur par la méthode de Neumann conduirait à une équation de même forme qui se déduirait de la première en changeant $\rho(M)$ en $-\rho(M)$. Ces deux équations intégrales sont deux cas particuliers de l'équation de Fredholm,

$$(41) \quad \rho(M) = \lambda\int_{(\Sigma)} K(M, P)\,\rho(P)\,d\sigma_P + f(M), \qquad f(M) = \frac{1}{2\pi}g(M),$$

dont le noyau $K(M, P) = -\frac{\cos\varphi}{2\pi r^2}$; pour $\lambda = 1$, on a le problème de Dirichlet intérieur, pour $\lambda = -1$ le problème extérieur. Pour

une valeur quelconque de λ, l'équation (41) donnerait la solution du problème suivant : *Trouver la densité* ρ *d'une double couche étalée sur* Σ *telle que le potentiel de double couche correspondant* W *vérifie, en chaque point* M *de* Σ, *la relation*

$$(42)\qquad W_i(M) - W_e(M) + \lambda[W_i(M) + W_e(M)] = 4\pi f(M);$$

$W_i(M)$ et $W_e(M)$ sont les limites vers lesquelles tend la valeur du potentiel $W(M')$, lorsque le point M' tend vers le point M en restant à l'intérieur ou à l'extérieur de Σ (n° 527). Le noyau K(M, P) devient infini comme $\frac{1}{r}$, lorsque les deux points M et P coïncident, mais on a remarqué qu'il suffisait de deux itérations pour en déduire un noyau borné (n° 563). On peut donc appliquer à l'équation (41) la théorie de Fredholm.

L'équation intégrale associée s'obtient en échangeant le rôle des deux points M et P dans le noyau : nous l'écrirons

$$(43)\qquad \rho(M) = \lambda \int_{(\Sigma)} K(P, M)\,\rho(P)\,d\sigma_P + f(M),$$

K(P, M) étant égal à $-\frac{\cos\psi}{2\pi r^2}$, où ψ désigne l'angle de la normale intérieure en M avec la direction MP. Cette seconde équation se présente dans un problème important relatif au potentiel de simple couche. Soit V le potentiel dû à l'action d'une couche simple de densité ρ étalée sur Σ; en tout point de Σ, les dérivées normales [1] de ce potentiel vérifient les relations (n° 538)

$$(44)\qquad \frac{dV}{dn_e} - \frac{dV}{dn_i} = 4\pi\rho(M),$$

$$(45)\qquad \frac{dV}{dn_e} + \frac{dV}{dn_i} = 2\int_{(\Sigma)} \frac{\cos\psi}{r^2}\rho(P)\,d\sigma_P.$$

Si la densité $\rho(M)$ est une solution de l'équation (43), les dérivées normales du potentiel correspondant V vérifient donc la rela-

---

[1] Nous écrirons désormais $\frac{dV}{dn_i}$ et $\frac{dV}{dn_e}$ au lieu de $\frac{dV_i}{dn_i}$ et $\frac{dV_e}{dn_i}$, mais on doit se rappeler que ces dérivées sont toujours prises suivant la direction de la normale intérieure. Nous désignerons les densités par ρ, ρ_1, ρ_2, ...

tion, analogue à l'équation (42),

$$(46) \qquad \frac{dV}{dn_e}(1+\lambda) = \frac{dV}{dn_i}(1-\lambda) + 4\pi f(M),$$

et réciproquement. La résolution de l'équation intégrale (43) donnerait donc la solution du problème suivant : *Trouver la densité d'une simple couche étalée sur Σ, telle que les dérivées normales du potentiel correspondant en chaque point de Σ vérifient la relation* (46). Les valeurs $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ du paramètre correspondent au cas où l'on se donne $\frac{dV}{dn_e}$ ou $\frac{dV}{dn_i}$, c'est-à-dire au problème de Neumann extérieur ou au problème de Neumann intérieur (n° 524). On voit par là que les deux problèmes de Dirichlet et de Neumann pour une même surface se ramènent à deux équations intégrales associées, le problème intérieur de Dirichlet correspondant au problème extérieur de Neumann, et réciproquement.

Rappelons d'abord quelques propriétés du potentiel de simple couche. Soient V_1 et V_2 deux potentiels dus à l'action de deux couches simples de densités ρ_1 et ρ_2 étendues sur Σ; V_1 et V_2 sont deux fonctions harmoniques dans le domaine D intérieur à Σ dont les dérivées normales ont des valeurs finies sur Σ; et, par suite, vérifient la relation générale (n° 528)

$$(47) \qquad \int_{(\Sigma)} \left(V_1 \frac{dV_2}{dn_i} - V_2 \frac{dV_1}{dn_i} \right) d\sigma = 0;$$

chacun de ces potentiels vérifie aussi la relation

$$(48) \qquad \int_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn_i} d\sigma + \int_{D} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dv = 0.$$

D'autre part, V_1 et V_2 sont nuls, à l'infini comme $\frac{1}{R}$, et leurs dérivées partielles sont de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$ (n° 526), R étant la distance du point (x, y, z) à un point fixe O. Les intégrales $\int V_1 \frac{dV^2}{dn_i} d\sigma$, étendues à la surface d'une sphère de centre O, dont le rayon augmente indéfiniment, tendent donc vers zéro. Si l'on applique les formules générales (11) et (13) du n° 528 aux deux potentiels V_1

et V_2 dans le domaine limité par Σ et la surface d'une sphère de centre O dont on fait croître le rayon indéfiniment, on voit que ces deux potentiels vérifient aussi la relation

$$(47)' \qquad \int_{(\Sigma)} \left(V_1 \frac{dV_2}{dn_e} - V_2 \frac{dV_1}{dn_e} \right) d\sigma = 0,$$

et, de plus, chacun de ces potentiels satisfait à l'équation

$$(48)' \qquad \int_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn_e} d\sigma = \int_{(D')} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dv,$$

D' étant la portion indéfinie de l'espace extérieur à Σ.

Si $\frac{dV}{dn_e}$ est nul en tout point de Σ, la formule (48)' prouve que V est constant dans D', puisque $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ doivent être nuls en chaque point de D'. Comme V est nul à l'infini, il est nul dans tout ce domaine et par suite sur Σ. Étant nul sur Σ, il est nul aussi à l'intérieur, puisqu'il est harmonique dans D. La densité correspondante sera nulle aussi, d'après la relation (44). Au contraire, si $\frac{dV}{dn_i}$ est nul en tout point de Σ, la formule (48) montre bien que V est constant dans D et par suite sur Σ; mais il n'est pas constant dans D' à moins d'être identiquement nul. En dehors des deux cas précédents, l'intégrale $\int_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn_i} d\sigma$ est négative, et l'intégrale $\int_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn_e} d\sigma$ est positive. Cette dernière intégrale ne peut être nulle que si V et, par suite, la densité ρ sont identiquement nuls. De ces propriétés du potentiel, on peut déduire aisément les propriétés de la résolvante [1] des équations (41) et (43).

1° *Tous les pôles de la résolvante sont réels.* Supposons, en effet, qu'il y ait un pôle complexe $\lambda_0 = \alpha + i\beta$; l'équation homogène, obtenue en remplaçant λ par λ_0 et $f(M)$ par zéro dans l'équation (43), admettrait une solution $\rho_1(M) + i\rho_2(M)$ et la fonction harmonique complexe $V_1 + iV_2$, où V_1 et V_2 sont les potentiels dus à l'action des deux couches simples de densité ρ_1

[1] J. Plemelj, *Monatshefte für Math. und Physik.*, t. XV et XVIII.

et ρ_2, vérifierait la relation

$$\frac{dV_1}{dn_e} + i\frac{dV_2}{dn_2} = \frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0}\left(\frac{dV_1}{dn_i} + i\frac{dV_2}{dn_i}\right).$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $V_1 - iV_2$ et intégrant sur la surface Σ, il reste, en tenant compte des formules (47) et (47)',

$$\int_{(\Sigma)}\left(V_1\frac{dV_1}{dn_e} + V_2\frac{dV_2}{dn_e}\right)d\sigma = \frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0}\int_{(\Sigma)}\left(V_1\frac{dV_1}{dn_i} + V_2\frac{dV_2}{dn_i}\right)d\sigma.$$

La première intégrale double ne peut être nulle, on vient de le voir, que si V_1, V_2, et par suite ρ_1 et ρ_2, sont identiquement nuls. Le rapport $\frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0}$ doit donc être réel, ce qui exige qu'on ait $\beta = 0$.

2° *Tous ces pôles sont simples.* Supposons, en effet, que λ soit un pôle multiple. Il existerait alors (nos 578-580) deux fonctions $\rho_1(M)$ et $\rho_2(M)$, différentes de zéro, et satisfaisant aux relations

$$\rho_1(M) = \lambda\int_{(\Sigma)} K(P, M)\rho_1(P)\,d\sigma_P,$$

$$\rho_1(M) + \rho_2(M) = \lambda\int_{(\Sigma)} K(P, M)\rho_2(P)\,d\sigma_P:$$

les potentiels correspondants V_1 et V_2 vérifieraient aussi les relations

$$\frac{dV_1}{dn_e} - \frac{dV_1}{dn_i} + \lambda\left(\frac{dV_1}{dn_e} + \frac{dV_1}{dn_i}\right) = 0,$$

$$\frac{dV_1}{dn_e} - \frac{dV_1}{dn_i} + \frac{dV_2}{dn_e} - \frac{dV_2}{dn_i} + \lambda\left(\frac{dV_2}{dn_e} + \frac{dV_2}{dn_i}\right) = 0.$$

Multiplions la première de ces relations par V_2, la seconde par $-V_1$, ajoutons et intégrons le long de Σ; il reste, d'après les formules (47) et (47)',

$$\int_{(\Sigma)} V_1\frac{dV_1}{dn_e}\,d\sigma = \int_{(\Sigma)} V_1\frac{dV_1}{dn_i}\,d\sigma.$$

Or, une telle relation exige que les deux intégrales soient nulles, puisqu'elles sont de signes contraires, et la première ne peut être nulle que si l'on a $\rho_1 = 0$.

3° *Il n'y a aucun pôle compris entre* -1 *et* $+1$. Soit, en

effet, $\rho(M)$ une fonction fondamentale correspondant au pôle λ, V le potentiel déduit de la couche de densité ρ. De la relation (46), où l'on fait $f(M) = 0$, on déduit en multipliant par V et intégrant

$$\int_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn_e} d\sigma = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \int_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn_i} d\sigma.$$

Une telle relation est impossible si λ est compris entre -1 et $+1$, car le facteur $\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ est alors positif, et les deux intégrales sont de signes contraires. Il faudrait donc que les deux intégrales soient nulles, ce qui entraîne $\rho(M) = 0$.

4° $\lambda = 1$ *n'est pas une valeur singulière.* En effet, si $\lambda = 1$ était une valeur singulière, on aurait, d'après la formule précédente, un potentiel de simple couche V pour lequel $\int_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn_e} d\sigma$ serait nul et, par suite, ρ serait nul aussi.

5° $\lambda = -1$ *est un pôle de la résolvante.* En effet, l'équation homogène obtenue en faisant $\lambda = -1$, $f(M) = 0$ dans l'équation (41), admet la solution $\rho(M) = 1$, d'après les propriétés de l'intégrale de Gauss (n° 527). L'équation homogène associée

$$\rho(M) = \int_{(\Sigma)} \rho(P) \frac{\cos\psi}{2\pi r^2} d\sigma_P \tag{49}$$

admet une solution non nulle ρ, pour laquelle le potentiel de simple couche correspondant V satisfait à la relation $\frac{dV}{dn_i} = 0$, en tout point de Σ. Ce potentiel est donc constant dans D, et la résolution de l'équation (49) fait connaître la densité d'une couche électrique étalée sur Σ et sans action sur un point intérieur. *A ce pôle $\lambda = -1$ ne correspond qu'une fonction fondamentale distincte pour chacune des équations* (41) et (43), car il est évident qu'une masse donnée d'électricité placée sur un conducteur isolé ne peut s'y distribuer que d'une seule façon. Il est d'ailleurs aisé de le démontrer analytiquement. Soient, en effet, ρ_1, ρ_2 deux solutions de l'équation (49); il leur correspond deux potentiels V_1, V_2, dont chacun est constant dans D. On peut donc trouver deux constantes non nulles α_1, α_2, telles que $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$ soit nul dans D; or, ce potentiel est dû à l'action d'une couche de densité $\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$. On

a donc aussi $\alpha_1\rho_1+\alpha_2\rho_2=0$, et deux solutions ρ_1 ρ_2 ne sont pas distinctes.

Aux valeurs singulières dont la valeur absolue dépasse l'unité, peuvent correspondre plusieurs fonctions fondamentales distinctes. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour une sphère. Le noyau K (M, P) est alors égal à $-\frac{1}{4\pi r}$, en prenant pour unité le rayon de la sphère. Ce noyau est symétrique et nous avons déterminé les valeurs singulières et les fonctions fondamentales au n° 532. Les valeurs singulières sont les nombres impairs négatifs $-(2m+1)$, et à la valeur $-(2m+1)$ correspondent les $2m+1$ fonctions de Laplace distinctes $Y_m(\theta, \psi)$ [1].

Le problème de Dirichlet intérieur et le problème de Neumann extérieur qui correspondent à la valeur non singulière $\lambda=1$ admettent toujours une solution unique qui est donnée par la méthode de Fredholm. Au contraire, les deux équations (41) et (43), où l'on fait $\lambda=-1$, n'admettent de solutions que si $f(M)$ satisfait à une condition subsidiaire qu'on obtient en écrivant que cette fonction est orthogonale à la fonction fondamentale de l'équation homogène associée correspondant à la valeur -1 de λ. Prenons, par exemple, le problème de Neumann intérieur; pour qu'il existe un potentiel de simple couche satisfaisant à la relation $\frac{dV}{dn_i}=f(M)$ en tous les points de Σ, la fonction $f(M)$ doit être orthogonale à la fonction fondamentale correspondante $\rho=1$ de l'équation (41), c'est-à-dire vérifier la relation

$$\int_{(\Sigma)} f(M)\, d\sigma_M = 0. \tag{50}$$

Cette condition s'explique aisément, car elle est une conséquence de la relation générale (12) du n° 528 qui s'applique à toute fonction harmonique dans D, dont les dérivées restent finies sur Σ. Si la condition (50) est vérifiée, le problème de Neumann admet une infinité de solutions, qui ne diffèrent que par une constante arbitraire; on les obtient encore par la résolution d'une équation de Fredholm homogène.

[1] Dans le cas général, les solutions des équations (41) et (43) s'expriment en séries de fonctions fondamentales, comme pour un noyau symétrique (Poincaré, *Acta mathematica*, t. XX, 1897).

De même, pour que l'équation (41) où $\lambda = -1$ admette une solution, il faut que la fonction donnée $f(M)$ soit orthogonale à la fonction $\rho_1(M)$ qui représente la densité d'une simple couche étalée sur Σ et sans action sur un point intérieur. Cependant, nous savons *a priori* que le problème de Dirichlet extérieur admet une solution, puisqu'on peut le ramener au problème intérieur par la transformation de Lord Kelvin. On s'explique cette contradiction apparente, si l'on observe qu'une fonction harmonique nulle à l'infini ne peut pas toujours être représentée par un potentiel de double couche, puisque ce potentiel est nul à l'infini comme $\frac{1}{R^2}$. Lorsque la condition de possibilité est réalisée, la densité $\rho(M)$ n'est déterminée qu'à une constante près; puisqu'on peut augmenter $\rho(M)$ d'une constante arbitraire sans changer la valeur du potentiel de double couche en un point extérieur.

610. **Remarques diverses.** — *Méthode de Neumann.* — M. Kellogg a fait observer que la méthode de Neumann pour résoudre le problème de Dirichlet dans le cas d'une surface convexe se rattachait aisément à la théorie générale de Fredholm. Dans cette méthode, on écrit l'équation intégrale à résoudre (n° 533)

$$\rho(M) = \lambda' \int_{(\Sigma)} [\rho(M) - \rho(P)] \frac{\cos\varphi}{4\pi r^2} d\sigma_P + \frac{1}{4\pi} U(M)$$

et l'on développe $\rho(M)$ suivant les puissances de λ', puis l'on fait $\lambda' = 1$ dans la série obtenue. Pour justifier ce procédé, il suffit de montrer que la solution cherchée, considérée comme fonction de λ', est holomorphe à l'intérieur d'un domaine renfermant le cercle $|\lambda'| \leqq 1$. Or, on peut écrire l'équation précédente

$$\rho(M) = \frac{\lambda'}{2} \int_{(\Sigma)} K(M, P) \rho(P) d\sigma_P + \frac{\lambda'}{2} \rho(M) + \frac{1}{4\pi} U(M)$$

ou

$$\rho(M) = \frac{\lambda'}{2 - \lambda'} \int_{(\Sigma)} K(M, P) \rho(P) d\sigma_P + \frac{U(M)}{2\pi(2 - \lambda')}.$$

Lorsque λ' décrit le cercle Γ' de rayon 1, de centre $\lambda' = 0$, le paramètre $\lambda = \frac{\lambda'}{2 - \lambda'}$ décrit un cercle Γ ayant pour diamètre la portion de l'axe réel limitée aux deux points d'abscisses $\lambda = 1$, $\lambda = -\frac{1}{3}$. D'après les propriétés de la résolvante, la solution $\rho(M)$, considérée comme fonction de λ, est holomorphe dans un domaine renfermant ce cercle Γ. Considérée comme fonction de λ', elle est donc aussi holomorphe dans un domaine renfermant le cercle Γ' et, par suite, son développement suivant les puissances de λ'

est convergent pour $\lambda' = 1$. La méthode de Neumann revient donc au fond à effectuer sur le paramètre, qui figure dans l'équation (41), une transformation homographique, et il est clair qu'on pourrait en imaginer une infinité d'autres remplissant le même but.

Méthode de Robin. — Le pôle $\lambda = -1$ de la résolvante est le pôle de module minimum, et à ce pôle correspond une seule solution de l'équation (49). Pour avoir cette solution, on peut donc employer la méthode générale d'itérations successives expliquée au n° 582. Soit $u_0(\mathrm{M})$ une fonction continue quelconque sur Σ telle que $\int_{(\Sigma)} u_0(\mathrm{M})\, d\sigma_{\mathrm{M}}$ ne soit pas nul, par exemple une fonction positive. Si l'on forme une suite indéfinie de fonctions $u_0(\mathrm{M})$, $u_1(\mathrm{M})$, ... définies par la loi de récurrence

$$u_n(\mathrm{M}) = \int_{(\Sigma)} u_{n-1}(\mathrm{P}) \frac{\cos\psi}{2\pi r^2}\, d\sigma_{\mathrm{P}},$$

on a vu que, lorsque n croît indéfiniment, $u_n(\mathrm{M})$ a pour limite une solution de l'équation (49). C'est précisément la méthode employée par Robin pour résoudre le problème de la distribution de l'électricité sur un conducteur limité par une surface convexe.

Discussion du problème de Dirichlet extérieur. — Quelle que soit la fonction continue donnée $f(\mathrm{M})$ sur Σ, la fonction harmonique à l'extérieur de Σ, nulle à l'infini et prenant les valeurs données sur Σ, peut s'exprimer par la somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche. Supposons une masse d'électricité positive égale à *un* en équilibre sur la surface Σ, et soit $\rho_1(\mathrm{M})$ la densité de la couche. On a

$$\int_{(\Sigma)} \rho_1(\mathrm{M})\, d\sigma_{\mathrm{M}} = 1,$$

et le potentiel V_1, dû à l'action de cette couche, a une valeur constante différente de zéro $\mathrm{V}_1(\mathrm{M})$ en chaque point de Σ; de plus, V_1 est nul à l'infini et sa partie principale est $\frac{1}{\mathrm{R}}$. Soit C une constante telle qu'on ait

$$\int_{(\Sigma)} \rho_1(\mathrm{M})[f(\mathrm{M}) - \mathrm{C}\mathrm{V}_1(\mathrm{M})]\, d\sigma_{\mathrm{M}} = 0,$$

il existe alors un potentiel de double couche W tel qu'en chaque point M de Σ on ait $\mathrm{W}_e(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}) - \mathrm{C}\mathrm{V}_1(\mathrm{M})$, et la fonction harmonique

$$\mathrm{W}(x, y, z) + \mathrm{C}\mathrm{V}_1(x, y, z)$$

donne la solution du problème de Dirichlet extérieur. La partie principale à l'infini est $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}}$: pour que cette fonction se réduise à un potentiel de double couche, il suffit donc qu'on ait $\mathrm{C} = 0$, ou qu'elle soit nulle à l'infini comme $\frac{1}{\mathrm{R}^2}$.

611. Problème dans le plan. — La discussion que nous venons de faire des problèmes de Dirichlet et de Neumann dans l'espace peut être répétée sans modifications essentielles pour les problèmes du même nom dans le plan, la surface Σ étant remplacée par une courbe fermée C sans points anguleux, le noyau $K(M, P) = -\frac{\cos\varphi}{\pi r}$, r étant la distance des deux points M et P de C, φ l'angle de PM avec la normale intérieure en P; le noyau de l'équation associée est de même $\frac{-\cos\psi}{\pi r}$, ψ étant l'angle de la normale en M avec MP. Les démonstrations qui ont été développées au n° 609 reposent toutes en définitive sur les propriétés des potentiels de simple couche exprimées par les formules (47), (48), (47)′ et (48)′. Les deux premières s'étendent immédiatement aux potentiels dans le plan, en remplaçant Σ par C, et le domaine D de l'espace par le domaine plan intérieur à C. Mais il n'en est pas de même pour les formules (47)′ et (48)′. En effet, le potentiel de simple couche $V = \int_C \rho \log\frac{1}{r}\,ds$ est infini comme $Q\log\frac{1}{R}$ en un point du cercle Γ de rayon très grand R ayant pour centre un point fixe O du plan, où $Q = \int_{(C)} \rho\,ds$; la différence $V - Q\log\frac{1}{R}$ est de l'ordre de $\frac{1}{R}$. La dérivée $\frac{dV}{dn}$ prise suivant la normale intérieure au cercle Γ est de la forme $-\frac{Q}{R} + \varepsilon$, le terme ε étant de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$. Soient V_1, V_2 deux potentiels dus à l'action de deux couches simples de densité ρ_1 et ρ_2 étalées sur C; on voit facilement que l'intégrale $\int_\Gamma \left(V_1\frac{dV_2}{dn} - V_2\frac{dV_1}{dn}\right) ds$, prise le long de Γ, tend vers zéro lorsque R augmente indéfiniment, de sorte que la formule analogue à (47)′ est encore applicable à deux potentiels logarithmiques de simple couche. Mais l'intégrale $\int_\Gamma V\frac{dV}{dn}\,ds$ ne tend vers zéro lorsque R augmente indéfiniment que lorsque $Q = \int_{(C)} \rho\,ds = 0$. Dans ce cas seulement, on peut appliquer au potentiel logarithmique V la formule analogue à (48)′, D′ étant le domaine indéfini extérieur à C.

Cela posé, pour que les conclusions établies dans le cas de l'espace subsistent dans le cas du plan, il suffit de prouver que la relation $\int_{(C)} \rho\,ds = 0$ est vérifiée pour toute solution de l'équation homogène

$$\rho(M) = \lambda \int_{(C)} \frac{\cos\psi}{-2\pi r}\rho(P)\,ds_P. \tag{51}$$

C'est certainement ce qui a lieu si la valeur singulière λ est différente

de -1, car la fonction fondamentale $\rho(M)$ doit être orthogonale à la solution fondamentale $\rho = 1$ de l'équation homogène associée correspondant à la valeur $\lambda = -1$. Toutes les conclusions qu'on a déduites des formules (47), (48), (47)', (48)' dans le cas de l'espace s'appliquent donc aux problèmes plans.

Toutefois, une étude spéciale est nécessaire pour la valeur singulière $\lambda = -1$, à laquelle ne s'applique pas le raisonnement. Ce pôle ne peut être un pôle multiple; car on aurait alors deux potentiels V_1, V_2 vérifiant les relations

$$\frac{dV_1}{dn_e} - \frac{dV_1}{dn_i} = \frac{dV_1}{dn_i} + \frac{dV_1}{dn_i},$$
$$\frac{dV_2}{dn_e} - \frac{dV_2}{dn_i} = \frac{dV_2}{dn_e} + \frac{dV_2}{dn_i} - \frac{dV_1}{dn_e} - \frac{dV_1}{dn_i}.$$

On tire de la seconde $\int_{(C)} \frac{dV_1}{dn_e}\,ds = 0$; comme on a aussi $\int_{(C)} \frac{dV_1}{dn_i}\,ds = 0$, on en déduirait encore $\int_{(C)} \rho\,ds = 0$, ρ étant la densité correspondante, et le raisonnement s'achève comme plus haut.

A la valeur singulière -1 ne correspond qu'une fonction fondamentale distincte. Soient, en effet, ρ_1 et ρ_2 deux solutions de l'équation (51), V_1 et V_2 les potentiels correspondants qui sont constants dans D. Prenons deux constantes non nulles α_1, α_2 telles que $\int_C (\alpha_1, \rho_1 + \alpha_2, \rho_2)\,ds = 0$; le potentiel $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$ sera nul à l'infini et constant dans D. Étant constant sur C et harmonique dans le domaine extérieur D', il est aussi constant dans D' et par suite nul dans tout le plan. On aura donc aussi $\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 = 0$.

Les conclusions relatives aux équations intégrales sont donc les mêmes que dans le cas de l'espace. Mais il y a lieu de faire quelques remarques sur l'interprétation. Le problème de Dirichlet intérieur admet encore une solution unique, qui peut être représentée par un potentiel de double couche. Au contraire, la solution du problème de Dirichlet extérieur ne peut être fournie par un potentiel de double couche que si une condition subsidiaire est vérifiée, ce qui s'explique puisque ce potentiel est nul à l'infini; mais on démontre aisément que toute fonction harmonique à l'extérieur de C est égale à la somme d'une constante et d'un potentiel de double couche. Pour le problème de Neumann intérieur, la méthode de Fredholm ne donne une solution que si la fonction $f(M)$ donnée, qui est égale à $\frac{dV}{dn_i}$ sur le contour, satisfait à la relation $\int_C f(M)\,ds = 0$, condition qui est inhérente au problème lui-même (n° 506). Il semble, au contraire, que le problème de Neumann extérieur admet toujours une solution quelle que soit la fonction $f(M)$ qui est égale à $\frac{dV}{dn_e}$ sur le contour. Mais

cette solution, étant représentée par un potentiel de simple couche, n'est pas en général régulière à l'infini.

Soit $\rho(M)$ la solution de l'équation

$$\rho(M) = -\int_{(C)} \rho(P)\frac{\cos\psi}{\pi r}\,ds_P + f(M);$$

en multipliant les deux membres par ds_M et intégrant le long de C, il vient

$$\int_{(C)} \rho(M)\,ds_M = -\int_{(C)}\int_{(C)} \rho(P)\frac{\cos\psi}{\pi r}\,ds_P\,ds_M + \int_{(C)} f(M)\,ds_M;$$

ce qu'on peut écrire, en faisant d'abord varier le point M dans l'intégrale double,

$$2\int_{(C)} \rho(M)\,ds_M = \int_{(C)} f(M)\,ds_M.$$

Pour que le potentiel V, dû à l'action de la couche de densité $\rho(M)$, soit régulier à l'infini, il faut donc et il suffit qu'on ait $\int_{(C)} f(M)\,d\sigma_M = 0$. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Neumann extérieur ait une solution.

612. **Problème de la chaleur.** — Aux problèmes de Dirichlet et de Neumann il convient d'ajouter un autre problème, dit *Problème de la chaleur*, où l'on cherche la température d'un corps en équilibre de température avec rayonnement. La température U en chaque point du corps est une fonction harmonique des coordonnées de ce point, qui vérifie, en outre, la condition suivante : En tout point M de la surface limite Σ, on a la relation

$$(52)\qquad \frac{dU}{dn_i} - h(M)U = f(M)$$

h et f étant des fonctions continues données sur Σ. Si l'on cherche encore à représenter cette fonction harmonique par un potentiel dû à une simple couche étalée sur Σ, la densité $\rho(M)$ de cette couche doit satisfaire à l'équation intégrale

$$(53)\qquad \rho(M) = \lambda\int_{(\Sigma)} \rho(P)\left[\frac{\cos\psi}{2\pi r^2} - \frac{h(M)}{2\pi r}\right]d\sigma_P - \frac{f(M)}{2\pi}$$

où l'on prend $\lambda = 1$. Laissant de côté l'étude générale de cette équation de Fredholm, nous montrerons seulement que $\lambda = 1$

n'est pas une valeur singulière dans le cas où $h(M)$ est positif, condition qui est remplie pour le problème du rayonnement, et que nous supposerons satisfaite dans la suite. Supposons, en effet, que l'équation homogène obtenue en faisant $\lambda = 1$, $f(M) = 0$ ait une solution $\rho(M)$ différente de zéro. Le potentiel de simple couche correspondant V vérifierait la relation $\frac{dV}{dn_i} = h(M)V$ en tout point de Σ et, par suite, on aurait

$$\int_{(\Sigma)} V \frac{dV}{dn_i} d\sigma = \int_{(\Sigma)} h V^2 \, d\sigma.$$

Or, la première intégrale ne peut être positive; l'égalité ne peut donc avoir lieu que si V est nul en tout point de Σ et, par suite, identiquement nul. On aurait donc $\rho = 0$.

613. **Fonctions analogues à la fonction de Green.** — Nous nous bornerons dans ce qui va suivre aux problèmes intérieurs ([1]) et nous raisonnerons dans l'espace à trois dimensions avec une seule surface limite; l'extension aux problèmes plans n'offre dans ce cas aucune difficulté. Le problème de Dirichlet et le problème de la chaleur admettent une solution unique sans aucune condition, tandis que le problème de Neumann n'admet une solution que si la valeur donnée pour $\frac{dU}{dn_i}$ sur la surface Σ satisfait à la condition connue. On a déjà indiqué sommairement (nos 524 et 534) comment la résolution de ces différents problèmes se ramenait à la détermination d'une fonction harmonique particulière, satisfaisant sur Σ à certaines conditions aux limites. Ces fonctions, qui jouent le même rôle que la fonction de Green pour le problème de Dirichlet, s'obtiennent par la résolution d'équations intégrales particulières. Soit d'une façon générale $U(M)$ une fonction régulière dans le domaine D limité par une surface fermée Σ, satisfaisant dans ce domaine à l'équation

$$\Delta U = F(x, y, z). \tag{54}$$

et ayant une valeur finie ainsi que sa dérivée normale, le long de Σ. Soit, d'autre part, $G(M; P)$ une fonction des coordonnées

---

([1]) Pour les problèmes extérieurs, *voir* HEYVOOD et FRÉCHET, Chap. III.

du point P, harmonique dans D, sauf au point M où elle devient infinie comme $\frac{1}{r}$. Nous supposons, en outre, que cette fonction et sa dérivée normale $\frac{dG}{dn_i}$ ont des valeurs finies sur Σ. Ces conditions étant supposées remplies, nous avons démontré (n° 534) que la valeur de U au point M a pour expression

$$(55)\quad U(M) = \frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)}\left[U\frac{dG}{dn} - G\frac{dU}{dn}\right]d\sigma_P - \frac{1}{4\pi}\int_{(D)} GF(x, y, z)\,dv.$$

Nous supposerons tout d'abord $F(x, y, z) = 0$. On a la fonction de Green proprement dite en choisissant $G(M, P)$ de façon que G soit nulle en tout point P de Σ, et on l'obtient évidemment en ajoutant à $\frac{1}{r} = \frac{1}{MP}$ la fonction harmonique dans D qui prend les mêmes valeurs que $-\frac{1}{r}$ sur Σ.

Pour le problème de la chaleur, on obtiendra la fonction $G(M, P)$ en ajoutant à $\frac{1}{r}$ une fonction harmonique G_1 dans D satisfaisant en tout point P de Σ à la condition

$$\frac{dG_1}{dn} - h(P)G_1(M, P) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} - h(P)\frac{1}{r} = 0,$$

problème qui admet, on vient de le voir, une solution unique. Si la fonction harmonique cherchée U satisfait à la condition

$$\frac{dU}{dn} - h(P)\,U(P) = f(P)$$

en tout point de Σ, on voit facilement que la relation (55) devient, en choisissant $G(M, P)$ comme on vient de le dire,

$$(56)\qquad U(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} G(M, P)f(P)\,d\sigma_P.$$

Cette fonction $G(M, P)$ *est aussi une fonction symétrique des coordonnées des deux points* M *et* P. Soit en effet D′ le domaine limité par Σ et par deux sphères de rayons très petits, ρ, ρ' ayant pour centres deux points quelconques M, M′ intérieurs à D. Les deux fonctions $G(M, P)$, $G(M', P)$ sont des fonctions harmoniques des coordonnées du point P dans ce domaine. On peut

donc leur appliquer la formule générale (11) du nº 528. Or,

$$G(M, P)\frac{dG(M', P)}{dn} - G(M', P)\frac{dG(M, P)}{dn}$$

est nul en tout point de Σ; lorsque les rayons ρ, ρ' tendent vers zéro, il vient donc à la limite $G(M, M') = G(M', M)$ (nº 523).

Pour le problème intérieur de Neumann, on doit procéder un peu autrement. Soient M un point quelconque intérieur à D, r la distance MP; on sait que $\int_{(\Sigma)} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\sigma = 4\pi$ (nº 527). Soit, d'autre part, $\psi(P)$ une fonction continue quelconque sur Σ, telle que

$$\int_{(\Sigma)} \psi(P)\, d\sigma_P = 4\pi.$$

Déterminons une fonction harmonique dans D et dont la dérivée normale prend en chaque point de Σ la valeur $\psi(P) - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}$, ce qui est possible, puisque la condition (50) est vérifiée. En ajoutant $\frac{1}{r}$ à cette fonction harmonique, on obtient une fonction $G(M, P)$ satisfaisant aux conditions suivantes : 1º elle est harmonique dans D, sauf au point M où elle est infinie comme $\frac{1}{r}$; 2º en chaque point de Σ, on a $\frac{dG}{dn_i} = \psi(P)$. Cette fonction $G(M, P)$ n'est pas complètement déterminée, puisqu'elle dépend d'une fonction continue $\psi(P)$, uniquement assujettie à vérifier la relation

$$\int_{(\Sigma)} \psi(P)\, d\sigma_P = 4\pi.$$

De plus, on peut lui ajouter une constante quelconque indépendante de P, mais qui peut être une fonction arbitraire de M. Quand on change $\psi(P)$, la fonction $G(M, P)$ est augmentée d'une fonction harmonique des coordonnées du point P.

Chacune de ces fonctions peut jouer le rôle de la fonction de Green dans la résolution du problème de Neumann. Soit, en effet, U une fonction harmonique dans D dont la dérivée normale $\frac{dU}{dn}$ est égale à $f(P)$ en tout point P de Σ; la fonction $G(M, P)$ étant

déterminée comme il vient d'être dit, la formule générale (55) donne

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} G(M, P) f(P)\, d\sigma_P + \frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} \psi(P)\, U(P)\, d\sigma_P.$$

Il y a dans le second membre un terme inconnu qui dépend de U sur la surface Σ, mais ce terme est indépendant de M, et l'on sait que U(M) n'est déterminée qu'à une constante près. La solution générale du problème de Neumann est donc

$$(57) \qquad U(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} G(M, P) f(P)\, d\sigma_P + C,$$

C étant une constante arbitraire [1]. Remarquons que, quand on fait varier $\psi(P)$, U(M) est aussi augmentée d'une constante.

On obtient la *fonction de Franz Neumann* en prenant pour $\psi(P)$ la valeur constante $\frac{4\pi}{S}$, S étant la surface de la frontière Σ. Cette fonction G(M, P) n'étant déterminée qu'à une constante près, relativement au point P, on peut lui ajouter une constante C(M), ne dépendant que des coordonnées du point M, choisie de telle façon qu'on ait aussi

$$\int_{(\Sigma)} G(M, P)\, d\sigma_P = 0.$$

La fonction ainsi obtenue est symétrique en M et P; il suffit, en effet, d'appliquer le raisonnement qui a été fait dans le cas du problème de la chaleur aux deux fonctions de F. Neumann, G(M, P), G(M', P), relatives à deux points quelconques de D, en observant que, d'après la façon dont on les a déterminées, on a encore

$$\int_{(\Sigma)} G(M, P)\frac{dG(M', P)}{dn}\, d\sigma_P - \int_{(\Sigma)} G(M', P)\frac{dG(M, P)}{dn}\, d\sigma_P = 0,$$

et par suite, G(M, M') = G(M', M). En ajoutant à la fonction G(M, P)

---

[1] Si, dans le problème de Dirichlet, on prenait de même pour G(M, P) une fonction harmonique dans D, sauf au point M où elle est infinie comme $\frac{1}{r}$, et prenant sur Σ une suite continue de valeurs quelconque, *indépendante de* M, la formule (37) du n° 534 donnerait pour U(M) une valeur qui ne différerait que par une constante de la fonction cherchée.

une somme $U(M)+U(P)$, U étant une fonction harmonique dans D, on obtient une infinité de fonctions symétriques en M et P. qui peuvent remplacer la fonction de Franz Neumann. M. Klein s'est servi pour le même objet d'une fonction ayant deux infinis dans D ([1]).

Remarque. — Pour le problème de Neumann et le problème de la chaleur, la fonction harmonique cherchée U et la fonction auxiliaire $G(M, P)$ sont représentées par des potentiels de simple couche; les dérivées normales $\frac{dU}{dn}$, $\frac{dG}{dn}$ ont donc des valeurs finies sur la frontière Σ, et la formule générale de Green est applicable au domaine D. Mais il n'en est plus de même pour le problème de Dirichlet, où U et G sont des potentiels de double couche. Or, le raisonnement qui précède suppose essentiellement l'existence des dérivées normales sur Σ. On arrive encore à la formule (37) du n° 534 par une méthode où cette hypothèse n'est pas nécessaire. Il résulte, en effet, de la méthode même de Fredholm, que la solution du problème de Dirichlet est donnée par une expression de la forme

$$U(M) = \frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} U(P)\,R(M, P)\,d\sigma_P, \tag{58}$$

$U(P)$ étant la valeur donnée de la fonction harmonique cherchée en un point P de Σ et $R(M, P)$ une fonction indépendante de $U(P)$ et qui joue le rôle de résolvante. Si, en particulier, on suppose $U(P)=1$ sur Σ, on a aussi $U(M)=1$ et, par suite, la fonction $R(M, P)$ satisfait à la condition

$$\int_{(\Sigma)} R(M, P)\,d\sigma_P = 4\pi.$$

On peut donc former une fonction $g(M, P)$ harmonique dans D, et telle qu'on ait, en tout point de Σ,

$$\frac{dg(M, P)}{dn} = R(M, P) - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn},$$

r étant la distance du point variable P au point M intérieur à D, et la formule (58) peut encore s'écrire

$$U(M) = \frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} U(P)\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} + \frac{dg(M, P)}{dn}\right]d\sigma_P. \tag{59}$$

([1]) *Ueber die partielle Differentialgleichungen* $\Delta u + K^2 u = 0$ *und deren Auftreten in der mathematischen Physik*, Leipzig, 1891. Pour l'étude du problème de Neumann dans le cas de la sphère, *voir* J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes*, Chap. I.

Cette formule s'applique, en particulier, à toute fonction harmonique U pour laquelle $\frac{dU}{dn}$ a une valeur finie sur Σ. En transformant la formule précédente au moyen des relations générales (11) et (14) du n° 528, on en déduit que la condition

$$\int_{(\Sigma)} \frac{dU}{dn} \left\{ \frac{1}{r} + g(M, P) \right\} d\sigma_P = 0$$

doit être une conséquence de la relation $\int_{(\Sigma)} \frac{dU}{dn} d\sigma_P = 0$, ce qui exige que $\frac{1}{r} + g(M, P)$ se réduise sur Σ à une constante [1], qu'on peut supposer nulle puisque $g(M, P)$ n'est déterminée qu'à une constante près. La fonction $\frac{1}{r} + g(M, P)$ satisfait donc aux conditions qui déterminent la fonction de Green. On voit par là que cette fonction se rattache très naturellement à la méthode même de Fredholm.

614. Problèmes relatifs à l'équation $\Delta U = F(x, y, z)$. — Considérons maintenant le cas où le second membre $F(x, y, z)$ de l'équation (54) n'est pas nul. Nous supposerons que cette fonction est continue et admet des dérivées du premier ordre continues dans le domaine D; on a vu plus haut (n°s 535 et 536) comment la théorie du potentiel permet d'obtenir une intégrale $U_1(x, y, z)$, qui est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans tout l'espace. En posant $U = U_1 + V$, la nouvelle inconnue $V(x, y, z)$ est une fonction harmonique dans D, qui satisfait le long de Σ à l'un des trois types de conditions que nous venons d'examiner.

Si l'on se donne, sur Σ, $U(P) = f(P)$, ou $\frac{dU}{dn} - h(P)U(P) = f(P)$, il n'y a aucune condition de possibilité pour le problème. Il admet toujours une solution unique qu'on peut déduire de la formule

---

[1] D'une façon générale, si la condition $\int V f \, d\sigma = 0$ est une conséquence de $\int f \, d\sigma = 0$, il en sera de même de $\int (V - C) f \, d\sigma = 0$, quelle que soit la constante C. Si l'on a choisi C de façon que $\int (V - C) \, d\sigma = 0$, on pourra prendre $f = V - C$ et, par suite, il faudra qu'on ait

$$\int (V - C)^2 \, d\sigma = 0 \quad \text{et} \quad V = C.$$

générale (55) en y remplaçant G(M, P) par la fonction de Green correspondante.

Dans le premier cas, la fonction U(M) est donnée par la formule

$$(60)\quad U(M) = \frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} f(P)\frac{dG}{dn}\,d\sigma_P - \frac{1}{4\pi}\int_{(D)} G(M, P)\,F(P)\,dv_P;$$

pour le problème de la chaleur, on a

$$(61)\quad U(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} G(M, P)\,f(P)\,d\sigma_P - \frac{1}{4\pi}\int_{(D)} G(M, P)\,F(P)\,dv_P.$$

Reste le problème de Neumann intérieur. Pour que l'équation (54) admette une intégrale régulière dans le domaine D, satisfaisant à la condition $\frac{dU}{dn} = f(P)$ sur Σ, il faut, d'après la formule générale de Green (n° 528) où l'on prend $\varphi = 1$, $\psi = U$, qu'on ait

$$(62)\quad \int_{(\Sigma)} f(P)\,d\sigma_P + \int_{(D)} F(P)\,dv_P = 0.$$

Cette condition est suffisante, car si l'on pose $U = U_1 + V$, la nouvelle fonction inconnue V doit être harmonique dans D, et satisfaire en chaque point de Σ à la relation $\frac{dV}{dn} = f(P) - \frac{dU_1}{dn}$; le nouveau problème admet une infinité de solutions dépendant d'une constante arbitraire, puisqu'on a, d'après la relation précédente,

$$\int_{(\Sigma)} f(P)\,d\sigma_P - \int_{(\Sigma)} \frac{dU_1}{dn}\,d\sigma_P = 0.$$

Toutes ces solutions peuvent encore se déduire directement de la relation générale (55), et sont comprises dans la formule

$$(63)\quad U(M) = C - \frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} G(M, P)\,f(P)\,d\sigma_P - \frac{1}{4\pi}\int_{(D)} G(M, P)\,F(P)\,dv_P,$$

C étant une constante arbitraire, G(M, P) la fonction de Franz Neumann ou toute autre fonction pouvant jouer le même rôle.

Tous ces problèmes peuvent être traités de la même façon dans le plan, moyennant quelques changements bien faciles dans les formules.

615. **Problèmes relatifs à l'équation $\Delta U = \lambda R U + R_1$.** — La

résolution des mêmes problèmes aux limites pour l'équation

$$\Delta U = \lambda R(x, y, z) U + R_1(x, y, z) \tag{64}$$

conduit à de nouvelles équations intégrales, dont le noyau s'exprime au moyen de la fonction de Green et des fonctions qui jouent le même rôle. Nous nous bornerons encore aux problèmes intérieurs et nous raisonnerons en supposant qu'il s'agit de domaines à trois dimensions; il n'y a aucune difficulté à passer de l'espace au plan. Les domaines dont il s'agit sont supposés limités par des surfaces fermées Σ telles qu'il existe une fonction de Green, ou une fonction $G(M, P)$ jouant le même rôle, pour le problème correspondant, mais il n'est pas indispensable de supposer que Σ admet un plan tangent unique en chaque point. Enfin, on suppose que les fonctions R et R_1 sont continues et admettent des dérivées partielles continues du premier ordre dans les domaines en question.

1° *Problème de Dirichlet.* — Soit à trouver une intégrale de l'équation (64), régulière dans un domaine D intérieur à une surface fermée Σ, et prenant des valeurs données formant une suite continue $f(M)$ sur la frontière Σ. On ramène aisément le cas général au cas où $f(M) = 0$; soit, en effet, $U_1(x, y, z)$ une fonction régulière dans (D) et prenant les valeurs données sur la frontière, par exemple la fonction harmonique. En posant $U = U_1 + V$, la nouvelle fonction inconnue V doit satisfaire à une équation de la même forme et s'annuler en tout point de la frontière Σ.

Toute intégrale de l'équation (64), régulière dans le domaine D, et nulle sur la frontière, doit satisfaire (n° 534) à l'équation intégrale

$$U(M) = -\frac{\lambda}{4\pi}\int_D G(M, P) R(P) U(P)\, dv_P - \frac{1}{4\pi}\int_D G(M, P) R_1(P)\, dv_P, \tag{65}$$

dont le noyau est $-\frac{1}{4\pi} G(M, P) R(P)$, $G(M)$ étant la fonction de Green relative au problème de Dirichlet intérieur. Ce noyau est infini comme $\frac{1}{r}$ lorsque le point P vient coïncider avec le point M, mais on peut en déduire un noyau borné par un nombre

fini d'itérations (n° 563) et la théorie de Fredholm est applicable à cette équation.

Si λ n'est pas une valeur singulière du noyau, l'équation (65) admet bien une solution continue dans le domaine D, s'annulant sur Σ. On ne peut pas en conclure immédiatement que cette fonction U(M) est une intégrale de l'équation (94). En effet, pour pouvoir remonter de l'équation (65) à l'équation (64), il faut être assuré que le second membre $\lambda RU + R_1$ est tel qu'on puisse appliquer la formule de Poisson (n°s 521 et 536). Il suffira donc de montrer que la solution U(M) de l'équation intégrale (65) admet des dérivées continues du premier ordre. Or, la fonction U(P) étant continue, il résulte des propriétés de la fonction de Green que le second membre de la formule (65) est la somme d'un potentiel de volume et d'une intégrale de la forme

$$\int_{(D)} G_1(M, P)\, d\sigma_P,$$

la fonction $G_1(M, P)$ ayant des dérivées continues par rapport aux coordonnées du point M. Ce second membre admet donc lui-même des dérivées continues du premier ordre et la solution U(M) de l'équation (65) est bien une intégrale de l'équation (64).

Lorsque R est positif, le noyau $-\frac{1}{4\pi}G(M, P)R(P)$ est un noyau de Schmidt. Or, il est évident que le noyau symétrique G(M, P) a une infinité de valeurs caractéristiques, car, s'il n'en avait qu'un nombre fini, il serait de la forme $\Sigma_i \varphi_i(M)\varphi_i(P)$, les fonctions φ_i étant continues (n° 587). Le noyau $-\frac{1}{4\pi}G(M, P)R(P)$ possède donc lui-même une infinité de valeurs caractéristiques. *Toutes ces valeurs caractéristiques sont négatives.* En effet, à une valeur caractéristique λ_i correspond une fonction fondamentale $U_i(x, y, z)$ qui est une intégrale de l'équation $\Delta U = \lambda_i RU$, régulière dans le domaine D et nulle sur Σ. Or, il ne peut exister d'intégrale différente de zéro satisfaisant à ces deux conditions, lorque le produit $\lambda_i R$ est positif (*voir* n° 520) [1].

---

[1] Lorsque $R(x, y, z)$ n'a pas un signe constant dans D, le noyau G(M, P)R(P) est un noyau polaire, qui a aussi une infinité de valeurs caractéristiques (n° 595); *voir* la Thèse déjà citée de M. Sanielevici.

2° *Problème de la chaleur.* — Soit à trouver une intégrale de l'équation (64), régulière dans le domaine D, et telle qu'on ait

$$\frac{dU}{dn} - h(M)U = f(M).$$

en chaque point de Σ, h et f étant des fonctions données sur Σ. On peut encore ramener le cas général au cas particulier où $f(M) = 0$, en posant $U = U_1 + V$, U_1 étant une fonction quelconque régulière dans D et satisfaisant à cette condition aux limites. La détermination de la fonction U se ramène encore à la résolution de l'équation intégrale (65) où G(M, P) désigne maintenant la fonction symétrique de M et de P qui joue le rôle de la fonction de Green pour ce nouveau problème. On démontre comme tout à l'heure que toute solution de l'équation (65) satisfait bien à l'équation (64) et à la condition aux limites.

A toute valeur caractéristique λ_i du noyau $-\frac{1}{4\pi}G(M, P)R(P)$ correspond une solution U_i de l'équation intégrale homogène

$$(66) \qquad U(M) = -\frac{\lambda_i}{4\pi}\int_{(D)} G(M, P)R(P)U(P)\,dv_P,$$

c'est-à-dire une intégrale, différente de zéro, de l'équation

$$\Delta U_i = \lambda_i R U_i,$$

régulière dans D, et satisfaisant à la condition

$$\frac{dU_i}{dn} - hU_i = 0$$

en tout point de Σ. Si R est positif, on a encore un noyau de Schmidt, et par suite une infinité de valeurs caractéristiques. *Toutes les valeurs λ_i sont négatives si h est positif.* Si nous posons, en effet, $\psi = U_i^2$, $\varphi = 1$ dans la formule générale de Green (10) (n° 528), elle devient, en tenant compte des conditions auxquelles satisfait la fonction U_i,

$$\int_{(D)}\left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right]dv + \int_{(D)}\lambda_i R U_i^2\,dv + \int_{(\Sigma)} h U_i^2\,d\sigma = 0.$$

Une telle identité est manifestement impossible, si λ_i, R et h sont positifs, à moins que U_i ne soit nul.

Problème de Neumann. — Proposons-nous d'abord de trouver une intégrale de l'équation (64), régulière dans le domaine D, et dont la dérivée normale $\frac{dU}{dn}$ soit nulle en tout point de la frontière Σ. Cette intégrale doit, d'une part, satisfaire à la condition de possibilité (n° 614)

$$(67) \qquad \int_{(D)} [\lambda R(P) U(P) + R_1(P)]\, dv_P = 0;$$

d'autre part, elle satisfait aussi à l'équation intégrale

$$(68) \quad U(M) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int_{(D)} G(M, P)[\lambda R(P) U(P) + R_1(P)]\, dv_P + C,$$

C étant une constante et G(M, P) une fonction jouant le rôle de fonction de Green pour le problème intérieur de Neumann. Comme on peut lui ajouter une fonction arbitraire de P, nous supposerons qu'on a choisi cette fonction G(M, P) de façon qu'on ait

$$(69) \qquad \int_{(D)} G(M, P) R(M)\, dv_M = 0;$$

on peut toujours faire cette hypothèse si l'intégrale $\int_{(D)} R(M)\, dv_M$ n'est pas nulle, ce qui a lieu en particulier lorsque R est positif.

La fonction G(M, P) étant ainsi choisie, le système formé par les équations (67) et (68) est analogue au système formé par les équations (34) et (35) du n° 607. En remplaçant U(M) par sa valeur tirée de l'équation (68) dans la condition (67), où l'on remplace P par M, et tenant compte de la relation (69), on obtient la valeur de la constante C, et il reste pour déterminer U l'équation intégrale

$$(70) \qquad U(M) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int_{(D)} G(M, P)[\lambda R(P) U(P) + R_1(P)]\, dv_P - \frac{\int_{(D)} R_1(P)\, dv_P}{\lambda \int_{(D)} R(P)\, dv_P}.$$

Pour avoir une intégrale de l'équation (64) satisfaisant à la condition $\frac{dU}{dn} = f(M)$ sur la frontière, on commence par déterminer

une fonction U_1 régulière dans D et satisfaisant à cette condition, puis on pose $U = U_1 + V$, ce qui ramène au problème précédent. Mais on ne peut pas prendre pour U_1 une fonction harmonique dans D, si f est quelconque. Pour obtenir une solution, on peut procéder comme il suit; considérons le potentiel de volume

$$u_1(M) = \frac{H}{4\pi\Omega}\int_{(D)} \frac{dv_P}{r},$$

r étant la distance des deux points M et P, Ω le volume de D, et H désignant l'intégrale $\int_{(\Sigma)} f(M)\, d\sigma_M$. Cette fonction est régulière dans D et l'on a, d'après la formule de Gauss (n° 537),

$$\int_{(\Sigma)} \frac{du_1}{dn_i}\, d\sigma = H.$$

Il s'ensuit qu'on peut trouver uue autre fonction u_2 harmonique dans D et satisfaisant, en chaque point de la frontière, à la condition

$$\frac{du_2}{dn} = f(M) - \frac{du_1}{dn}.$$

Il est clair que la somme $U_1 = u_1 + u_2$ est une fonction régulière dans D, qui satisfait à la condition voulue

616. **Vibration des membranes élastiques.** — Les fonctions fondamentales des équations intégrales considérées au paragraphe précédent interviennent dans la solution d'un grand nombre de problèmes de Physique mathématique, qui conduisent à des équations du type hyperbolique ou du type parabolique. Nous n'en traiterons que deux, à titre d'exemples. L'étude des vibrations d'une membrane élastique plane conduit à déterminer une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(71) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = K(x, y)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

régulière, quel que soit t, à l'intérieur d'un domaine D limité par une courbe fermée C, s'annulant sur ce contour et se réduisant, pour $t = 0$, à une fonction continue donnée $\alpha(x, y)$ dans le domaine D, nulle elle-même sur C, tandis que $\frac{\partial U}{\partial t}$ se réduit à une autre fonction $\beta(x, y)$ nulle sur C. En cherchant des solutions particulières périodiques de la forme

$$V(x, y)\cos\lambda t \quad \text{ou} \quad V(x, y)\sin\lambda t,$$

on est conduit à chercher des solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\lambda^2 R(x, y) V, \tag{72}$$

régulières dans le domaine D, et s'annulant sur le contour. Cette équation a été étudiée au numéro précédent dans le cas d'un domaine à trois dimensions, mais les raisonnements et les conclusions s'étendent sans difficulté au problème actuel. En remplaçant λ^2 par $-\mu$, on a vu que l'équation intégrale dont dépend le problème admet une infinité de valeurs caractéristiques négatives, lorsque le coefficient R est positif, ce qui est le cas ici, d'après la signification physique de ce coefficient. Il existe donc une infinité de nombres λ_i (qu'on peut supposer positifs) à chacun desquels correspondent deux intégrales particulières de l'équation (71) de la forme

$$\varphi_i(x, y) \cos(\lambda_i t), \quad \varphi_i(x, y) \sin(\lambda_i t),$$

les fonctions φ_i s'annulant sur le contour C et étant régulières à l'intérieur. Si les deux fonctions $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ sont développables en séries absolument et uniformément convergentes de fonctions $\varphi_i(x, y)$

$$\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \varphi_i(x, y), \qquad \beta(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i \varphi_i(x, y); \tag{73}$$

la fonction $U(x, y, t)$ représentée par le développement

$$U = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \varphi_i(x, y) \cos(\lambda_i t) + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \varphi_i(x, y) \sin(\lambda_i t) \tag{74}$$

donne la solution du problème proposé [1] (*cf.* n° 493).

617. **Problème du refroidissement.** — Le problème du refroidissement d'un corps solide avec rayonnement conduit au problème d'Analyse suivant : Déterminer une intégrale de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = R(x, y, z) \frac{\partial U}{\partial t}, \tag{75}$$

---

[1] L'existence de la première valeur singulière, qui correspond au son fondamental, avait été établie rigoureusement par Schwarz (*Œuvres*, t. I, p. 241). M. Picard avait démontré ensuite l'existence de la seconde valeur singulière (*Comptes rendus*, 1893). Enfin, H. Poincaré a établi l'existence d'une infinité de valeurs singulières (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. VIII, 1894). Ces valeurs singulières correspondent aux différentes harmoniques en nombre infini. On voit combien la démonstration devient simple, avec la théorie de Fredholm (*voir* aussi Picard, *Rendiconti*, t. XXII, 1906).

régulière pour toute valeur positive de t, dans un domaine D limité par une surface fermée Σ, se réduisant pour $t = 0$ à une fonction donnée $\alpha(x, y, z)$ continue dans D, et satisfaisant, en outre, à la condition aux limites

$$\frac{dU}{dn} = hU = 0$$

en chaque point de Σ, R et h étant des fonctions essentiellement *positives* d'après leur signification physique. En cherchant des solutions de la forme $U = e^{-\lambda t}V(x, y, z)$, on voit que V doit être une intégrale de l'équation

$$(76) \qquad \Delta V + \lambda R(x, y, z)V = 0,$$

régulière dans le domaine D, et satisfaisant à la condition aux limites

$$\frac{dV}{dn} + hV = 0$$

sur la frontière Σ. On a vu plus haut (n° 615) qu'il existe une infinité de valeurs de λ, *toutes positives*, pour lesquelles ce problème admet une solution. On obtient ainsi une infinité de solutions simple de la forme

$$e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x, y, z),$$

satisfaisant à la condition aux limites. Si la fonction $\alpha(x, y, z)$ peut être développée en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales $\Sigma\alpha_i\varphi_i(x, y, z)$, la série $\Sigma a_i e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x, y, z)$ donne la solution du problème. Nous allons indiquer comment on peut déterminer ces fonctions fondamentales dans le cas de la sphère et du cylindre de révolution homogènes.

1° *Sphères.* — Dans le cas d'une sphère homogène dont nous prendrons le rayon pour unité, nous pouvons supposer $R(x, y, z) = 1$ dans les équations (75) et (76), h étant une constante positive. Cherchons une intégrale de l'équation $\Delta V + \lambda V = 0$ qui soit de la forme $V = Y_n(\theta, \varphi)f(\rho)$, $Y_n(\theta, \varphi)$ étant une fonction de Laplace (n° 531). En observant que $\rho^n Y_n(\theta, \varphi)$ est une fonction harmonique, et en tenant compte de l'expression de ΔV en coordonnées polaires (I, p. 159), on trouve que $f(\rho)$ doit être une intégrale de l'équation linéaire

$$(77) \qquad \rho^2 f''(\rho) + 2\rho f'(\rho) = [n(n+1) - \lambda\rho^2]f(\rho);$$

de plus, cette intégrale doit rester finie pour $\rho = 0$, et satisfaire à la condition aux limites $f'(1) + hf(1) = 0$, car la dérivée $\frac{dV}{dn}$ était prise suivant la normale intérieure. Cette équation (77) se ramène à l'équation de Bessel

(II, n° 414)

$$t\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{2n+3}{2}\frac{dz}{dt}-z=0, \tag{78}$$

en posant $f(\rho)=\rho^n z$, $t=-\frac{\lambda}{4}\rho^2$. L'intégrale de l'équation (77) qui reste finie pour $\rho=0$ est donc égale, à un facteur constant près, à

$$\rho^n \mathrm{J}\left(\frac{2n+3}{2}, \frac{-\lambda\rho^2}{4}\right).$$

Quant à la condition aux limites, elle prend la forme

$$x\mathrm{J}'\left(\frac{2n+3}{2}, x\right)+\mathrm{HJ}\left(\frac{2n+3}{2}, x\right)=0,$$

en posant $x=-\frac{\lambda}{4}$, H étant un facteur constant facile à calculer. Or, nous avons vu plus haut (p. 490) que l'équation $\mathrm{J}\left(\frac{2n+3}{2}, x\right)=0$ a une infinité de racines négatives; entre deux racines consécutives de cette équation, il y a au moins une racine de l'équation

$$x\mathrm{J}'\left(\frac{2n+3}{2}, x\right)+\mathrm{HJ}\left(\frac{2n+3}{2}, x\right)=0,$$

car le rapport $\frac{x\mathrm{J}'}{\mathrm{J}}$ varie de $-\infty$ à $+\infty$ dans cet intervalle. En définitive, pour toute valeur du nombre entier n, il existe une infinité de valeurs positives de λ, telles que l'équation $\Delta\mathrm{V}+\lambda\mathrm{V}=0$ admet une intégrale régulière de la forme $\mathrm{V}=\mathrm{Y}_n(\theta, \varphi)f(\rho)$ satisfaisant à la condition aux limites. En faisant varier n de 0 à $+\infty$, on obtient toutes les fonctions fondamentales [1].

En particulier, pour $n=0$, l'intégrale de l'équation (77) qui reste finie pour $\rho=0$ a pour expressions $\frac{\sin(\sqrt{\lambda}\,\rho)}{\rho}$, et l'on retrouve un résultat déjà obtenu (n° 488), en modifiant un peu les notations. Pour n égal à un nombre entier quelconque, on a vu (II, n° 414) que l'intégrale générale de l'équation de Bessel (78) s'exprimait au moyen de la seule transcendante e^x.

2° *Cylindre de révolution.* — Considérons encore un cylindre de révolution homogène dont nous supposerons, pour simplifier, le rayon égal à

---

[1] Il suffit évidemment de démontrer que toute fonction de ρ, θ, φ peut être développée en série suivant ces fonctions fondamentales, sous des conditions très générales. (*Voir*, par exemple, Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, Chap. XVII.)

l'unité la hauteur étant égale à $2l$. Le centre étant pris pour origine, et l'axe du cylindre pour axe des z, nous emploierons le système de coordonnées semi-polaires (r, ω, z) et nous chercherons des intégrales de l'équation $\Delta V + \lambda V = 0$, de la forme ZW, satisfaisant à la condition aux limites, Z ne dépendant que de z et W ne dépendant que de r et de ω. L'équation $\Delta V + \lambda V = 0$ devient alors $W\Delta Z + Z\Delta W + \lambda ZW = 0$, ce qu'on peut écrire

$$\frac{\Delta Z}{Z} + \frac{\Delta W}{W} + \lambda = 0. \tag{79}$$

Le rapport $\frac{\Delta Z}{Z}$ ne dépendant que de z et le rapport $\frac{\Delta W}{W}$ ne dépendant que de r et ω, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\Delta Z + kZ = 0, \qquad \Delta W + k_1 W = 0, \tag{80}$$

k et k_1 étant des constantes telles que $k + k_1 = \lambda$. La condition aux limites, relative aux deux bases du cylindre, donne, pour la fonction Z,

$$\frac{dZ}{dz} + hZ = 0 \quad \text{pour } z = l, \qquad \frac{dZ}{dz} - hZ = 0 \quad \text{pour } z = -l; \tag{81}$$

l'identité suivante, conséquence de la première équation (80),

$$\left(Z\frac{dZ}{dz}\right)_{-l}^{l} = \int_{-l}^{+l}\left[\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2 - kZ^2\right]dz$$

montre ensuite que k est nécessairement positif et la fonction Z est de la forme

$$Z = A\cos(z\sqrt{k}) + B\sin(z\sqrt{k}).$$

En écrivant que cette fonction satisfait aux deux conditions (81), on voit que l'un des coefficcients A ou B doit être nul, ce qui fournit les deux types de solutions $Z = \sin\mu z$, $Z = \cos\mu z$, μ étant racine de l'équation $\mu + h\tang\mu l = 0$ pour la première forme, et de l'équation $\mu = h\cot\mu l$ pour la seconde. Chacune de ces équations admet une infinité de racines (488) et à chacune d'elles correspond une valeur positive de k.

Il reste à trouver une solution W de la seconde des équations (80), régulière à l'intérieur du cercle C de rayon un ayant pour centre l'origine et satisfaisant à la condition $\frac{dW}{dr} + hW = 0$ pour $r = 1$. Cherchons des solutions de la forme $W - r^n\cos n\omega f(r)$ ou de la forme $r^n\sin n\omega f(r)$, n étant un nombre entier positif. En observant que $r^n\cos n\omega$ et $r^n\sin n\omega$ sont des solutions de l'équation de Laplace, on trouve (I, n° 63) que $f(r)$ doit satisfaire à l'équation

$$rf''(r) + (2n+1)f'(r) + k_1 rf(r) = 0 \tag{82}$$

qui devient, en posant $t = -\frac{k_1 r^2}{4}$,

$$t\frac{d^2 f}{dt^2} + (n+1)\frac{df}{dt} - f = 0. \tag{83}$$

On retrouve encore une équation de Bessel, mais le paramètre γ, au lieu d'être la moitié d'un nombre entier impair comme dans le cas de la sphère, est égal à un nombre entier. La fonction W devant rester finie pour $r = 0$, on doit prendre pour f la fonction $J\left(n+1, -\frac{k_1 r^2}{4}\right)$ et l'on démontre comme dans le cas de la sphère que la condition aux limites est vérifiée pour une infinité de valeurs positives de k_1. En définitive, il existe une infinité de fonctions fondamentales de l'une des formes

$$\cos(\mu' z) r^n \sin n\omega \, J\left(n+1, -\frac{k_1}{4} r^2\right),$$
$$\sin(\mu z) r^n \cos n\omega \, J\left(n+1, -\frac{k_1}{4} r^2\right),$$

μ, μ', k_1 étant racines d'équations transcendantes, indépendantes l'une de l'autre, qui admettent une infinité de solutions. On a démontré, comme pour la sphère, qu'on les obtient toutes de cette façon.

618. Équation générale du type elliptique. — Considérons une équation linéaire à deux variables indépendantes du type elliptique, ramenée à la forme canonique (n° 479). Nous l'écrirons, en introduisant un paramètre λ,

$$\Delta u = \lambda\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu\right) + f, \tag{84}$$

et nous supposerons que a, b, c, f sont des fonctions continues de x, y, admettant des dérivées partielles continues, dans un domaine D, limité par un contour fermé C. Le problème généralisé de Dirichlet pour ce type d'équations se ramène à la recherche d'une intégrale d'une équation de cette forme, continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres dans le domaine D et s'annulant sur le contour C. M. Hilbert et M. E. Picard ont rattaché ce problème à l'équation fonctionnelle de Fredholm par deux méthodes différentes. Nous indiquerons succinctement le principe de la méthode de M. Picard. Si l'équation (84) admet une intégrale $u(x, y)$, vérifiant les conditions énoncées, cette

intégrale satisfait aussi à l'équation intégro-différentielle (n° 521)

$$(85)\quad u(x, y) = -\frac{\lambda}{2\pi}\int\int_{(D)}\left[a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)u\right] \times G(x, y; \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + \psi(x, y),$$

où l'on a posé

$$\psi(x, y) = -\frac{2\pi}{\lambda}\int\int_{(D)} f(\xi, \eta)\,G(x, y; \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$G(x, y; \xi, \eta)$ étant la fonction de Green proprement dite relative au contour C. Inversement, toute solution $u(x, y)$ de l'équation (85) sera aussi une intégrale de l'équation (84) pourvu qu'on ait le droit d'appliquer au second membre de cette équation la formule de Poisson, ce qui aura lieu si la fonction $u(x, y)$ admet des dérivées continues du second ordre. L'équation (85) peut à son tour être remplacée par une équation de Fredholm

$$(86)\quad u(x,y) = \psi(x,y) - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int_{(D)}\left[c(\xi,\eta)G - \frac{\partial(aG)}{\partial\xi} - \frac{\partial(bG)}{\partial\eta}\right]u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

au moyen de deux intégrations par parties (I, n° 123), et en observant que $u(\xi, \eta)$ est nulle sur le contour C. Le noyau de cette équation de Fredholm est infini comme $\frac{1}{r}$ pour $\xi = x$, $\eta = y$. On peut donc en déduire un noyau borné par un nombre fini d'itérations (n° 563) et, par suite, les résultats généraux du Chapitre XXXI sont applicables à l'équation (86).

Pour qu'on puisse remonter de l'équation intégrale (86) à l'équation aux dérivées partielles (84), il est nécessaire que la solution $u(x, y)$ soit telle qu'on ait le droit de lui appliquer les transformations par lesquelles on a passé de l'équation (84) aux équations (85) et (86). Il suffit pour cela de prouver que cette fonction $u(x, y)$ a des dérivées continues du premier et du second ordre. Nous renverrons pour la démonstration au Mémoire de M. Picard (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 22, 1906).

On s'explique ainsi pourquoi, quand on développe la solution du problème de Dirichlet généralisé suivant les puissances de λ (n° 522), on n'obtient pas, en général, une série convergente,

comme dans le cas du problème de Cauchy, pour une équation du type hyperbolique. La série obtenue n'est convergente que si $|\lambda|$ est inférieur au module de la valeur singulière du noyau dont le module est plus petit. Nous voyons de plus que le problème de Dirichlet généralisé admet, en général, une solution et une seule; *il ne peut y avoir exception que si λ est une des valeurs singulières du noyau de l'équation* (86).

COMPLÉMENTS ET EXERCICES.

1. *Développement d'un noyau particulier.* — Soit $y(x)$ une fonction admettant une dérivée seconde continue $f(x)$ dans un intervalle $(0, \omega > 0)$ et satisfaisant aux deux conditions $\int_0^\omega y\,dx = 0$, $y(\omega) = y(0)$. En déterminant les deux constantes C_1 et C_2 qui figurent dans l'expression de l'intégrale générale de l'équation $y'' = f(x)$ (p. 494) de façon à satisfaire à ces deux conditions, on trouve que $y(x)$ a pour expression

$$y(x) = \int_0^\omega K(x,t) f(t)\,dt,$$

le noyau $K(x, t)$ étant égal à $\dfrac{t(x-\omega)}{\omega} + \dfrac{t(\omega - t)}{2\omega}$ pour $x > t$, et à $\dfrac{(xt-\omega)}{\omega} + \dfrac{t(\omega - t)}{2\omega}$ pour $t > x$. Les fonctions fondamentales de ce noyau, c'est-à-dire les solutions de l'équation intégrale

$$\text{(E)} \qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^\omega K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

sont les intégrales de l'équation linéaire $\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$ qui satisfont aux deux conditions $\varphi(\omega) = \varphi(0)$, $\int_0^\omega \varphi(x)\,dx = 0$. Ces intégrales sont nécessairement périodiques, car la dernière condition entraîne l'égalité $\varphi'(\omega) = \varphi'(0)$. Les valeurs singulières sont donc les nombres $-\dfrac{4\pi^2 n^2}{\omega^2}$, n étant un nombre entier positif et à chaque valeur singulière correspondent deux fonctions fondamentales distinctes $\cos\dfrac{2n\pi x}{\omega}$ et $\sin\dfrac{2n\pi x}{\omega}$.

On peut remplacer l'équation (E) par une équation à noyau symétrique

$$(\mathrm{E})' \qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^\omega \left[\mathrm{K}(x, t) + \frac{x(\omega + x)}{2\omega} \right] \varphi(t)\, dt$$

En effet, le noyau $\mathrm{K}(x, t)$ vérifie la condition

$$\int_0^\omega \mathrm{K}(x, t)\, dx = 0;$$

on a donc aussi $\int_0^\omega \varphi(x) dx = 0$, et par suite $\varphi(x)$ vérifie l'équation (E)' Inversement, toute solution de l'équation intégrale (E)' satisfait à la condition

$$\int_0^\omega \varphi(x)\, dx = \lambda \int_0^\omega \int_0^\omega \mathrm{K}(x, t)\, \varphi(t)\, dx\, dt$$
$$- \lambda \int_0^\omega \frac{x(x - \omega)}{2\omega} dx \times \int_0^\omega \varphi(t)\, dt$$

ou

$$\int_0^\omega \varphi(t)\, dt \left[1 + \lambda \int_0^\omega \frac{x(x - \omega)}{2\omega} dx \right] = 0.$$

On aura donc aussi $\int_0^\omega \varphi(t) dt = 0$, et, par suite, $\varphi(x)$ sera aussi une solution de l'équation (E), à moins que λ ne soit égal à $\frac{12}{\omega^2}$. Pour cette valeur de λ, une solution de l'équation (E)' doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\varphi''(x) = \frac{12}{\omega^2} \varphi(x) - \frac{12}{\omega^3} \int_0^\omega \varphi(t)\, dt$$

et à la condition $\varphi(\omega) = \varphi(0)$. On voit aisément qu'il n'y a qu'une fonction distincte $\varphi = 1$, satisfaisant à ces conditions.

En résumé, le noyau $\mathrm{K}_1(x, y) = \mathrm{K}(x, y) - \frac{x(x - \omega)}{2\omega}$ admet les mêmes valeurs singulières, avec les mêmes fonctions fondamentales, que le noyau $\mathrm{K}(x, y)$ et admet de plus la valeur singulière $\frac{12}{\omega^2}$, à laquelle correspond la fonction fondamentale $\varphi = 1$. Or, ce noyau $\mathrm{K}_1(x, y)$ est symétrique, car on peut l'écrire

$$\mathrm{K}_1(x, y) = \frac{(x - y)(\omega - x + y)}{2\omega} \qquad \text{pour} \quad y < x,$$
$$\mathrm{K}_1(x, y) = \frac{(y - x)(\omega - y + x)}{2\omega} \qquad \text{pour} \quad y > x.$$

Ce noyau $\mathrm{K}_1(x, y)$ étant symétrique et ayant toutes ses valeurs singulières

négatives à l'exception de la première peut être représenté par une série uniformément convergente formée par les noyaux principaux (592). On obtient ainsi le développement

$$K_1(x,y) = \frac{\omega^2}{12} - \frac{\omega}{2\pi^2}\sum_1^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left\{ \cos\left(\frac{2n\pi x}{\omega}\right)\cos\left(\frac{2n\pi y}{\omega}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi x}{\omega}\right)\sin\left(\frac{2n\pi y}{\omega}\right)\right\}$$

qui s'applique à toutes les valeurs de x et de y comprises entre o et ω et qu'il est facile de vérifier directement au moyen de la série de Fourier (I, nos 201-204). En particulier, si l'on suppose $y = 0$, on a pour x compris entre o et ω le développement

$$\frac{x(\omega - x)}{2\omega} = \frac{\omega^2}{12} - \frac{\omega}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{2n\pi x}{\omega}\right).$$

Application. — Soit $F(x)$ une fonction admettant une dérivée seconde continue dans l'intervalle $(0, \omega)$ et satisfaisant à la condition $F(\omega) = (0)$. En lui ajoutant une constante $-$ C, on peut évidemment supposer qu'on a

$$\int_0^\omega F(x)\,dx = 0,$$

et par suite, la fonction $F(x)$ est de la forme

$$\begin{aligned} F(x) &= C + \int_0^\omega K(x,t)\,F''(t)\,dt \\ &= C + \int_0^\omega K_1(x,t)\,F''(t)\,dt + \frac{x(x-\omega)}{2\omega}\int_0^\omega F''(t)\,dt. \end{aligned}$$

D'après le théorème d'Hilbert-Schmidt, l'intégrale

$$\int_0^\omega K_1(x,t)\,F''(t)\,dt$$

peut être développée en série de Fourier uniformément convergente et il en est de même, nous venons de le voir, de $x(x-\omega)$.

2. *Polynomes de Legendre.* — Considérons un noyau $K(x, s)$ défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} K(x,s) &= \log(1-s) + \log(1+x) + 1 - 2\log 2 \qquad \text{pour } -1 \leqq s \leqq x \leqq 1, \\ K(x,s) &= \log(1-x) + \log(1+s) + 1 - 2\log 2 \qquad \text{pour } -1 \leqq x \leqq s \leqq 1; \end{aligned}$$

ce noyau est symétrique, et l'on vérifie facilement qu'on a

$$\int_{-1}^{+1} K(x, s)\, ds = \int_{-1}^{+1} K(x, s)\, dx = 0.$$

Par suite, toute fonction de la forme $\varphi(x) = \int_{-1}^{+1} K(x, s) f(s)\, ds$ satisfait à la relation $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\, dx = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} K(x, s) f(s)\, dx\, ds = 0$. Cela posé, considérons l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

qu'on peut écrire, en remplaçant $K(x, s)$ par son expression,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = {} & \lambda \int_{-1}^{x} \log(1 - s)\, \varphi(s)\, ds + \lambda \log(1 + x) \int_{-1}^{x} \varphi(s)\, ds \\ & + \lambda \int_{x}^{1} \log(1 + s)\, \varphi(s)\, ds + \lambda \log(1 - x) \int_{x}^{1} \varphi(s)\, ds \\ & + (1 - 2\log 2) \int_{-1}^{+1} \varphi(s)\, ds. \end{aligned}$$

On en tire, en différentiant,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = {} & \lambda\, \varphi(x) \log(1 - x) + \frac{\lambda}{1 - x} \int_{-1}^{x} \varphi(s)\, ds + \lambda\, \varphi(x) \log(1 + x) \\ & - \lambda\, \varphi(x) \log(1 + x) + \frac{\lambda}{x + 1} \int_{x}^{1} \varphi(s)\, ds - \lambda\, \varphi(x) \log(1 - x) \\ = {} & \frac{\lambda}{1 + x} \int_{-1}^{x} \varphi(s)\, ds + \frac{\lambda}{x - 1} \int_{x}^{1} \varphi(s)\, ds \end{aligned}$$

ou encore

$$(x^2 - 1)\, \varphi'(x) = \lambda(x - 1) \int_{0}^{x} \varphi(s)\, ds + \lambda(x + 1) \int_{x}^{1} \varphi(s)\, ds.$$

En tenant compte de la condition $\int_{-1}^{+1} \varphi(s)\, ds = 0$, le second membre devient $-2\lambda \int_{-1}^{x} \varphi(s)\, ds$, et une nouvelle différentiation nous donne

$$\text{(E)} \qquad (x^2 - 1)\, \varphi''(x) + 2x\, \varphi'(x) + 2\lambda\, \varphi(x) = 0.$$

L'équation (E) n'admet d'intégrale restant finie pour $x = \pm 1$, que si 2λ est de la forme $-n(n + 1)$, n étant un nombre entier *positif*, et l'intégrale correspondante est le polynome de Legendre $P_n(x)$.

Réciproquement, soit

$$y(x) = -\frac{n(n+1)}{2}\int_{-1}^{+1} K(x, s)\, P_n(s)\, ds;$$

le calcul qui vient d'être fait prouve que $y(x)$ est une intégrale de l'équation différentielle linéaire

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)\, P_n(x) = 0.$$

Comme elle est finie pour $x = \pm 1$, elle ne diffère donc de $P_n(x)$ que par une constante C, et cette constante est nulle puisqu'on a

$$\int_{-1}^{+1} y(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} P_n(x)\, dx = 0.$$

En résumé, les valeurs singulières du noyau $K(x, s)$ sont les nombres $-\frac{n(n+1)}{2}$, où n est un entier positif. A chacune de ces valeurs correspond une seule fonction fondamentale, $P_n(x)$. Le noyau principal correspondant au pôle $-\frac{n(n+1)}{2}$ est de la forme $C_n\, P_n(x)\, P_n(s)$; pour déterminer la constante C_n, il suffit de partir de la condition

$$1 = -\frac{n(n+1)}{2}\int_{-1}^{+1} C_n\, P_n^2(s)\, ds,$$

qui donne (I, n° 205) $C_n = -\frac{2n+1}{n(n+1)}$. Il est à remarquer que la série des noyaux principaux n'est pas uniformément convergente, puisqu'on a $P_n(1) = 1$.

Application. — Soit $F(x)$ une fonction continue, admettant des dérivées continues $F'(x)$, $F''(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, et satisfaisant à la condition $\int_{-1}^{+1} F(x)\, dx = 0$. Posons

$$f(x) = (x^2-1)\, F''(x) + 2x\, F'(x) = \frac{d}{dx}\left\{(x^2-1)\, F'(x)\right\},$$

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} K(x, s)\, f(s)\, ds;$$

d'après le calcul précédent, on a encore, puisque $\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = 0$,

$$(x^2-1)\, \Phi''(x) + 2x\, \Phi'(x) = f(x) = (x^2-1)\, F''(x) + 2x\, F'(x).$$

La fonction $\Phi(x)$, étant finie pour $x = \pm 1$, ne diffère de $F(x)$ que par une constante, et, comme l'on a $\int_{-1}^{+1} \Phi(x)\,dx = 0$, cette constante est nulle. On a donc

$$F(x) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} K(x, s) f(s)\,ds,$$

et par suite, la fonction $F(x)$ est développable en une série uniformément convergente de polynomes de Legendre, dans l'intervalle $(-1, +1)$. Le théorème s'étend à une fonction quelconque continue, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, en considérant la différence

$$F(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx.$$

3. *Refroidissement de la sphère.* — Dans le cas où la température ne dépend que de la distance au centre, on a vu (n° 488) qu'on obtient des solutions simples en cherchant les intégrales de l'équation $\frac{d^2 v}{dr^2} = \lambda v(r)$ satisfaisant aux conditions aux limites $v(0) = 0$, $\frac{dv}{dr} + hv = 0$ pour $r = R$. Or, on démontre aisément que l'intégrale de l'équation $\frac{d^2 v}{dr^2} = f(r)$ satisfaisant à ces conditions aux limites a pour expression

$$v(r) = \int_0^R K(r, t) f(t)\,dt,$$

$K(r, t)$ désignant le noyau symétrique défini par les égalités

$$K(r, t) = \frac{hrt}{1 + hR} - t \qquad \text{pour } t < r,$$

$$K(r, t) = \frac{hrt}{1 + hR} - r \qquad \text{pour } t > r.$$

Les fonctions $v(r)$ cherchées sont donc les fonctions fondamentales de ce noyau symétrique.

Toute fonction $V(r)$ satisfaisant aux conditions aux limites et admettant des dérivées des deux premiers ordres continues dans l'intervalle $(0, R)$ est représentée par l'intégrale $\int_0^R K(r, t) V''(t)\,dt$ et, par suite, peut être développée en série de Fourier uniformément convergente, ayant pour termes des fonctions fondamentales de ce noyau.

4. *Équation de Bessel.* — L'intégrale générale de l'équation

$$y'' + \frac{\alpha}{x} y' = f(x),$$

où l'on suppose $\alpha > 1$, est

$$y = \frac{1}{1-\alpha}\int_1^x (x^{1-\alpha}s^\alpha - s)f(s)\,ds + A\,x^{1-\alpha} + B.$$

Pour que l'intégrale reste finie pour $x = 0$ et vérifie, en outre, la condition $y'(1) + hy(1) = 0\,(h \neq 0)$, il faut qu'on ait

$$A = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 s^\alpha f(s)\,ds \qquad (1-\alpha)A + h(A+B) = 0.$$

On en déduit aisément que l'intégrale cherchée a pour expression

$$y = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 s^\alpha\,H(x, s)f(s)\,ds,$$

où l'on a posé

$$H(x, s) = x^{1-\alpha} + \mu \quad (0 < s \leqq x), \qquad H(x, s) = s^{1-\alpha} + \mu \quad (x \leqq s < 1)$$

et $\mu = \dfrac{\alpha - 1 - h}{h}$. Les intégrales de l'équation de Bessel

$$xy'' + \alpha y' = \lambda xy$$

qui satisfont aux conditions précédentes sont donc les solutions de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{1-\alpha}\int_0^1 s^\alpha\,H(x, s)\,\varphi(s)\,ds,$$

dont le noyau est de la forme de Schmidt (n° 593).

Remarque. — Dans le cas particulier où $\alpha = 1$, on est conduit de même à l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 s\,H(x, s)\,\varphi(s)\,ds,$$

où l'on a $H(x, s) = \log x + \mu$ pour $s < x$ et $H(x, s) = \log s + \mu$ pour $s > x$.

5. *Problème de Dirichlet pour un contour à points anguleux.* — Considérons, pour simplifier, un contour fermé C présentant un seul point anguleux M_0, d'abscisse curviligne x_0, où les tangentes font un angle $\alpha \gtrless \pi$. L'équation intégrale à résoudre est

$$(E) \qquad \beta\,\rho(x) + \lambda\int_C \frac{\cos\varphi}{r}\rho(s)\,ds = f(x),$$

r et φ ayant la signification habituelle, et β étant égal à π pour $x \gtrless x_0$, et à $2\pi - \alpha$ pour $x = x_0$ (n° 505). Nous remplacerons cette équation (E) par l'équation

$$(E)' \qquad \pi\,\rho(x) + \lambda\int_C \frac{\cos\varphi}{r}\rho(s)\,ds = f(x),$$

qui n'en diffère que pour $x = x_0$. En appliquant à cette équation la méthode des approximations successives on obtient une solution formelle

$$\rho(x, \lambda) = \rho_0(x) + \lambda\,\rho_1(x) + \ldots + \lambda^n\,\rho_n(x) + \ldots$$

où les différents termes $\rho_n(x)$ sont discontinus pour $x = x_0$, et continus pour toute autre valeur de x; on le démontre aisément au moyen des propriétés du potentiel de double couche

Supposons $|\lambda|$ assez petit pour que la série soit uniformément convergente; cette solution $\rho(x, \lambda)$ de l'équation (E)′ présente donc une discontinuité pour $x = x_0$, et l'on a $\rho(x_0, \lambda) \neq \rho(x_0 + 0, \lambda) = \rho(x_0 - 0, \lambda)$. Nous allons calculer cette discontinuité. Pour cela, désignons par $R(x, \lambda)$ une fonction continue égale à $\rho(x, \lambda)$ pour $x \neq x_0$, et à $\rho(x_0 \pm 0, \lambda)$ pour $x = x_0$. L'équation (E)′ peut s'écrire

$$\pi\,\rho(x, \lambda) = \lambda \int_C \frac{\cos\varphi}{r}[R(x, \lambda) - R(s, \lambda)]\,ds - \lambda\,R(x, \lambda)\int_C \frac{\cos\varphi}{r}\,ds + f(x),$$

et, la première intégrale étant continue (n° 513), $\pi\rho(x, \lambda)$ présente la même discontinuité que $-\lambda R(x, \lambda)\displaystyle\int_C \frac{\cos\varphi}{r}\,ds$. On a donc

$$\pi[\rho(x_0 \pm 0, \lambda) - \rho(x_0, \lambda)] = -\lambda\pi\,R(x_0, \lambda) + \lambda\alpha\,R(x_0, \lambda) = \lambda(\alpha - \pi)\,R(x_0, \lambda),$$

ce qu'on peut écrire, d'après la définition de $R(x, \lambda)$,

$$R(x_0, \lambda) = \frac{\pi\,\rho(x_0, \lambda)}{\pi + \lambda(\pi - \alpha)}.$$

La fonction continue $R(x, \lambda)$ satisfait donc à l'équation intégrale

$$\text{(E)}'' \qquad \gamma\,R(x, \lambda) + \lambda \int_C \frac{\cos\varphi}{r}\,R(s, \lambda)\,ds = f(x),$$

où $\gamma = \pi$ pour $x \neq x_0$, et $\gamma = \pi + \lambda(\pi - \alpha)$ pour $x = x_0$.

Cela étant, si la fonction $\rho(x, \lambda)$, qui est une fonction analytique de λ, est holomorphe dans le domaine du point $\lambda = 1$, il en sera évidemment de même de $R(x, \lambda)$, et la dernière équation (E)″ prouve que $R(x, 1)$ est une solution continue de l'équation (E). La remarque s'étend sans peine à un contour ayant un nombre quelconque de points anguleux, et au problème de Dirichlet dans l'espace, pour une surface ayant un nombre quelconque d'arêtes.

Tout revient donc à démontrer que $\lambda = 1$ n'est pas une *valeur singulière* pour l'équation (E)′. Cette question a fait l'objet des importantes recherches de M. T. Carleman dans un beau Mémoire *Ueber Neumann Poincaresche Problem für ein gebiet mit ecken* (*Upsala*, 1916), où il étudie les singularités de la fonction $R(x, \lambda)$ de la variable complexe λ dans tout le plan.

CHAPITRE XXXIV.

CALCUL DES VARIATIONS.

Les problèmes qui font l'objet du *Calcul des variations* sont des problèmes de *maximum* et de *minimum* de nature très variée, dans lesquels il s'agit de déterminer la forme d'une ou de plusieurs fonctions inconnues. Nous traiterons seulement les plus simples de ces problèmes pour bien mettre en évidence les difficultés spéciales à ce genre de questions, et pour tâcher en même temps de donner une idée de quelques progrès récents de la théorie. Il est presque superflu d'ajouter qu'il ne sera question dans ce Chapitre que de variables réelles (¹).

I. — PREMIÈRE VARIATION. — EXTRÉMALES.

619. **Lemmes préliminaires.** — Nous établirons d'abord quelques lemmes très simples, dont on s'est déjà servi dans certains cas particuliers, et sur lesquels repose tout le calcul des variations.

Lemme I. — *Soit* $F(x)$ *une fonction continue déterminée dans un intervalle* (x_0, x_1); *si l'intégrale* $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) F(x)\, dx$ *est nulle pour toutes les formes possibles de la fonction* $\eta(x)$,

(¹) Pour une étude plus complète de la théorie générale et pour l'historique, *voir* l'article sur le *Calcul des variations*, dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, de MM. Kneser, Zermelo et Lecat, et les Ouvrages suivants :

Kneser, *Lehrbuch der Variationsrechnung* (Braunschweig, 1900). — O. Bolza, *Lectures on the calculus of variations* (Chicago, 1904). — J. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations* (Paris, 1910).

Je me suis beaucoup servi de ces deux derniers Livres pour la rédaction de ce Chapitre.

continue ainsi que sa dérivée $\eta'(x)$ *dans l'intervalle* (x_0, x_1), *et s'annulant pour* $x = x_0$, $x = x_1$, *la fonction* $F(x)$ *est nulle dans tout cet intervalle* (x_0, x_1).

En effet, supposons, par exemple, que $F(x)$ soit positif pour une valeur x_2 comprise entre x_0 et x_1; on peut alors trouver un intervalle (ξ_0, ξ_1) renfermant x_2 $(x_0' < \xi_0 < x_2 < \xi_1 < x_1)$ tel que $F(x)$ soit positif dans tout l'intervalle (ξ_0, ξ_1). Considérons alors la fonction $\eta(x)$ définie de la manière suivante :

1° $\quad \eta(x) = 0 \quad$ pour $x_0 \leqq x \leqq \xi_0$;

2° $\quad \eta(x) = (x - \xi_0)^m (\xi_1 - x)^m \quad$ pour $\xi_0 \leqq x \leqq \xi_1$,

m étant un nombre entier au moins égal à 2;

3° $\quad \eta(x) = 0 \quad$ pour $\xi_1 \leqq x \leqq x_1$.

Cette fonction est continue et admet une dérivée continue entre x_0 et x_1, et il est clair que la valeur correspondante de l'intégrale considérée est positive.

Le raisonnement et la conclusion subsistent évidemment si l'on supprime quelques-unes des conditions imposées à la fonction $\eta(x)$. Il en est encore de même, si l'on assujettit cette fonction $\eta(x)$ à de nouvelles conditions, comme d'avoir des dérivées continues jusqu'à un certain ordre, toutes ces dérivées étant nulles pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$. Il suffira de prendre le nombre entier m assez grand pour que ces conditions soient vérifiées par la fonction $\eta(x)$ considérée tout à l'heure.

Enfin, il est visible que la conclusion s'étend à des intégrales de la forme

$$\int_{x_0}^{x_1} [\eta_1 F_1(x) + \eta_2 F_2 + \eta_3 F_3]\, dx;$$

F_1, F_2, F_3 étant des fonctions continues dans l'intervalle (x_0, x_1); η_1, η_2, η_3 des fonctions devant vérifier les mêmes conditions que $\eta(x)$. Pour que cette intégrale soit nulle pour toutes les formes possibles des fonctions η_1, η_2, η_3, vérifiant ces conditions, il faut que les fonctions F_1, F_2, F_3 soient identiquement nulles. On verra plus loin (n° 627, note) de nouvelles extensions.

Lemme II. — *Soient* $F(x)$, $\eta(x)$ *deux fonctions continues dans l'intervalle* (x_0, x_1), *dont la première* $F(x)$ *est supposée*

déterminée. Si l'intégrale définie $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) F(x)\,dx$ *est nulle pour toutes les formes possibles de la fonction* $\eta(x)$ *telles que l'intégrale* $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\,dx$ *soit nulle, la fonction* $F(x)$ *se réduit à une constante.*

En effet, si cette condition est satisfaite, on aura aussi

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x) - C]\,\eta(x)\,dx = 0,$$

quelle que soit la constante C, si l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\,dx$ est nulle. Choisissons en particulier la constante C de façon qu'on ait

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x) - C]\,dx = 0.$$

On pourra prendre $\eta(x) = F(x) - C$ et, par suite, on aura

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x) - C]^2\,dx = 0,$$

d'où l'on tire $F(x) = C$ (*cf.* p. 524, note).

620. **Définitions. Objet du premier problème.** — Soit $F(x, y, y')$ une fonction des trois variables x, y, y', qui est continue, ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à celles du troisième ordre, tant que le point de coordonnées (x, y) reste dans une région connexe du plan $\mathcal{R}$, et pour toutes les valeurs finies de y'. Dans tous les exemples que nous traiterons, cette fonction F est analytique; la région $\mathcal{R}$, qui est déterminée dans chaque cas par les conditions du problème, peut embrasser tout le plan ou être limitée par une ou plusieurs *courbes frontières*.

Soit $f(x)$ une fonction continue et admettant une dérivée continue dans un intervalle (x_0, x_1); nous dirons que cette fonction appartient à la classe (I) dans l'intervalle (x_0, x_1). L'équation $y = f(x)$, quand on fait varier x de x_0 à x_1, représente un arc de courbe Γ admettant en chaque point une tangente, dont le coefficient angulaire varie d'une manière continue; nous dirons aussi que cette courbe Γ appartient à la classe (I). Si elle est située dans la région $\mathcal{R}$, la fonction $F[x, f(x), f'(x)]$ obtenue en remplaçant y

par $f(x)$ et y' par $f'(x)$ dans $F(x, y, y')$ est continue dans l'intervalle (x_0, x_1) et l'intégrale

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\, dx$$

a une valeur finie. Nous écrirons aussi cette intégrale

$$J = \int_{\Gamma} F(x, y, y')\, dx,$$

en indiquant la courbe Γ le long de laquelle elle est prise. Soient A et B deux points quelconques de la région $\mathcal{R}$, de coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1); nous supposerons toujours $x_0 < x_1$. On peut joindre ces deux points A et B par une infinité de courbes Γ de la classe (I), situées tout entières dans la région $\mathcal{R}$. Une quelconque de ces courbes Γ est représentée par une équation de la forme $y = f(x)$, la fonction $f(x)$ étant une fonction de la classe (I), définie dans l'intervalle (x_0, x_1), satisfaisant aux conditions

$$y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(x_1),$$

et telle en outre que le point de coordonnées $[x, f(x)]$ reste dans la région $\mathcal{R}$ lorsque x varie de x_0 à x_1. A chaque fonction $f(x)$ satisfaisant à ces conditions correspond une valeur déterminée de l'intégrale J. Le problème dont nous allons nous occuper peut être formulé ainsi : *Parmi les courbes* Γ *de la classe* (I), *joignant les deux points* A *et* B *et situées à l'intérieur de la région* $\mathcal{R}$, *en existe-t-il une, telle que l'intégrale* J *correspondante ait une valeur plus grande ou plus petite que pour toute autre courbe satisfaisant aux mêmes conditions ?*

Il n'est nullement certain *a priori* qu'il existe une courbe Γ répondant à la question. Supposons par exemple, que la fonction $F(x, y, y')$ soit toujours positive pour toutes les valeurs finies de y', lorsque le point (x, y) reste dans la région $\mathcal{R}$. L'intégrale J a évidemment une valeur positive pour toute courbe Γ joignant les deux points A et B; la valeur de cette intégrale a donc une borne inférieure $m \geqq 0$, mais on ne peut pas en conclure qu'il existe une courbe Γ de l'espèce considérée pour laquelle J a cette valeur m : nous verrons des exemples où il n'en est pas ainsi. Il y a là une différence essentielle entre les problèmes du calcul des variations

et les problèmes de maximum et de minimum traités dans le calcul différentiel; nous savons en effet qu'une fonction d'une seule variable x, par exemple, qui est continue dans un intervalle *fermé* (a, b), prend une valeur maximum et une valeur minimum dans cet intervalle (I, n° 8).

Nous ne nous occuperons, tout d'abord, que de la recherche des maxima et des minima *relatifs*, c'est-à-dire que nous ne comparerons la valeur de l'intégrale J le long d'une courbe Γ joignant les deux points A et B qu'aux valeurs de la même intégrale pour des courbes infiniment voisines satisfaisant aux mêmes conditions. Pour fixer les idées, nous ne rechercherons le plus souvent que les valeurs minima, le cas des maxima se ramenant au premier par le changement de F en — F.

Le problème que nous nous proposons peut être formulé analytiquement d'une façon précise. Soit $y = f(x)$ une fonction de la classe (I) dans l'intervalle (x_0, x_1), prenant les valeurs y_0 pour $x = x_0$ et y_1 pour $x = x_1$, et telle que la courbe Γ représentée par l'équation $y = f(x)$ soit à l'*intérieur* de la région $\mathcal{R}$. Soit ε un nombre positif; nous appellerons $\mathcal{R}_\varepsilon$ la région fermée du plan limitée par les deux parallèles $x = x_0$, $x = x_1$ à l'axe Oy, et par les deux courbes

$$Y_1 = f(x) + \varepsilon, \qquad Y_2 = f(x) - \varepsilon,$$

et nous supposerons le nombre ε assez petit pour que $\mathcal{R}_\varepsilon$ soit tout entière à l'intérieur de $\mathcal{R}$. Toute courbe de la classe (I), joignant les deux points A et B, et située tout entière dans la région $\mathcal{R}_\varepsilon$, est représentée par une équation de la forme $y = f(x) + \omega(x)$, la fonction $\omega(x)$ étant continue et admettant une dérivée continue dans l'intervalle (x_0, x_1), et satisfaisant en outre aux conditions

$$(1) \quad \omega(x_0) = 0, \qquad \omega(x_1) = 0, \qquad |\omega(x)| < \varepsilon \qquad \text{pour } x_0 < x < x_1.$$

Nous dirons que *la fonction* $f(x)$ *donne un extremum de l'intégrale* J, *s'il est possible de trouver un nombre positif* ε *tel que la valeur de l'intégrale*

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\, dx$$

soit plus petite ou plus grande que la valeur de l'intégrale

$$J' = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \omega(x), f'(x) + \omega'(x)]\, dx,$$

$\omega(x)$ *étant une fonction quelconque de la classe* (I) *dans l'intervalle* (x_0, x_1), *satisfaisant aux conditions* (1), *et n'étant pas nulle identiquement* ([1]).

Il est clair qu'on peut trouver d'une infinité de façons des fonctions $\omega(x)$, satisfaisant à ces conditions, et dépendant d'autant de paramètres arbitraires qu'on le voudra. Nous prendrons d'abord des fonctions $\omega(x)$ ne dépendant que d'un seul paramètre variable, et d'une forme très simple. Nous désignerons d'une manière générale par $\eta(x)$ une fonction continue, admettant une dérivée continue dans l'intervalle (x_0, x_1), et s'annulant pour les deux limites x_0 et x_1. Il est clair que la fonction $\alpha\eta(x)$ sera en valeur absolue moindre que ε dans tout l'intervalle (x_0, x_1) pourvu que $|\alpha|$ soit assez petit. En remplaçant $f(x)$ par $f(x) + \alpha\eta(x)$ dans $F[x, f(x), f'(x)]$, l'intégrale J devient une fonction du paramètre α

$$(2) \qquad J(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \alpha\,\eta(x), f'(x) + \alpha\,\eta'(x)]\, dx,$$

et cette fonction $J(\alpha)$ doit être minimum pour la valeur $\alpha = 0$ du paramètre, quelle que soit la fonction $\eta(x)$.

Si l'on développe cette fonction $J(\alpha)$ par la formule de Taylor suivant les puissances de α, on a

$$J(\alpha) = J(0) + \frac{\alpha}{1} J_1 + \frac{\alpha^2}{1.2} J_2 + \ldots + \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} J_n + \alpha^n h(\alpha),$$

$h(\alpha)$ tendant vers zéro avec α. Les quantités αJ_1, $\alpha^2 J_2$, ... sont appelées *première*, *seconde*, ... *variation* de J; on les représente, d'après une notation due à Lagrange, par δJ, $\delta^2 J$, ..., $\delta^n J$. Remarquons que $\delta^n J$ est égal au produit de α^n par la valeur de la dérivée $n^{\text{ième}}$ $\frac{d^n J}{d\alpha^n}$ pour la valeur $\alpha = 0$. On voit donc, en employant la notation de Lagrange, qu'*il est nécessaire*, *pour que la fonc-*

([1]) Il peut y avoir extremum au sens *strict* ou au sens *large*. Il y a minimum au sens strict, par exemple, si l'on a $J < J'$ pour toutes les formes possibles de $\omega(x)$; il y a minimum au sens large, si l'on a $J = J'$ pour certaines formes de la fonction $\omega(x)$.

tion $f(x)$ rende l'intégrale J *minimum, qu'on ait*

$$\delta J = 0, \qquad \delta^2 J \geqq 0,$$

et ces conditions doivent être vérifiées, quelle que soit la fonction $\eta(x)$, pourvu seulement que cette fonction soit continue ainsi que sa dérivée $\eta'(x)$ dans l'intervalle (x_0, x_1), et qu'elle soit nulle pour les deux limites x_0 et x_1. Le signe $>$ devra être remplacé par le signe $<$ pour un maximum.

621. **Première variation. Équation d'Euler.** — De la formule (2) on déduit, en appliquant la formule habituelle de différentiation sous le signe intégral, l'expression de la première variation

$$(3) \qquad \delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx,$$

y et y' devant être remplacés par $f(x)$ et $f'(x)$ dans $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial y'}$. Si la fonction $f(x)$ admet une dérivée seconde continue $f''(x)$, on peut appliquer la formule d'intégration par parties à l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) a x,$$

ce qui donne

$$(3)' \quad \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x)\, dx = \left[\eta(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx.$$

Le premier terme du second membre est nul puisque la fonction $\eta(x)$ est nulle aux deux limites, et nous avons une nouvelle forme de δJ

$$(4) \qquad \delta J = \alpha \int_{x_1}^{x_1} \eta(x) \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx.$$

Pour qu'on ait $\delta J = 0$, pour toutes les formes possibles de la fonction $\eta(x)$, il est nécessaire, d'après le lemme I du n° 619, que le coefficient de $\eta(x)$ sous le signe intégral soit nul dans tout l'intervalle (x_0, x_1). On en déduit la première condition à laquelle doit satisfaire la fonction $f(x)$.

Pour que la fonction $f(x)$ donne un extremum relatif de l'intégrale définie J, *il est nécessaire que cette fonction $f(x)$ vérifie l'équation différentielle*

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Cette équation a été obtenue pour la première fois par Euler [1]; elle s'écrit, en développant la dérivée $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$,

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Lorsque la fonction F contient y' (ce qui est le cas général), l'équation (6) est du second ordre, et l'intégrale générale $f(x, a, b)$ dépend de deux constantes arbitraires a et b. Si l'on veut que la courbe intégrale passe par deux points donnés A et B de la région $\mathcal{R}$, on doit choisir ces deux constantes de façon à satisfaire aux deux conditions $y_0 = f(x_0, a, b), y_1 = f(x_1, a, b)$. Le problème est, en général, déterminé puisque le nombre des arbitraires dont on peut disposer est égal au nombre des équations. Toute fonction $f(x)$ de classe (I) fournissant un extremum de l'intégrale J est donc une courbe intégrale de l'équation (5) passant par les deux points A et B. On examinera plus loin si toute courbe intégrale satisfaisant à ces deux conditions donne un extremum. Nous dirons avec M. Kneser que toute fonction $y(x)$, satisfaisant à l'équation d'Euler, est une fonction extrémale, et aussi que la courbe correspondante Γ est une courbe extrémale. De tout point (x_0, y_0) de la région $\mathcal{R}$, il part une infinité de courbes extrémales, mais il en part une seule tangente à la droite de coefficient angulaire y'_0 pourvu que $F''_{y'^2}(x_0, y_0, y'_0)$ ne soit pas nul. Lorsque la dérivée seconde $F''_{y'^2}$ est différente de zéro pour les coordonnées d'un point quelconque de $\mathcal{R}$, et pour toute valeur de y', le problème du calcul des variations est dit *régulier*.

Objection de Du Bois-Reymond. — On a supposé, pour passer de la formule (3) à la formule (4), que la fonction $f(x)$ admettait une dérivée seconde continue; il reste à prouver que les intégrales de l'équation d'Euler sont les seules fonctions $f(x)$ de classe (I) pour lesquelles la première variation δJ est nulle, quelle que soit $\eta(x)$. M. Du Bois-Reymond l'a démontré le premier en utilisant le second lemme du n° 619 au lieu du premier, et en intégrant par parties le premier terme de l'intégrale (3) au lieu du second terme.

Quand on remplace y par une fonction $f(x)$ de classe (I) et y' par $f'(x)$ dans $\frac{\partial F}{\partial y}$, le résultat de cette substitution est une fonction continue de x

---

[1] *Institutiones Calculi integralis*, t. III. Lagrange a considéré le premier des variations générales (*Œuvres*, t, I).

qu'on peut représenter par $\Phi'(x)$, $\Phi(x)$ étant aussi une fonction continue dans l'intervalle (x_0, x_1). Cela étant, si l'on applique la formule d'intégration par parties à l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\frac{\partial F}{\partial y}$, il vient

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\frac{\partial F}{\partial y}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \Phi'(x)\,\eta(x)\,dx$$
$$= [\Phi(x)\,\eta(x)]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\,\eta'(x)\,dx,$$

et l'on a une nouvelle expression de δJ :

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \eta'(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y'} - \Phi(x)\right] dx.$$

Cette intégrale doit être nulle toutes les fois qu'on a

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta'(x)\,dx = 0,$$

car si l'on prend $\eta(x_0) = 0$, on aura aussi

$$\eta(x_1) = 0.$$

Le coefficient de $\eta'(x)$ sous le signe intégral est donc constant, et la fonction $f(x)$ satisfait à une équation de la forme

$$F_1[x, f(x), f'(x)] = \Phi(x) + C,$$

la fonction $F_1(x, y, y')$ ayant des dérivées partielles du premier ordre continues. Cette équation, résolue par rapport à $f'(x)$, donne une relation de la forme $f'(x) = \psi[x, f(x)]$, la fonction $\psi(x, y)$ ayant elle-même des dérivées continues du premier ordre (I, n° 36). Par suite, $f'(x)$ admet aussi une dérivée continue $f''(x)$ et, par conséquent, $f(x)$ est une intégrale de l'équation d'Euler.

Remarques diverses. — 1° L'intégrale générale de l'équation d'Euler ne contenant que deux constantes arbitraires, une extrémale est, en général, déterminée quand on se donne deux de ses points. Mais on ne peut se donner arbitrairement deux points d'une extrémale et la tangente en un de ses points, ce qui prouve que le problème correspondant du calcul des variations n'admet pas, en général, de solutions. Par exemple, on ne peut se proposer de trouver, parmi toutes les courbes de classe (I) joignant deux points A et B, et ayant en A une tangente distincte de la droite AB, celle dont la longueur est minimum. Les extrémales sont, en effet, des lignes droites, et il n'en est aucune satisfaisant aux conditions voulues. Il est évident, dans ce cas, que le problème n'admet pas

de solution. D'une part, toutes les courbes satisfaisant à ces conditions ont une longueur supérieure à la distance AB et, d'autre part, on peut en trouver dont la longueur diffère de AB d'aussi peu qu'on le veut.

2° Lorsque la fonction $F(x, y, y')$ ne dépend que de y', l'équation (6) se réduit à $y'' = 0$, et toutes les courbes extrémales sont des lignes droites.

Lorsque la fonction $F(x, y, y')$ ne renferme pas y, on a immédiatement une intégrale première de l'équation d'Euler. En effet, si l'on part de la première forme (5) sous laquelle on a obtenu cette équation, on voit qu'elle est équivalente à l'équation du premier ordre $\frac{\partial F}{\partial y'} = C$, d'où l'on tire encore $y' = \varphi(x, C)$, et l'on achèvera l'intégration par une quadrature.

On a une simplification équivalente quand la fonction F ne renferme pas x. Nous pouvons en effet écrire alors l'équation (6), en la considérant comme une équation différentielle du premier ordre entre y et $y' = p$ (n° 381),

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial p} p + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} p \frac{dp}{dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$d\left(F - p \frac{\partial F}{\partial p}\right) = 0;$$

on a donc une intégrale première, ne renfermant que y et y',

$$(7) \qquad F(y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C,$$

et il suffira encore d'une quadrature pour achever l'intégration de l'équation d'Euler.

Lorsque la fonction F ne contient pas y', l'équation (5) se réduit à $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$; les seules fonctions $f(x)$ pour lesquelles la première variation δJ soit nulle sont donc les racines de cette équation. Les extrémales ne dépendent d'aucune constante arbitraire.

3° Cherchons comment on doit prendre la fonction $F(x, y, y')$ pour que l'intégrale J ne dépende pas de la courbe Γ. Il faut pour cela que la première variation δJ soit nulle, quelle que soit cette courbe, et par suite que l'équation d'Euler se réduise à une identité. On doit donc avoir $F''_{y'^2} = 0$, et par suite F est une fonction linéaire de y'

$$F = P(x, y) + y' Q(x, y).$$

Si la fonction F est de cette forme, l'intégrale J est une intégrale curviligne

$$J = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy,$$

tandis que l'équation (6) se réduit à $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. La condition ainsi trouvée est nécessaire et suffisante pour que l'intégrale curviligne soit indépendante du chemin d'intégration (I, n° 152), même pour des chemins de forme plus générale que ceux considérés dans ce Chapitre, par exemple pour des chemins ayant un nombre fini de points anguleux.

4° Remarquons aussi que, quand on remplace F par

$$F + \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} y'$$

l'équation (6) n'est pas changée et les deux intégrales sont évidemment maxima ou minima en même temps, quelle que soit la fonction $\theta(x, y)$, car elles ne diffèrent que d'une constante

$$\theta(x_1, y_1) - \theta(x_0, y_0).$$

622. **Exemples.** — Soit $F = y^\alpha \sqrt{1 + y'^2}$, où l'exposant α est quelconque, la région $\mathcal{R}$ étant la portion du plan au-dessus de l'axe Ox. L'équation d'Euler est ici $yy'' - \alpha(1 + y'^2) = 0$ et l'intégrale première (7) peut s'écrire

$$1 + y'^2 = \left(\frac{y}{C}\right)^{2\alpha}.$$

Cette équation différentielle a déjà été étudiée (II, n° 382) et l'on a vu que les courbes intégrales se déduisaient toutes, par une translation parallèle à l'axe Ox combinée avec une transformation homothétique relativement à l'origine, de la courbe γ représentée par les équations

$$(8) \qquad x = \mu \int_0^t \cos^\mu t\, dt, \qquad y = \cos^\mu t,$$

où $\mu = -\frac{1}{\alpha}$. La courbe γ a deux formes très différentes suivant le signe de α. Comme nous ne voulons que la portion de courbe située au-dessus de Ox, il suffira, quel que soit μ, de faire varier t de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. Si α est positif, μ est négatif, et la courbe γ est symétrique par rapport à l'axe Oy qui passe par le point le plus bas; elle présente deux branches infinies avec l'axe des y comme direction asymptotique, et la convexité est tournée vers les y négatifs. L'aspect général est celui d'une parabole si μ est supérieur ou égal à un en valeur absolue; il y a deux asymptotes parallèles à Oy, si

μ est compris entre -1 et 0. Au contraire, si α est négatif, μ est positif, et la courbe γ a une forme analogue à une branche de cycloïde ayant Oy pour axe de symétrie et limitée à deux points de l'axe des x où la tangente est parallèle à Oy. La convexité est dirigée vers les y positifs.

Toutes les extrémales étant semblables à la courbe γ, pour trouver une extrémale passant par deux points A et B situés au-dessus de Ox, il suffira de trouver sur γ deux points a, b, tels que la corde ab soit parallèle à la droite AB, et qu'on ait $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{ac}{bc}$, C et c étant les points de rencontre de Ox avec les droites AB et ab respectivement. Les points A et B étant donnés, on connaît donc la direction de la corde ab, et le rapport k des deux segments ac et bc. Ces points a et b étant déterminés, il suffira d'une transformation par similitude pour en déduire une extrémale passant par les points A et B. La discussion se fait aisément par des considérations géométriques.

Premier cas. — Soit $\alpha < 0$. La courbe γ, analogue à une cycloïde, est divisée en deux arcs PR, QR par le point de contact de la tangente RS parallèle à AB (*fig.* 99 *a*). Toute parallèle à cette tangente passant par un

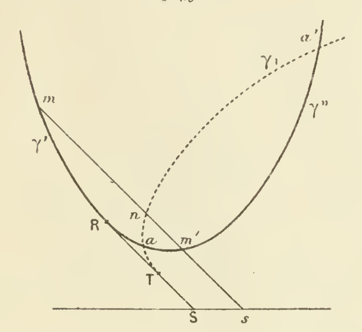
Fig. 99 *a*.

point s compris entre S et Q rencontre l'arc RQ en un point m et l'arc RP en m'. Portons sur cette droite à partir de s une longueur $sn = k.sm$. Le lieu du point n est un arc de courbe γ_1, tournant sa convexité dans le même sens que l'arc QR, et allant du point Q à un point T sur le prolongement de SR, tel que $ST = k.SR$. L'intersection de cet arc γ_1 avec l'arc PR donnera le point a demandé. *Ces deux arcs ont toujours un point commun et un seul.* Posons, en effet, $Ss = t$, $sm' = u$, $sn = v$, u et v sont des fonctions de t dont les dérivées secondes u'' et v'' ont des signes contraires lorsque t varie d'une valeur positive très petite à la valeur SQ. La différence $u'' - v''$ ayant un signe constant, $u - v$ ne peut changer de signe que deux fois au plus, et comme cette différence a des valeurs de signes contraires aux deux limites, elle passe donc une fois et une seule fois par la valeur zéro. *Il y a donc toujours une extrémale et une seule passant par deux points donnés* A *et* B *de la région* $\mathcal{R}$.

Deuxième cas. — Soit $\alpha > 0$. Le point de contact R de la tangente RS parallèle à AB (*fig.* 99 *b*) divise encore la courbe γ en deux branches infinies γ', γ''. Toute parallèle à cette tangente située au-dessus rencontre

les arcs γ', γ'' aux points m, m' respectivement, et si nous portons sur sm une longueur sn proportionnelle à sm (le rapport étant inférieur à un), le

Fig. 99 *b*



lieu du point n est une branche infinie γ_1 partant d'un point T sur RS, et ayant une branche infinie avec une direction asymptotique dont le coefficient angulaire a une valeur finie. Les deux arcs γ_1, γ'', tournant leur convexité en sens contraire, ne peuvent se rencontrer en plus de deux points. Dans le cas actuel, ils ont donc zéro ou deux points communs. *Par deux points* A *et* B *de la région* $\mathcal{R}$, *il passe donc deux courbes extrémales (pouvant comme cas particulier être confondues), ou il n'en passe aucune.*

Dans le cas particulier où la droite AB est parallèle à Ox, la construction se simplifie. On peut évidemment supposer ces deux points symétriques par rapport à l'axe Oy, et l'extrémale cherchée doit être homothétique de γ par rapport à l'origine. Pour avoir le rapport d'homothétie, il suffit de prendre l'intersection de la droite OA avec γ. Si $\alpha < 0$, il y a un point d'intersection et un seul, et par suite *une seule solution*. Si $\alpha > 0$, la droite OA rencontre γ en deux points lorsque les droites OA et OB sont dans l'angle des tangentes menées du point O à γ, et ne rencontre pas γ dans le cas contraire. Il y a donc encore *deux solutions, ou aucune solution*.

Donnons maintenant à α quelques valeurs particulières.

1° Soit $\alpha = -1$. Les formules (8) représentent un cercle ayant pour centre l'origine. Les extrémales sont donc des demi-circonférences ayant leur centre sur Ox. Il est clair que, par deux points A et B au-dessous de Oy, il passe une extrémité et une seule.

2° Soit $\alpha = -\frac{1}{2}$. On a alors $\mu = \alpha$, et les formules (8) représentent une cycloïde ayant pour base Ox. Les courbes extrémales sont donc des cycloïdes ayant leurs points de rebroussement sur Ox. Par deux points A

et B situés d'un même côté de Ox, nous avons vu qu'il passait une de ces cycloïdes et une seule, n'ayant aucun point de rebroussement entre A et B. Ce cas particulier donne la solution du problème de la *brachistochrone*, posé par Jean Bernoulli en 1696, un de ceux dont l'étude a conduit à la théorie générale du calcul des variations. L'énoncé est le suivant : *Trouver la ligne joignant deux points* A *et* B *telle qu'un point matériel pesant assujetti à décrire cette ligne sans frottement, et partant du point* A *avec une vitesse initiale* v_0, *arrive au point* B *dans le temps le plus court possible.* Admettons, ce qui est à peu près évident, que la courbe cherchée doit être dans le plan vertical qui contient les deux points (*cf.* n° 623). Ce plan vertical étant pris pour plan des xy, choisissons pour axe des x l'horizontale située à une hauteur h au-dessus du point A, la vitesse initiale v_0 étant égale à $\sqrt{2gh}$, et supposons l'axe des y dirigé vers le bas. La vitesse du mobile partant du point A avec la vitesse initiale $\sqrt{2gh}$ est égale à chaque instant à $\sqrt{2gy}$, et il est évident que ce mobile ne peut atteindre le point B que si ce point est lui-même au-dessous de Ox. Le temps mis par le mobile pour aller de A en B est représenté par l'intégrale curviligne $\int_{(AB)} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$. On a donc ici, à un facteur constant près,

$$F = \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1 + y'^2},$$

et par suite la courbe cherchée est l'arc de cycloïde ayant Ox pour base et passant par les points A et B, sans aucun point de rebroussement entre A et B.

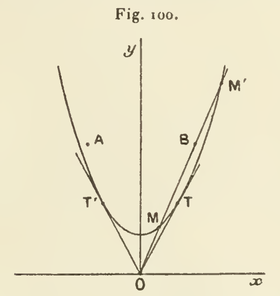
3° Soit $\alpha = 1$, L'intégrale première est ici $y = C\sqrt{1 + y'^2}$, et l'intégrale générale est formée de chaînettes ayant Ox pour base. Par deux points A et B situés au-dessus de Ox, nous avons vu qu'il passait 0 ou 2 de ces courbes. En particulier, si la droite AB est parallèle à Ox, le problème revient à faire passer par ces deux points une chaînette homothétique à une chaînette γ, ayant Oy pour axe de symétrie, relativement à l'origine. Soient OT et OT' les tangentes menées de l'origine à γ; toutes les chaînettes homothétiques sont situées dans l'angle TOT' (*fig.* 100).

Si le coefficient angulaire de la droite OB est supérieur au coefficient angulaire de la tangente OT, qui est 1,5088, ..., la droite OB rencontre la chaînette en deux points M et M'. Nous avons deux extrémales passant par les deux points A et B ; on les obtient en prenant pour rapport d'homothétie $\frac{OB}{OM}$ ou $\frac{OB}{OM'}$. Lorsque le coefficient angulaire de OB est inférieur à 1,5088, ..., la droite OB ne rencontre pas γ, et il n'existe pas d'extrémale passant par les points A et B,

Ce cas correspond au problème de géométrie suivant. Étant donnés deux points A et B dans le demi-plan au-dessus de Ox, soit à trouver la courbe joignant ces deux points (et située au-dessus de Ox) qui, en tournant autour de Ox, engendre la surface d'aire minimum. Si l'on admet qu'il existe une courbe de classe (I) fournissant ce minimum, on doit

prendre $F = y\sqrt{1+y'^2}$, la région $\mathcal{R}$ étant toujours le demi-plan au-dessus de Ox. Dans le cas où il n'y a pas d'extrémale passant par les deux points

Fig. 100.



A et B, nous verrons plus tard que le minimum n'est pas fourni par une courbe de classe (I).

4° Soit $\alpha = \frac{1}{2}$. L'équation d'Euler admet l'intégrale première

$$y = C(1 + y'^2),$$

et les courbes extrémales sont des paraboles ayant l'axe des x pour directrice $(x - C)^2 + (y - C')^2 = y^2$. Le foyer d'une extrémale passant par deux points A et B est à l'intersection des deux cercles tangents à Ox, ayant pour centres les points A et B respectivement. Pour que ces cercles se coupent, il faut et il suffit que le point B soit à l'intérieur de la parabole P de foyer A, dont l'axe des x est la tangente au sommet. Les diverses extrémales passant par un point A sont les trajectoires d'un point mobile pesant, lancé du point A dans les diverses directions issues de ce point avec la même vitesse initiale, et la parabole P n'est autre que la *parabole de sûreté*. Ce résultat s'explique aisément, comme application du *principe de la moindre action* (voir les Traités de Mécanique).

623. Cas de plusieurs fonctions inconnues. — La méthode du n° 621 s'étend sans difficulté au cas où la fonction F dépend de plusieurs fonctions de la variable x et de leurs dérivées du premier ordre. Considérons, pour fixer les idées, une fonction $F(x, y, z, y', z')$, continue et admettant des dérivées partielles continues au moins jusqu'au troisième ordre, lorsque le point (x, y, z) reste dans une région $\mathcal{R}$ de l'espace, pour toutes les valeurs finies de y' et de z'. Soient $A(x_0, y_0, z_0)$ et $B(x_1, y_1, z_1)$ deux points quelconques de $\mathcal{R}$, et Γ une courbe joignant ces deux points, située *à l'intérieur* de $\mathcal{R}$, et représentée par les deux

équations $y = f(x)$, $z = f_1(x)$, où f et f_1 appartiennent à la classe (I) dans l'intervalle (x_0, x_1). A toute courbe Γ de cette espèce correspond une valeur finie de l'intégrale

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f_1(x), f'(x), f'_1(x)]\, dx = \int_\Gamma F(x, y, z, y', z')\, dx,$$

et l'on peut encore se proposer de déterminer la courbe Γ de façon que la valeur de J soit plus grande ou plus petite pour cette courbe que pour toute autre courbe de même espèce infiniment voisine de la première, située dans $\mathcal{R}$, et joignant les deux points A et B. Pour poser analytiquement le problème d'une façon précise, il suffit d'étendre à l'espace ce qui a été dit plus haut (n° 620) pour le problème dans le plan; nous n'y reviendrons pas. Soit $y = f(x)$, $z = f(x)$ un système de fonctions de classe (I) fournissant un extremum de l'intégrale J; soient, d'autre part, $\eta(x)$, $\eta_1(x)$ deux fonctions quelconques de classe (I) s'annulant pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$. Il est clair que l'intégrale obtenue en remplaçant y par $f(x) + \alpha\eta(x)$, z par $f_1(x) + \alpha\eta_1(x)$, est une fonction de α

$$J(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \alpha\,\eta(x), \ldots, f'_1(x) + \alpha\,\eta'_1(x)]\, dx$$

qui doit être maximum ou minimum pour $\alpha = 0$, quelles que soient les fonctions $\eta(x)$, $\eta_1(x)$, pourvu qu'elles vérifient les conditions énoncées. La formule classique de différentiation donne

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial z}\eta_1(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x) + \frac{\partial F}{\partial z'}\eta'_1(x)\right] dx,$$

qui devient, en intégrant par parties les deux derniers termes, et tenant compte des conditions aux limites pour η et η_1,

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left\{\eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] + \eta_1(x)\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\right\} dx.$$

D'après le lemme fondamental du n° 619, δJ ne peut être nul pour toutes les formes possibles des fonctions η, η_1, que si f et f_1 sont deux intégrales des deux équations simultanées, analogues à l'équation d'Euler,

$$(9) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0.$$

Nous dirons encore que tout système de solutions de ces deux équations définit une courbe extrémale dans l'espace. En les développant, elles s'écrivent

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial z'}z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial y'}z' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial z'}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z'}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial z'}z' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Si le déterminant $\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial z'}\right)^2$ n'est pas nul identiquement, ces deux équations peuvent être résolues par rapport à y'' et à z'', ce qui conduit à un système d'équations du second ordre de forme normale

$$(12)\qquad y'' = \varphi(x, y, z, y', z'), \qquad z'' = \varphi_1(x, y, z, y', z').$$

Par tout point de $\mathcal{R}$, il passe donc une infinité de courbes extrémales, mais il n'en passe qu'une en général ayant en ce point une tangente déterminée, pourvu que la valeur correspondante de Δ ne soit pas nulle. Si Δ ne peut s'annuler dans la région $\mathcal{R}$, pour des valeurs finies de y' et de z', le problème est dit *régulier*.

L'intégrale générale du système (12) dépend de quatre constantes arbitraires dont on peut disposer, tout au moins si les points A et B sont assez rapprochés, de façon que l'extrémale passe par ces deux points, mais on ne pourrait se proposer de trouver une extrémale passant par ces deux points, et tangente en A à une direction déterminée.

On peut faire, sur le système (9), des remarques analogues à celles qui ont été faites à propos de l'équation d'Euler.

Si l'une des variables x, y, z ne figure pas dans F, le système admet, suivant les cas, l'une des intégrales premières

$$(13)\qquad F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\frac{\partial F}{\partial z'} = C, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = C, \qquad \frac{\partial F}{\partial z'} = C.$$

Pour que les équations (10) et (11) se réduisent à des identités, F doit être de la forme $P + Qy' + Rz'$, P, Q, R étant des fonctions de x, y, z qui vérifient les conditions d'intégrabilité (I, n° 155).

Exemple. — Soit $F = \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{z}}$; en supposant qu'on ait pris pour axe des z une verticale dirigée vers le bas, cette expression de F convient au problème général de la brachistochrone. La fonction F ne renfermant

ni x, ni y, le système (9) admet deux intégrales premières

$$y' = C_1 \sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}, \qquad 1 = C_2 \sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2},$$

d'où l'on tire

$$y' = \frac{C_1}{C_2}, \qquad y = \frac{C_1}{C_2}x + C_3.$$

Les courbes extrémales sont donc situées dans des plans verticaux; on a vu plus haut que ces courbes étaient des cycloïdes.

Nous laisserons de côté le cas où Δ est identiquement nul; on étudiera plus loin (nos 645 et suiv.) un cas important où les deux équations (10) et (11) ne sont pas distinctes.

624. **Cas où F renferme des dérivées d'ordre supérieur.** — On peut calculer de la même façon la première variation des intégrales où la fonction à intégrer renferme les dérivées des fonctions inconnues jusqu'à un ordre quelconque. Soit, pour préciser, $F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]$ une fonction continue, et admettant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $n+2$, pour toutes les valeurs finies de $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ et pour toutes les positions du point (x, y) dans une région $\mathcal{R}$ du plan. Nous dirons, pour abréger, qu'une fonction $f(x)$, continue et admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n dans l'intervalle (x_0, x_1) est de classe $(I)^n$ dans cet intervalle. Si la courbe correspondante Γ est dans la région $\mathcal{R}$, l'intégrale définie

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)]\,dx = \int_\Gamma F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]\,dx$$

a une valeur finie, et l'on peut encore se proposer de trouver, parmi toutes les courbes de cette espèce situées à l'intérieur de $\mathcal{R}$ et joignant deux points A et B de cette région, celles pour lesquelles l'intégrale J est plus grande ou plus petite que la même intégrale, étendue à toutes les courbes infiniment voisines de la même classe. Soit $y = f(x)$ une fonction de classe $(I)^n$ satisfaisant à cette condition; l'intégrale définie

$$J(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \alpha\eta(x), \ldots, f^{(n)}(x) + \alpha\eta^{(n)}(x)]\,dx$$

doit être maximum ou minimum pour $\alpha = 0$, quelle que soit la fonction $\eta(x)$ de classe $(I)^n$, pourvu qu'on ait $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Or, on a

$$J'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\eta^{(n)}(x)\right] dx,$$

$y, y', \ldots, y^{(n)}$ étant mis à la place de $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$. Admettons que la fonction cherchée $f(x)$ ait des dérivées continues jusqu'à l'ordre $2n$; on peut alors appliquer la formule d'intégration par partie

généralisée (I, n° 87) à chaque terme tel que $\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\eta^{(p)}(x)$, ce qui donne

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\eta^{(p)}(x)\,dx$$
$$= \left\{ \frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\eta^{(p-1)}(x) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\right]\eta^{(p-2)}(x) + \ldots \pm \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\right]\eta(x) \right\}_{x_0}^{x_1}$$
$$\pm \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^p}{dx^p}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\right]\eta(x)\,dx,$$

et l'on obtient finalement pour $J'(0)$ une expression de la forme

$$(14)\quad J'(0) = [F_0(x)\eta(x) + F_1\eta'(x) + \ldots + F_{n-1}\eta^{(n-1)}(x)]_{x_0}^{x_1}$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right] \right\} dx,$$

$F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ renfermant x, y, et les dérivées de y jusqu'à l'ordre $2n-1$ au plus.

Si l'on prend pour $\eta(x)$ une expression de la forme considérée au n° 619, nulle en dehors d'un intervalle (ξ_0, ξ_1), intérieur à l'intervalle (x_0, x_1), le terme tout intégré est nul aux deux limites, et l'on en conclut encore que la fonction cherchée $f(x)$ doit être une intégrale de l'équation différentielle

$$(15)\qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right] = 0.$$

Nous appellerons encore *fonction extrémale* toute intégrale de cette équation, et *courbe extrémale* la courbe correspondante. L'équation (15) étant en général d'ordre $2n$, les extrémales dépendent de $2n$ constantes arbitraires. Une extrémale n'est donc pas déterminée par deux points A et B, mais les valeurs de $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ n'étant assujetties à aucune condition pour $x = x_0$ et $x = x_1$, les valeurs de $\eta'(x), \eta''(x), \ldots, \eta^{(n-1)}(x)$ peuvent être choisies arbitrairement aux deux limites. Pour que $J'(0)$ soit nul, quelles que soient ces valeurs, il faut, d'après l'expression générale de $J'(0)$, que les valeurs de $f(x)$ et de ses $2n-1$ premières dérivées pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$ vérifient les relations

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_{n-1} = 0.$$

En ajoutant ces $2n-2$ relations à celles qui expriment que l'extrémale passe par les points A et B, on a en tout $2n$ relations pour déterminer les $2n$ constantes dont dépend l'extrémale.

On pourrait aussi se poser un problème un peu différent en cherchant les fonctions de classe $(I)^n$ qui donnent un extremum de l'intégrale J,

parmi celles qui sont assujetties à prendre des valeurs données à l'avance, ainsi que leurs $n-1$ premières dérivées, pour $x = x_0$ et $x = x_1$. La fonction $\eta(x)$ doit alors être nulle, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, aux deux limites, et il suffit que $f(x)$ soit une extrémale pour que $J'(0)$ soit nul. Les $2n$ constantes dont dépend l'extrémale sont déterminées par les $2n$ conditions aux limites auxquelles doit satisfaire $f(x)$.

On pourrait se proposer plusieurs autres problèmes du même genre en se donnant, outre $f(x_0)$ et $f(x_1)$, les valeurs de quelques-unes des dérivées d'ordre inférieur à n pour $x = x_0$ ou pour $x = x_1$. La fonction $f(x)$ doit encore être une extrémale pour que $J'(0)$ soit nul, et le nombre des conditions auxquelles doit satisfaire cette extrémale est toujours égal à $2n$. En effet, si l'on se donne la valeur de $f^{(p)}(x_0)$ par exemple, il en résulte une relation entre les $2n$ constantes dont dépend l'extrémale. Si la valeur de $f^{(p)}(x_0)$ est indéterminée, $\eta^{(p)}(x_0)$ peut avoir une valeur quelconque et le coefficient F_p de $\eta^{(p)}(x)$ dans $J'(0)$ doit être nul pour la valeur x_0, ce qui donne bien une relation entre les $2n$ constantes.

Exemple. — Soit à trouver le minimum de l'intégrale $J = \int_0^1 y''^2\,dx$, $y(x)$ étant nul pour $x = 0$ et pour $x = 1$. On a ici

$$J'(0) = 2[y''(x)\eta'(x)]_0^1 + 2\int_0^1 y^{\text{IV}}(x)\eta(x)\,dx.$$

Les extrémales sont des cubiques $y = P_3(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$. Si $y(x)$ n'est assujetti à aucune autre condition, on doit avoir $y''(0) = 0$, $y''(1) = 0$. Les deux points $(0, 0)$ et $(0, 1)$ sont des points d'inflexion et l'extrémale est la ligne droite $y = 0$. Si l'on se donne les valeurs de $y'(0)$ et de $y'(1)$, l'extrémale a pour équation

$$y = x(x-1)[(y'_0 + y'_1)x - y'(0)].$$

Enfin, si l'on se donne seulement la valeur de $y'(1)$, l'origine doit être un point d'inflexion de l'extrémale qui a pour équation

$$y = \frac{y'(1)}{2}(x^3 - x).$$

Dans chacun de ces cas, la fonction $P_3(x)$ fournit bien un minimum absolu de l'intégrale, car si l'on remplace y par $P_3(x) + \alpha\eta(x)$, on a

$$J(\alpha) - J(0) = \alpha^2 \int_0^1 \eta''^2(x)\,dx.$$

625. **Expression générale de la première variation.** — Nous allons reprendre le calcul de la première variation d'une intégrale, avec des hypothèses plus générales. Supposons que, dans l'inté-

grale

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx,$$

y soit remplacée par une fonction de x et d'un nombre quelconque de paramètres α_i, continue et admettant des dérivées continues par rapport à x et à ces paramètres, les limites x_0 et x_1 étant elles-mêmes fonctions de ces paramètres. La valeur de l'intégrale J est aussi une fonction de α_i, dont on se propose de calculer la différentielle totale du premier ordre; cette différentielle totale est appelée *la première variation de l'intégrale* J et on la représente encore par δJ. Le calcul de δJ n'exige que l'application des règles classiques de différentiation sous le signe intégral; pour fixer les idées, nous supposerons tout d'abord qu'il y a un seul paramètre variable α. Soient $x_0 = \varphi_0(\alpha)$, $x_1 = \varphi_1(\alpha)$ les expressions des limites x_0 et x_1 en fonction de α; φ_0 et φ_1 sont des fonctions continues, ayant des dérivées continues dans un certain intervalle, $(0, h)$ par exemple. L'une de ces fonctions ou les deux à la fois peuvent se réduire à des constantes; c'est le cas auquel on s'est borné jusqu'ici. Soit, d'autre part, $y = f(x, \alpha)$ une fonction continue, ainsi que toutes ses dérivées partielles qui figurent dans le calcul suivant, dans le domaine défini par les inégalités $0 \leqq \alpha \leqq h$, $\varphi_0(\alpha) \leqq x \leqq \varphi_1(\alpha)$. Nous supposons, en particulier, qu'on a le droit d'intervertir l'ordre des différentiations dans le calcul des dérivées secondes et, en outre, que le point de coordonnées $[x, f(x, \alpha)]$ reste dans la région $\mathcal{R}$. Enfin, nous poserons $f(x) = f(x, 0)$. Si l'on remplace y par $f(x, \alpha)$, la valeur de J est une fonction $J(\alpha)$ du paramètre α dont la dérivée a pour expression

$$J'(\alpha) = \left[F(x, y, y') \frac{dx}{d\alpha} \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial x} \right) dx.$$

Si la fonction $f(x, \alpha)$ a une dérivée seconde continue par rapport à x, on peut encore appliquer au second terme de l'intégrale la formule d'intégration par parties, et il reste

$$(16)\quad J'(\alpha) = \left[F(x, y, y') \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y'}{\partial F} \right) \right] dx.$$

Le terme tout intégré dans le second membre peut se transformer

comme il suit. Soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) les coordonnées des extrémités variables de la ligne d'intégration; ces coordonnées sont des fonctions du paramètre α qui ont pour expressions

$$x_0 = \varphi_0(\alpha), \qquad y_0 = f(x_0, \alpha), \qquad x_1 = \varphi_1(\alpha), \qquad y_1 = f(x_1, \alpha).$$

On a, par conséquent,

$$\frac{dy_0}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{dx_0}{d\alpha} + \frac{\partial f(x_0, \alpha)}{\partial \alpha} = y'_0\frac{dx_0}{d\alpha} + \frac{\partial f(x_0, \alpha)}{\partial \alpha},$$

y'_0 étant le coefficient angulaire de la tangente en A à la courbe d'intégration. On a une formule toute pareille pour $\frac{dy_1}{d\alpha}$, et l'on en déduit

$$\frac{\partial f(x_0, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{dy_0}{d\alpha} - y'_0\frac{dx_0}{d\alpha}, \qquad \frac{\partial f(x_1, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{dy_1}{d\alpha} - y'_2\frac{dx_1}{d\alpha},$$

y'_1 étant le coefficient angulaire de la tangente en B à la courbe d'intégration. Le terme tout intégré dans $J'(\alpha)$ est donc égal à

$$F(x_1, y_1, y'_1)\frac{dx_1}{d\alpha} + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1\left(\frac{dy_1}{d\alpha} - y'_1\frac{dx_1}{d\alpha}\right)$$
$$- F(x_0, y_0, y'_0)\frac{dx_0}{d\alpha} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0\left(\frac{dy_0}{d\alpha} - y'_0\frac{dx_0}{d\alpha}\right);$$

en multipliant les deux membres de la formule (16) par $\delta\alpha$, on obtient l'expression générale de la première variation δJ

$$(17) \quad \delta J = \left[F(x_1, y_1, y'_1) - y'_1\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1\right]\delta x_1$$
$$- \left[F(x_0, y_0, y'_0) - y'_0\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0\right]\delta x_0$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1\delta y_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0\delta y_0 + \int_{x_0}^{x_1}\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx.$$

Dans cette formule δy est la différentielle $\frac{\partial f}{\partial \alpha}\delta\alpha$ de la fonction $f(x, \alpha)$ elle-même, δx_0, δy_0, δx_1, δy_1 désignent les différentielles des coordonnées des extrémités A et B du chemin d'intégration; la signification de $\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0$ et de $\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1$ n'a pas besoin d'être expliquée. On peut aussi écrire la formule (18) sous forme abrégée

$$(18) \quad \delta J = \left[\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx;$$

on a $J'(0)$ en divisant les deux membres par α, et faisant tendre α vers zéro; mais, si $f(x, \alpha)$ n'est définie que pour les valeurs positives de α, $J'(0)$ est la limite du quotient $\frac{J(\alpha)-J(0)}{\alpha}$ lorsque α tend vers zéro *par valeurs positives* seulement.

Le second membre de la formule (18) étant linéaire par rapport à δy, δx_0, δy_0, δx_1, δy_1, il est clair qu'elle s'étend au cas où x_0, x_1 et y sont des fonctions d'un nombre quelconque de paramètres. On remarquera que les termes en dehors du signe d'intégration ne dépendent que des déplacements infiniment petits des extrémités de l'arc d'intégration et du coefficient angulaire de la tangente à la courbe d'intégration en ces deux points.

Par un calcul tout pareil au précédent, on obtient pour la première variation de l'intégrale $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$, la formule

(19) $$\delta J = \left[\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z'}\delta z\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx + \int_{x_0}^{x_1}\delta z\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]dx,$$

où (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) sont les coordonnées des extrémités de l'arc d'intégration. Si la fonction F renferme des dérivées d'ordre supérieur, une suite d'intégrations par parties permet encore de mettre δJ sous la forme d'une somme d'un terme tout intégré et d'une intégrale définie. Nous nous bornerons au cas particulier précédent.

En général, l'expression de δJ renferme une intégrale définie. Pour que cette intégrale disparaisse, il faut et il suffit que la courbe obtenue en donnant aux paramètres, dont dépend la courbe d'intégration, les valeurs particulières considérées, soit une courbe extrémale. Il en sera certainement ainsi si l'on étudie la variation de J le long d'un arc de courbe extrémale qu'on fait varier d'une manière continue et, par suite, *la première variation δJ de l'intégrale prise le long d'un arc d'extrémale s'exprime uniquement au moyen des déplacements infiniment petits des extrémités de l'arc.*

Ce théorème, fondamental dans le calcul des variations, comprend comme cas particuliers un grand nombre de résultats connus. Par exemple, si $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$, les extrémales sont des droites et la formule (19) est identique à celle qui exprime la différentielle d'un segment de droite (I, n° 84).

Remarque. — Si F est de la forme $P(x, y) + Q(x, y)$, la formule (18) se réduit à

$$(20) \qquad \delta J = (P\,\delta x + Q\,\delta y)_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \delta y \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx,$$

et le terme tout intégré ne dépend pas de la direction de la tangente à l'arc d'intégration aux points A et B. Il s'ensuit que la formule (20) est applicable à un chemin d'intégration présentant un nombre quelconque de points anguleux ; il suffit de décomposer le chemin d'intégration en plusieurs arcs n'ayant pas de points anguleux, d'appliquer la formule (20) à chacun d'eux et d'ajouter les résultats.

Lorsque la condition d'intégrabilité $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ est vérifiée, la formule se simplifie encore et l'on a $\delta J = (P\,\delta x + Q\,\delta y)_{x_0}^{x_1}$, ce qui est bien d'accord avec les résultats connus (I, n° 152). Ces remarques s'étendent à la formule (19), si F est de la forme $P(x, y, z) + Q(x, y, z)y' + R(x, y, z,)z'$.

626. **Application au cas des extrémités variables. Tranversales.** — Reprenons le problème traité au n° 621, en supposant maintenant que les extrémités de la courbe d'intégration sont variables. Soient C_0, C_1 deux courbes intérieures à la région $\mathcal{R}$ et Γ une courbe de classe (I), située dans $\mathcal{R}$, joignant un point A de C_0 à un point B de C_1. On se propose de déterminer cette courbe Γ de façon que la valeur de l'intégrale $J = \int_\Gamma F(x, y, y')\,dx$ soit plus grande ou plus petite que pour toute autre courbe de même espèce infiniment voisine joignant un point de C_0 à un point de C_1. Il est évident, tout d'abord, que la courbe Γ doit être une extrémale, car la variation δJ de l'intégrale doit être nulle quand on fait varier le chemin d'intégration sans changer les extrémités. Cette condition étant supposée remplie, imaginons qu'on déforme l'arc d'intégration d'une façon continue à partir de la position initiale AB, l'origine A restant fixe, de façon que B se déplace sur C_1. On aura, pour ce déplacement infiniment petit, d'après la formule géné-

rale (18) qui donne δI,

$$\delta I = [F(x_1, y_1, y'_1) - y'_1 F'_{y'}(x_1, y_1, y'_1)]\, \delta x_1 + F'_{y'}(x_1, y_1, y'_1)\, \delta y_1,$$

(x_1, y_1) étant les coordonnées du point B, y'_1 le coefficient angulaire de la tangente en B à l'extrémale; δx_1, δy_1 les différentielles relatives à un déplacement de B sur C_1. Pour que l'arc AB fournisse un extremum de l'intégrale, δI doit être nul, et l'on a une autre condition nécessaire pour l'extremum

$$(21) \quad [F(x_1, y_1, y'_1) - y'_1 F'_{y'}(x_1, y_1, y'_1)]\, \delta x_1 + F'_{y'}(x_1, y_1, y'_1)\, \delta y_1 = 0.$$

De même, en laissant fixe le point B, et en faisant décrire au point A la courbe C_0, on obtient une nouvelle condition nécessaire

$$(22) \quad [F(x_0, y_0, y'_0) - y'_0 F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0)]\, \delta x_0 + F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0)\, \delta y_0 = 0,$$

(x_0, y_0) étant les coordonnées du point A, y'_0 le coefficient angulaire de la tangente en A à l'extrémale, δx_0, δy_0 les paramètres directeurs de la tangente en A à la courbe C_0.

En résumé, *pour que la courbe* AB *fournisse un extremum de l'intégrale* J, *il faut :* 1° *que cette courbe soit une extrémale;* 2° *qu'aux points* A *et* B *les relations* (21) *et* (22) *soient vérifiées.*

Le problème est déterminé, puisqu'on a deux relations pour trouver les valeurs des deux constantes arbitraires dont dépendent les extrémales.

Si l'un des points A ou B est fixe, la relation correspondante (21) ou (22) doit être remplacée par celle qui exprime que l'extrémale passe par ce point. Si la courbe C_0, par exemple, se réduit à une parallèle à l'axe des y, on a $\delta x_0 = 0$, et la condition (22) se réduit à $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) = 0$, condition qu'on pourrait aussi déduire de la formule (3)' du n° 621, en observant que, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, la valeur de y reste indéterminée pour $x = x_0$, et que, par suite, $\eta(x_0)$ est arbitraire.

Soient, d'une façon générale, (x, y) les coordonnées d'un point M d'une extrémale Γ, y' le coefficient angulaire de la tangente en ce point; δx, δy les paramètres directeurs de la tangente à une autre courbe quelconque C passant par ce point. Nous dirons, avec M. Kneser, que l'extrémale *coupe transversalement* en M la courbe C, si x, y, y', δx, δy vérifient la relation

$$(23) \quad [F(x, y, y') - y' F'_{y'}(x, y, y')]\, \delta x + F'_{y'}(x, y, y')\, \delta y = 0.$$

Avec cette convention, on peut dire que les conditions (21) et (22) expriment que *l'extrémale* AB, *pour fournir un extremum, doit couper transversalement les courbes* C_0, C_1, *aux points* A *et* B *respectivement*.

Dans le cas particulier où F est de la forme $g(x, y)\sqrt{1+y'^2}$, la condition (23) devient $g(\delta x + y'\delta y) = 0$; elle exprime que les tangentes aux courbes C et Γ sont orthogonales, en tout point où $g(x, y)$ n'est pas nul, et c'est le seul cas où il en est ainsi. Si $g(x, y) = 1$, les extrémales sont des lignes droites et nous retrouvons ce résultat bien connu que les lignes qui donnent un extremum pour la distance de deux points pris sur les courbes C_0 et C_1 respectivement sont des normales communes aux deux courbes. On sait, d'ailleurs, que toutes ces normales ne donnent pas une solution du problème, et ceci nous montre que les conditions obtenues ne sont pas suffisantes, dans le cas général, pour que l'arc AB fournisse un extremum de l'intégrale J.

La relation (23) étant linéaire en δx, δy, toutes les courbes C qui sont coupées transversalement par une extrémale donnée en un point donné ont la même tangente en ce point. Étant donnée une famille d'extrémales Γ, dépendant d'un paramètre arbitraire a, telle qu'il en passe une par tout point d'une région R du plan, il existe une famille de courbes C qui sont coupées transversalement en chacun de leurs points par l'extrémale de la famille considérée qui passe par ce point. En effet, le coefficient angulaire y' de la tangente à l'extrémale qui passe au point (x, y) est une fonction de x, y, et la condition (23) nous fournit une équation différentielle du premier ordre $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$ pour définir les courbes C. Nous dirons que ces courbes C forment *une famille de courbes transversales*.

Inversement, toute courbe C, qui n'est pas une extrémale, appartient à une famille de transversales. En effet, de chaque point M de C, il part une extrémale Γ, qui coupe transversalement C en ce point. [Il peut même y en avoir plusieurs si l'équation (23) a plusieurs racines en y', mais on associera les racines qui varient d'une manière continue quand M se déplace sur C.] Les extrémales ainsi obtenues dépendent bien d'un paramètre, et elles sont transversales à la courbe C. Les autres transversales de

la même famille s'obtiennent en partant de C par la construction suivante. Sur l'extrémale issue du point M et transversale à C, prenons un point M' tel que l'intégrale $J = \int_{(MM')} F(x, y, y')\,dx$ ait une valeur donnée K. Lorsque M décrit une courbe C, M' décrit une courbe C', l'une ou l'autre des deux courbes pouvant se réduire à un point; d'après la construction même, la première variation δJ de l'intégrale le long de MM' est nulle, et cet arc MM' est transversal à C en M. D'après la formule générale (18) qui donne δJ, il doit aussi être transversal à C'. En faisant varier la constante K, on obtient la famille de transversales dont C fait partie. Nous signalerons seulement cette importante proposition, qui généralise les propriétés bien connues des courbes parallèles; on y reviendra plus loin.

Cherchons de même les courbes Γ de l'espace qui fournissent un extremum de l'intégrale $J = \int_{(\Gamma)} F(x, y, z, y', z')\,dx$, les extrémités A et B de la courbe Γ étant assujetties à rester sur deux surfaces données Σ_0, Σ_1. Il est évident tout d'abord que Γ doit être une extrémale. En laissant fixe une des extrémités A ou B, et faisant mouvoir l'autre sur la surface correspondante, les différentielles relatives à un déplacement infiniment petit sur cette surface doivent vérifier une relation qu'on obtient en égalant à zéro la première variation δI donnée par la formule (19). Soient, d'une façon générale, (x, y, z) les coordonnées d'un point M d'une extrémale Γ, y' et z' les valeurs des dérivées en ce point, Σ une surface quelconque passant par le point M et

$$P(X - x) + Q(Y - y) + R(Z - z) = 0$$

l'équation du plan tangent à Σ en M. Nous dirons que l'extrémale Γ coupe transversalement la surface Σ en M, si l'on a les relations

$$\frac{F(x, y, z, y', z') - y'F'_{y'} - z'F'_{z'}}{P} = \frac{F'_{y'}}{Q} = \frac{F'_{z'}}{R}. \tag{24}$$

En écrivant qu'on a identiquement $\delta J = 0$ lorsque, le point A restant fixe, le point B se déplace sur Σ_1 dans une direction arbitraire, on obtient précisément les conditions qui expriment que l'extrémale AB est transversale en B à la surface Σ_1, et l'on aurait

une condition toute pareille pour le point A. Donc, *l'extrémale* AB *doit couper transversalement les surfaces* Σ_0 *et* Σ_1 *aux points* A *et* B *respectivement.*

On a encore quatre conditions pour déterminer les quatre constantes dont dépendent les extrémales. Si F est de la forme

$$g(x, y, z)\sqrt{1+y'^2+z'^2},$$

les conditions (24) expriment que l'extrémale Γ est orthogonale à Σ.

Les conditions (24) étant linéaires en P, Q, R, la direction de la tangente à l'extrémale en un point M détermine la position du plan tangent à Σ, de sorte que toutes les surfaces qui sont coupées transversalement par une extrémale déterminée en un même point ont même plan tangent en ce point. Il s'ensuit qu'étant donnée une congruence de courbes extrémales, telle qu'il en passe une par tout point d'une région R de l'espace, il n'existe pas toujours de famille de surfaces Σ, qui soient coupées transversalement par ces extrémales (II, n° 440), de même qu'une congruence de droites n'est pas toujours formée des normales à une surface. Mais une surface quelconque Σ fait toujours partie d'une famille de surfaces transversales, qui se déduisent de Σ par la même construction que dans le cas du plan. Par chaque point M de Σ passe une extrémale Γ qui est transversale à cette surface; prenons sur cette extrémale un point M′ tel que l'intégrale $\int_{MM'} F(x, y, z, y', z')\,dx$ ait une valeur constante K. Lorsque le point M décrit Σ, les extrémales Σ engendrent une congruence, et le point M′ décrit une surface Σ′ qui est coupée transversalement par toutes ces extrémales.

Remarque. — Chacune des surfaces Σ_0, Σ_1 peut se réduire à une courbe ou à un point. Si Σ_0, par exemple, se réduit à une courbe C_0, les deux conditions de transversalité doivent être remplacées par deux autres conditions, dont l'une exprime que l'extrémale cherchée rencontre C_0, la seconde s'exprimant par la relation

$$[F(x_0, y_0, z_0; y'_0, z'_0) - y'_0 F'_{y'} - z'_0 F'_{z'}]\,\delta x_0 + F'_{y'}\,\delta y_0 + F'_{z'}\,\delta z_0 = 0,$$

δx_0, δy_0, δz_0 étant les paramètres directeurs de la tangente à C_0 au point A. Lorsque Σ_0 se réduit à un point, l'extrémale doit passer par ce point.

627. **Problèmes d'extremum lié.** — Dans tous les problèmes précédents, les fonctions inconnues doivent vérifier certaines conditions où figurent

seulement les valeurs aux limites. Dans d'autres problèmes, dits *problèmes d'extremum lié*, les fonctions inconnues doivent, au contraire, vérifier des relations où figurent toutes les valeurs de ces fonctions dans l'intervalle d'intégration. Quelques-uns de ces problèmes se ramènent aux problèmes dont il a été question jusqu'ici ou *problèmes d'extremum libre*. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver une courbe Γ donnant un extremum de l'intégrale $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$, parmi toutes les courbes situées sur une surface S, qui joignent deux points donnés de cette surface. On peut imaginer qu'on ait tiré de l'équation de la surface z en fonction de x et de y, et l'on est ramené au premier problème examiné au n° 621. Les questions de ce genre ne diffèrent donc pas essentiellement des problèmes d'extremum libre, mais il peut être commode de les traiter directement, par une méthode analogue à celle des multiplicateurs de Lagrange, pour une question de maximum ou de minimum ordinaire (I, n° 52). Nous prendrons pour exemple le problème de la ligne la plus courte entre deux points d'une surface. Soient A et B deux points donnés d'une surface S; toute courbe Γ de S joignant ces deux points, et n'ayant pas de points anguleux, est représentée par un système de trois équations

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t),$$

f_1, f_2, f_3 étant des fonctions de classe (I) qui vérifient l'équation de la surface $G(x, y, z) = 0$, et l'on peut toujours choisir le paramètre t de façon que les extrémités A et B correspondent aux valeurs 0 et 1 du paramètre. De plus, ces fonctions doivent prendre des valeurs données pour $t = 0$ et $t = 1$. Parmi tous les systèmes de fonctions qui satisfont à ces conditions, il s'agit de trouver celui pour lequel l'intégrale

$$J = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

est minimum, x', y', z' désignant les dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Remplaçons x, y, z par des fonctions $\varphi_1(t, \alpha)$, $\varphi_2(t, \alpha)$, $\varphi_3(t, \alpha)$, satisfaisant aux mêmes conditions que f_1, f_2, f_3, quel que soit le paramètre α, et se réduisant, pour $\alpha = 0$, aux fonctions f_1, f_2, f_3. L'intégrale J devient, après cette substitution, une fonction $J(\alpha)$ du paramètre dont la dérivée J', pour $\alpha = 0$, prend la forme, après les mêmes transformations qu'au n° 625,

$$J'(0) = -\int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\right)\eta_1 + \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\right)\eta_2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\right)\eta_3 \right\} dt,$$

η_1, η_2, η_3 étant des fonctions de t de classe (I), qui représentent respective

ment les valeurs de $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha}$ pour $\alpha = 0$. Ces fonctions sont nulles pour $t = 0$, $t = 1$, mais ne sont pas indépendantes dans l'intervalle, car elles doivent vérifier la relation

$$\frac{\partial G}{\partial x}\eta_1 + \frac{\partial G}{\partial y}\eta_2 + \frac{\partial G}{\partial z}\eta_3 = 0, \tag{25}$$

dont la signification est évidente, en tout point de la courbe Γ. Pour que la relation $J'(0) = 0$ soit une conséquence de la condition (25), il faut et il suffit [1] qu'on ait

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)}{\frac{\partial G}{\partial x}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)}{\frac{\partial G}{\partial y}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}}. \tag{26}$$

Ces conditions expriment que *la normale à la surface* S *coïncide avec la normale principale à* Γ (I, n° 229), car les rapports $\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$, $\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$, $\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$ sont précisément les cosinus directeurs

---

[1] Soient, d'une façon générale, F_1, F_2, F_3 des fonctions continues données de t dans l'intervalle (t_0, t_1), η_1, η_2, η_3 des fonctions de classe (I) dans cet intervalle, nulles pour $t = t_0$, $t = t_1$, et vérifiant une relation linéaire

$$\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \eta_3 f_3 = 0, \tag{A}$$

où f_1, f_2, f_3 sont des fonctions continues de t. Si, pour tous ces systèmes de fonctions η_i, on a aussi $\int_{t_0}^{t_1}(\eta_1 F_1 + \eta_2 F_2 + \eta_3 F_3)\,dt = 0$, on en conclut qu'on a

$$\frac{F_1}{f_1} = \frac{F_2}{f_2} = \frac{F_3}{f_3} \tag{B}$$

pour toute valeur de t dans l'intervalle (t_0, t_1). On satisfait, en effet, à la condition (A) en posant

$$\eta_1 = \lambda_3 f_2 - \lambda_2 f_3, \qquad \eta_2 = \lambda_1 f_3 - \lambda_3 f_1, \qquad \eta_3 = \lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2,$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des fonctions quelconques de classe (I), nulles pour $t = 0$, $t = 1$.

L'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1}[\lambda_1(F_2 f_3 - f_2 F_3) + \lambda_2(F_3 f_1 - f_3 F_1) + \lambda_3(F_1 f_2 - f_1 F_2)]\,dt$$

devant être nulle pour toutes les formes possibles des fonctions λ_i, on en conclut les relations (B).

de la tangente. La courbe cherchée est une *ligne géodésique* (*voir* plus loin, n° 651).

628. **Problèmes isopérimétriques.** — Les problèmes du type suivant, appelés *problèmes isopérimétriques*, ne peuvent être traités de la même façon. Soit à trouver, parmi les courbes Γ de classe (I), situées dans la région $\mathcal{R}$, et joignant deux points $A(x_0, y_0)$ et $B(x_1, y_1)$ de cette région, pour lesquelles l'intégrale

$$J_1 = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx$$

a une valeur donnée C, celles qui fournissent un extremum relatif de l'intégrale

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y'(\,dx.$$

En raisonnant comme au n° 621, supposons que la fonction $y = f(x)$ réponde à toutes ces conditions; soient, d'autre part, $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ deux fonctions de classe (I) dans l'intervalle (x_0, x_1) nulles aux deux limites. Si l'on remplace, dans $F(x, y, y')$, y par $f(x) + \alpha_1\eta_1(x) + \alpha_2\eta_2(x)$, α_1 et α_2 étant deux paramètres arbitraires, l'intégrale J devient une fonction de ces paramètres

$$(27) \qquad J(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_0}^{x_1} F\left[\begin{matrix} x, f(x) + \alpha_1\eta_1(x) + \alpha_2\eta_2(x), \\ f'(x) + \alpha_1\eta'_1(x) + \alpha_2\eta'_2(x) \end{matrix}\right] dx.$$

En effectuant la même substitution dans $G(x, y, y')$, l'intégrale J_1 devient une fonction de α_1, α_2; en écrivant que cette fonction est égale à la constante C, on établit une relation entre les deux paramètres α_1, α_2,

$$(28) \quad J_1(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_2}^{x_1} G[x, f(x) + \alpha_1\eta_1(x) + \alpha_2\eta_2(x), f'(x) + \ldots]\,dx = C.$$

La fonction $J(\alpha_1, \alpha_2)$ des deux paramètres α_1, α_2, liés par la relation (28), doit être maximum ou minimum pour les valeurs $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Il faut pour cela qu'on ait (I, n° 52)

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}\right)_0 \left(\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2}\right)_0 - \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_2}\right)_0 \left(\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\right)_0 = 0.$$

En transformant les expressions des dérivées $\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}\right)_0$, ..., comme au n° 621, cette relation peut encore s'écrire

$$\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \eta_1(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] dx}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \eta_1(x)\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right] dx} = \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \eta_2(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] dx}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \eta_2(x)\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right] dx}.$$

Les fonctions η_1, η_2 étant indépendantes l'une de l'autre, la valeur commune de ces rapports doit être une constante K indépendante de la forme de la fonction $\eta(x)$ et, par suite, on a, pour toutes les formes possibles de la fonction $\eta(x)$, nulle pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$, et de la classe (I) dans l'intervalle (x_0, x_1),

$$(29) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left\{ \frac{\partial(\mathrm{F}-\mathrm{KG})}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial(\mathrm{F}-\mathrm{KG})}{\partial y'}\right] \right\} dx = 0.$$

La fonction cherchée $f(x)$ est donc une intégrale de l'équation différentielle

$$(30) \qquad \frac{\partial(\mathrm{F}-\mathrm{KG})}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial(\mathrm{F}-\mathrm{KG})}{\partial y'}\right] = 0,$$

où figure une constante inconnue K. Les intégrales de cette équation, c'est-à-dire les extrémales du problème, dépendent de trois constantes, K et les deux constantes introduites par l'intégration. C est le nombre nécessaire pour qu'on puisse se proposer de trouver une extrémale passant par les deux points A et B et pour laquelle l'intégrale J_1 prend la valeur donnée C. Le problème est donc déterminé en général. On peut remarquer que, quand on échange les deux fonctions F et G, l'équation différentielle du problème ne change pas, car cela revient à remplacer la constante K par $\frac{1}{\mathrm{K}}$. C'est la généralisation d'un fait bien connu pour les problèmes ordinaires de maximum ou de minimum.

Prenons, par exemple, le problème isopérimétrique proprement dit, qui a donné son nom à cette catégorie de problèmes. Soit à trouver un arc de courbe de longueur donnée S, joignant deux points A et B et limitant avec le segment AB une aire d'étendue maximum. Prenons pour axe des x la droite AB et admettons qu'il existe une courbe Γ répondant à la question et représentée par une équation de la forme $y = f(x)$, où $f(x)$ est de classe (I). On a, dans ce cas,

$$\mathrm{F} = y, \qquad \mathrm{G} = \sqrt{1+y'^2}, \qquad \mathrm{F} - \mathrm{KG} = y - \mathrm{K}\sqrt{1+y'^2}.$$

L'équation différentielle (30) admet l'intégrale première (n° 621),

$$y - \mathrm{K}\sqrt{1+y'^2} + \frac{\mathrm{K}y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y\sqrt{1+y'^2} - \mathrm{K}}{\sqrt{1+y'^2}} = \mathrm{C},$$

d'où l'on tire facilement l'intégrale générale

$$(x - \mathrm{C}')^2 + (y - \mathrm{C})^2 = \mathrm{K}^2.$$

Les extrémales sont donc des circonférences et l'on est ramené à construire un arc de circonférence de longueur S passant par les deux points A et B. Ce problème admet une solution et une seule, pourvu que S soit

supérieur à la distance l des deux points A et B et inférieur à πl, du moins si l'on se borne aux courbes de classe (I) (*cf.* n° 645, 651).

629. **Première variation d'une intégrale double.** — Soit $F(x, y, z, p, q)$ une fonction des cinq variables indépendantes x, y, z, p, q, continue ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à celles du troisième ordre, lorsque le point (x, y, z) reste dans une région $\mathcal{R}$ de l'espace, et pour tout système de valeurs finies de p et de q. Considérons une courbe fermée Γ, située dans $\mathcal{R}$, dont la projection sur le plan des xy est une courbe fermée sans point double C. Soit $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface S située dans la région $\mathcal{R}$; pour que cette surface S passe par la courbe Γ, il faut et il suffit que la fonction $f(x, y)$ soit assujettie à prendre une succession de valeurs données, lorsque le point (x, y) décrit la courbe C. Si en outre cette fonction est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, lorsque le point (x, y) décrit la région A du plan des xy, limitée par la courbe C, et sur cette courbe elle-même, nous dirons que la fonction $f(x, y)$, et la surface S, sont de la classe (I) dans A. Remplaçons dans F les variables z, p, q par $f(x, y)$, f'_x et f'_y respectivement; le résultat est une fonction continue dans A, et l'intégrale double

$$(31) \qquad J = \int\int_{(A)} F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

a une valeur finie pour toute surface S de classe (I). On peut se proposer pour cette intégrale double un problème absolument analogue à celui que nous avons étudié pour les courbes, en cherchant si, parmi les surfaces S de classe (I), passant par la courbe Γ, et situées dans $\mathcal{R}$, il en existe une pour laquelle l'intégrale (31) a une valeur plus petite que pour toute autre surface satisfaisant aux mêmes conditions.

Désignons d'une manière générale par $\eta(x, y)$ une fonction de classe (I) dans A, et s'annulant tout le long de la courbe C. Si $z = f(x, y)$ est l'équation d'une surface de classe (I) passant par Γ, l'équation

$$z = f(x, y) + \alpha\, \eta(x, y)$$

est l'équation d'un faisceau de surfaces passant par Γ, et la fonction

$$J(\alpha) = \int\int_{(A)} F[x, y, f(x, y) + \alpha\, \eta(x, y), f'_x + \alpha\eta'_x, f'_y + \alpha\eta'_y]\, dx\, dy$$

du paramètre α doit être minima pour $\alpha = 0$, quelle que soit la forme de la fonction $\eta(x, y)$. Il faut donc que la première variation δJ soit nulle. La formule habituelle de différentiation sous le signe intégral, qui s'étend sans difficulté aux intégrales doubles, donne

$$(32) \qquad \delta J = \alpha \int\int_{(A)} \left[\frac{\partial F}{\partial z}\, \eta(x, y) + \frac{\partial F}{\partial p}\, \eta'_x + \frac{\partial F}{\partial q}\, \eta'_y\right] dx\, dy,$$

z, p, q devant être remplacées par $f(x, y)$, f'_x, f'_y respectivement après la différentiation. Supposons que la fonction $f(x, y)$ admette des dérivées partielles du second ordre, continues à l'intérieur de C; la formule de Green nous donne alors (I, n° 126)

$$\int_{(C)} \eta(x, y) \frac{\partial F}{\partial p} dy = \int\int_{(A)} \left[\eta'_x \frac{\partial F}{\partial p} + \eta(x, y) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right] dx\, dy,$$

et puisque la fonction $\eta(x, y)$ est nulle tout le long de C, on peut remplacer l'intégrale double de $\eta'_x \dfrac{\partial F}{\partial p}$ par l'intégrale double du produit

$$\eta(x, y) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right),$$

changée de signe. En opérant de même avec la dernière intégrale double de la formule (32), on voit qu'on a encore

$$(33) \qquad \delta J = \alpha \int\int_{(A)} \eta(x, y) \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] dx\, dy.$$

Pour que δJ soit nul, pour toutes les formes possibles de la fonction $\eta(x, y)$, il faut et il suffit que le coefficient de $\eta(x, y)$ sous le signe intégral soit nul. En effet, supposons par exemple ce coefficient positif dans le voisinage d'un point (a, b) intérieur au contour C; soit ρ un nombre positif assez petit pour que le cercle C_ρ de rayon ρ, décrit du point (a, b) comme centre, soit à l'intérieur de C, et que le coefficient de $\eta(x, y)$ soit lui-même positif à l'intérieur de C_ρ. Si l'on prend pour $\eta(x, y)$ la fonction définie de la manière suivante : 1° $\eta = 0$, à l'extérieur de C_ρ; 2° à l'intérieur de C_ρ,

$$\eta(x, y) = [(x - a)^2 + (y - b)^2 - \rho^2]^2;$$

il est évident que δJ sera positif. Pour que la fonction $f(x, y)$ donne un minimum de l'intégrale J, il faut donc que cette fonction $f(x, y)$ soit une intégrale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(34) \qquad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0,$$

analogue à l'équation d'Euler (5).

Nous sommes ainsi conduit à résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation (34) et le contour C, c'est-à-dire à trouver une intégrale de cette équation, continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, prenant une suite de valeurs données sur ce contour. La méthode par laquelle on a obtenu l'équation (34) n'est du reste que l'extension de la méthode de Riemann pour établir le principe de Dirichlet (n° 512).

Exemple. — La recherche de la surface d'aire minima, passant par un

contour donné, conduit à chercher le minimum de l'intégrale double

$$\int\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

L'équation aux dérivées partielles correspondante est

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0$$

ou, en développant,

(38) $$r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs=0.$$

Cette équation exprime que la somme des rayons de courbure principaux est nulle. Les surfaces intégrales sont les surfaces à courbure moyenne nulle, ou *surfaces minima*.

Remarque. — On a supposé, pour passer de l'équation (32) à l'équation (33), que la fonction inconnue $f(x, y)$ avait des dérivées continues du second ordre. L'objection de Du Bois-Reymond ne peut être levée comme au n° 621 (voir *Exercices*, p. 656).

II. — SECONDE VARIATION. CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR L'EXTREMUM.

Toute extrémale ne donne pas nécessairement un maximum ou un minimum d'une intégrale J, comme on l'a déjà observé à plusieurs reprises. Cette extrémale doit satisfaire à d'autres conditions, dont les plus simples s'obtiennent en exprimant que la seconde variation a un signe constant. Nous établirons ces conditions pour le premier problème traité au n° 621, et, pour ne pas interrompre la suite des raisonnements, nous présenterons d'abord une remarque qui sera souvent utile.

630. Remarque préliminaire. — Soit $y=\varphi(x)$ une fonction continue dans un intervalle (x_0, x_1), dont la dérivée $\varphi'(x)$ présente dans cet intervalle un nombre *fini* de discontinuités de première espèce (I, n° 9). La courbe Γ' représentée par l'équation $y=\varphi(x)$ présente un certain nombre de points anguleux, mais aucune des tangentes n'est parallèle à l'axe des y. Nous dirons pour abréger que la fonction $\varphi(x)$ et la courbe Γ' sont de classe (I). Si la courbe Γ' est située dans la région $\mathcal{R}$ qui a été

définie plus haut (n° 620), l'intégrale

$$J' = \int_{x_0}^{x_1} F[x, \varphi(x), \varphi'(x)]\, dx = \int_{\Gamma'} F(x, y, y')\, dx,$$

c'est-à-dire la somme des intégrales dans chaque intervalle partiel où $\varphi'(x)$ est continue, a une valeur finie. Cela posé, nous allons montrer qu'*il est possible de trouver une fonction $f(x)$ de classe* (I), *prenant les mêmes valeurs que $\varphi(x)$ pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$, et telle que l'intégrale*

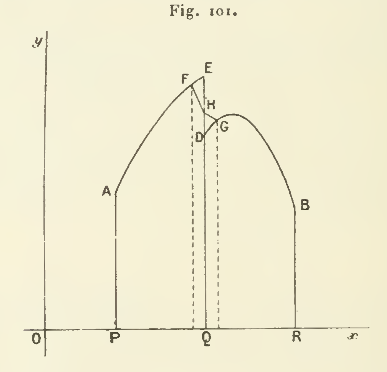
$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\, dx$$

diffère de J' d'aussi peu qu'on le voudra.

En d'autres termes, on peut trouver une autre courbe Γ, sans points anguleux, ayant les mêmes extrémités que Γ', située dans le domaine $\mathcal{R}$, et telle que la différence des valeurs des intégrales le long des courbes Γ et Γ' soit moindre en valeur absolue que tout nombre positif donné ε.

Supposons, pour fixer les idées, que $\varphi'(x)$ ait un seul point de

Fig. 101.



discontinuité c entre x_0 et x_1. La courbe qui représente la variation de $\varphi'(x)$ se compose de deux arcs de courbe AE, DB, qui ne se rejoignent pas. Soient h un nombre positif tel que $c - h$ et $c + h$ soient compris entre x_0 et x_1, F et G les deux points de cette

courbe d'abscisses $c-h$ et $c+h$; joignons-les par une ligne brisée FHG, ayant un sommet H sur ED, le point H étant choisi de telle façon qu'en désignant par $\pi(x)$ l'ordonnée de cette ligne brisée on ait

$$\int_{c-h}^{c+h} \pi(x)\,dx = \int_{c-h}^{c} \varphi'(x)\,dx + \int_{c}^{c+h} \varphi'(x)\,dx,$$

il suffit pour cela de prendre sur DE le point H d'ordonnée

$$(36)\quad \xi = \frac{1}{h}\left[\int_{c-h}^{c} \varphi'(x)\,dx + \int_{c}^{c+h} \varphi'(x)\,dx\right] - \frac{\varphi'(c-h)+\varphi'(c+h)}{2}.$$

Le point H étant choisi de cette façon, soit $\psi(x)$ une fonction auxiliaire qui coïncide avec $\varphi'(x)$ dans les intervalles $(x_0, c-h)$, $(c+h, x_1)$ et avec $\pi(x)$ dans l'intervalle $(c-h, c+h)$. Cette fonction est continue, et la fonction

$$f(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx$$

qui est continue et admet une dérivée continue, entre (x_0 et x_1), coïncide avec $\varphi(x)$ dans les intervalles $(x_0, c-h)$, $(c+h, x_1)$.

La courbe Γ, représentée par l'équation $y=f(x)$ se déduit de Γ' en remplaçant la portion comprise entre les deux points d'abscisses $c-h$ et $c+h$, où se trouve le point anguleux, par deux arcs de parabole qui se raccordent en un point d'abscisse c, et dont chacun est tangent à Γ' à l'autre extrémité. Pourvu que le nombre h soit assez petit, *les ordonnées des deux courbes* Γ *et* Γ' *diffèrent d'aussi peu qu'on le veut dans l'intervalle* $(c-h, c+h)$. En effet, d'après la formule (36), ξ tend vers $\frac{\varphi'(c-0)+\varphi'(c+0)}{2}$ lorsque h tend vers zéro. Si $\varphi'(x)$ reste compris entre deux nombres P et Q lorsque x varie de x_0 à x_1, ξ sera lui-même compris entre ces deux nombres si h est assez petit et il en sera de même de $\pi(x)$ dans l'intervalle $(c-h, c+h)$. Or, on a, dans cet intervalle,

$$f(x) - \varphi(x) = \int_{c-h}^{x} \pi(x)\,dx - [\varphi(x) - \varphi(c-h)]$$

et chacun des deux termes de cette différence peut être rendu

moindre que tout nombre donné. Il s'ensuit qu'on peut aussi supposer la courbe Γ dans le domaine $\mathcal{R}$. Cela posé, soit M une limite supérieure de $|F(x, y, y')|$ lorsque le point (x, y) reste dans le domaine $\mathcal{R}$, et que y' reste compris entre P et Q. Il est clair que la différence entre les valeurs de l'intégrale $\int F(x, y, y')\,dx$ le long des courbes Γ et Γ' est inférieure en valeur absolue à $4Mh$, et il suffira de prendre h tel qu'on ait $4Mh < \varepsilon$ pour que cette différence soit inférieure à ε. Le raisonnement serait le même pour une courbe ayant p points anguleux. En particulier, si l'intégrale J' n'est pas nulle pour une fonction $\varphi'(x)$ de classe (II), on peut trouver une fonction $f(x)$ de classe (I), prenant les mêmes valeurs que $\varphi(x)$ aux deux extrémités de l'intervalle, pour laquelle l'intégrale J aura le même signe que J'.

Une autre conséquence est la suivante. Soient Γ et Γ' deux courbes ayant les mêmes extrémités, situées dans $\mathcal{R}$, et de classe (I) et (II) respectivement. Si l'intégrale J' le long de Γ' est plus petite que l'intégrale J le long de Γ, la courbe Γ ne peut fournir un *minimum absolu* pour l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$, même si l'on se borne aux courbes de classe (I). Si dans tout voisinage de Γ on peut trouver une courbe Γ' de classe (II) telle que l'intégrale J' le long de Γ' soit inférieure à J, la courbe Γ ne peut pas non plus fournir un *minimum relatif*.

631. **Condition de Legendre.** — Soit $y = f(x)$ une solution de l'équation d'Euler, appartenant à la classe (I) dans l'intervalle (x_0, x_1). Si dans l'intégrale $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ on remplace y par $f(x) + \alpha\eta(x)$, on a vu que la première variation δJ était nulle pour toutes les formes possibles de la fonction $\eta(x)$ de classe (I), s'annulant pour les deux valeurs x_0 et x_1. Pour que cette extrémale donne un extremum de l'intégrale J, il faut, en outre, que la seconde variation $\delta^2 J$ ait le même signe pour toutes les formes possibles de la fonction $\eta(x)$. Nous établirons des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\delta^2 J$ soit positive, ce qui correspond à un minimum.

En appliquant de nouveau la formule de différentiation sous

le signe intégral à l'intégrale (3), il vient

$$(37)\qquad \delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} [P\,\eta^2(x) + 2Q\,\eta(x)\eta'(x) - R\,\eta'^2(x)]\,dx.$$

P, Q, R désignant les fonctions de x qu'on obtient en remplaçant y par $f(x)$ et y' par $f'(x)$ dans les dérivées partielles F''_{y^2}, $F''_{yy'}$, $F''_{y'^2}$. D'après les hypothèses qui ont été faites, ces trois fonctions P, Q, R sont continues dans l'intervalle (x_0, x_1). Legendre transforme cette expression de $\delta_2 J$ comme il suit. Soit $w(x)$ une fonction de la classe (I) dans l'intervalle (x_0, x_1); on a, quelle que soit cette fonction,

$$\int_{x_0}^{x_1} (2\eta\eta' w + \eta^2 w')\,dx = [\eta^2 w]_{x_0}^{x_1} = 0,$$

puisque $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, et l'on peut encore écrire l'expression de $\delta^2 J$

$$(38)\qquad \delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} [(P + w')\eta^2 + 2(Q + w)\eta\eta' + R\eta'^2]\,dx.$$

Choisissons maintenant la fonction w de façon que le coefficient de dx soit un carré parfait, c'est-à-dire de façon qu'on ait

$$(39)\qquad (Q + w)^2 - R(P + w') = 0,$$

il vient enfin

$$(40)\qquad \delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} R\left(\eta' + \frac{Q + w}{R}\eta\right)^2 dx.$$

et l'on voit que le signe de R doit jouer un rôle important dans la discussion.

Nous déduirons d'abord de cette expression de $\delta^2 J$ une condition nécessaire obtenue par Legendre : *Pour que la seconde variation* $\delta^2 J$ *soit positive ou nulle pour toutes les formes possibles de la fonction* $\eta(x)$, *il est nécessaire que* $R(x)$, *ne soit négatif pour aucune valeur de x dans l'intervalle* (x_0, x_1).

Supposons, en effet, qu'on ait $R(c) < 0$, c étant compris entre x_0 et x_1; on peut prendre un nombre positif h assez petit pour que $R(x)$ soit négatif pour $c - h \leq x \leq c + h$. L'équation (6) montre que la dérivée seconde $f''(x)$ est continue dans l'intervalle $(c - h, c + a)$, et, par suite, les fonctions P, Q, R

admettent aussi des dérivées continues dans le même intervalle. On peut donc appliquer à l'équation différentielle (39) le théorème général de Cauchy (II, nos 388, 391), et l'on en conclut qu'elle admet une infinité d'intégrales continues dans le voisinage de la valeur $x = c$. Soit $w(x)$ une de ces intégrales, et soit (ξ_0, ξ_1) un intervalle comprenant c et assez petit pour que $R(x)$ soit négatif et $w(x)$ continu dans tout cet intervalle $(x_0 < \xi_0 < c < \xi_1 < x_1)$. Considérons la fonction $\eta(x)$ définie de la manière suivante :

$$1^\circ \quad \eta(x) = 0 \qquad \text{pour } x_0 \leqq x \leqq \xi_0;$$

$$2^\circ \quad \eta(x) = (x-\xi_0)^2(x-\xi_1)^2 e^{-\int_c^x \frac{Q+w}{R}dx} \qquad \text{pour } \xi_0 \leqq x \leqq \xi_1;$$

$$3^\circ \quad \eta(x) = 0 \qquad \text{pour } \xi_1 \leqq x \leqq x_1.$$

On voit facilement que la valeur correspondante de $\delta^2 J$ est du signe de $R(x)$ dans l'intervalle (ξ_0, ξ_1), c'est-à-dire négative. La condition de Legendre est donc nécessaire, et l'on doit avoir $R(x) \overline{\geqq} 0$ dans tout l'intervalle (x_0, x_1). Laissant de côté le cas où l'équation $R(x) = 0$ aurait des racines dans cet intervalle [1], nous supposerons désormais qu'on a

$$(41) \qquad R(x) > 0 \qquad \text{pour } x_0 \leqq x \leqq x_1.$$

Il semble évident, d'après la formule (40), que la seconde variation $\delta^2 J$ est positive ou nulle pour toutes les formes possibles de la fonction $\eta(x)$, lorsque la condition de Legendre est remplie. Mais il est à remarquer que la transformation effectuée sur $\delta^2 J$ n'est applicable que si la fonction $w(x)$ est continue dans l'intervalle (x_0, x_1). Il faut donc être assuré que l'équation différentielle (39) admet une intégrale continue dans tout cet intervalle pour que la conclusion soit légitime.

Remarquons que l'intégrale $f(x)$ peut être prolongée dans un intervalle (X_0, x_0), X_0 étant $< x_0$, puisque $R(x_0)$ n'est pas nul. Cette intégrale peut de même être prolongée dans un intervalle

---

[1] Si $R(x)$ est nul dans tout l'intervalle (x_0, x_1), on tire de l'équation (39) $w = -Q$, et la seconde variation a pour expression

$$\delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} (P - Q')\eta^2\, dx.$$

Pour que $\delta^2 J$ ait un signe constant, il faut et il suffit que $P - Q'$ conserve le même signe dans tout l'intervalle. La remarque s'applique par exemple au cas où F est de la forme $F = ay'^2 + 2byy'$; il y a une seule extrémale $y = 0$.

(x_1, X_1), X_1 étant $> x_1$. Les fonctions P, Q, R sont continues et admettent des dérivées continues dans l'intervalle (X_0, X_1), et l'on peut supposer aussi $R(x) > 0$ dans cet intervalle.

632. **Condition de Jacobi.** — L'équation (39) est une équation de Riccati; on peut donc la ramener à une équation linéaire du second ordre (II, n° 402). Posons d'abord $Q + w = -Rz$; l'équation (39) est remplacée par une équation de même forme

$$z' + z^2 + \frac{R'}{R} z + \frac{Q' - P}{R} = 0, \tag{42}$$

dont l'intégrale générale est comme on l'a vu (II, p. 426) $z = \frac{u'}{u}$, u étant l'intégrale générale de l'équation linéaire introduite par Jacobi, qui n'est autre que l'équation d'Euler correspondant à la fonction $F = Pu^2 + 2Quu' + Ru'^2$,

$$\Psi(u) = u'' + \frac{R'}{R} u' + \frac{Q'' - P}{R} u = 0. \tag{43}$$

L'intégrale générale de l'équation (39) est donc

$$w = -Q - R\frac{u'}{u}. \tag{44}$$

Toutes les intégrales de l'équation de Jacobi sont continues dans l'intervalle (x_0, x_1) et, pour que l'équation (39) admette une intégrale w continue dans cet intervalle, il faut et il suffit que l'équation (43) admette une intégrale $u(x)$ ne s'annulant pas dans ce même intervalle.

Cette condition est suffisante pour que la seconde variation $\delta^2 J$ soit positive pour toutes les formes possibles de la fonction $\eta(x)$.

En effet, soit $u(x)$ une intégrale particulière de l'équation de Jacobi ne s'annulant pas pour $x_0 \leq x \leq x_1$. Prenons pour $w(x)$ la fonction correspondante (44); l'expression (40) de $\delta^2 J$ devient [1]

$$\delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{R(\eta' u - \eta u')^2}{u^2} dx. \tag{45}$$

---

[1] Ce résultat s'explique aisément en observant que si w est une intégrale de l'équation (39), on a identiquement, φ étant une fonction continue,

$$\int_{x_0}^{x_1} (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2)dx = \int_{x_0}^{x_1} R(\eta' - \varphi\eta)^2 dx.$$

Il s'ensuit que toute solution de l'équation linéaire $\eta' = \varphi\eta$ doit annuler la pre-

Il est clair que $\delta^2 J$ ne peut être négatif; pour que $\delta^2 J$ fût nul, il faudrait qu'on ait $\eta' u - u'\eta = 0$ en tous les points de l'intervalle (x_0, x_1), ou $\eta = Cu$, ce qui est impossible puisque $\eta(x)$ est nul aux deux limites de l'intervalle, tandis que $u(x)$ ne l'est pas. En définitive, *la seconde variation* $\delta^2 J$ *est positive, pour toutes les formes possibles de la fonction* $\eta(x)$, *si l'équation de Jacobi* (43) *a une intégrale qui ne s'annule pas dans l'intervalle* (x_0, x_1), *les limites comprises.*

Cette condition peut se transformer en appliquant les théorèmes de Sturm sur les équations linéaires (II, p. 425, note). Soit $u_1(x)$ une intégrale de l'équation de Jacobi s'annulant pour $x = x_0$. Cette intégrale peut avoir d'autres zéros dans l'intervalle (x_0, X_1); soit x'_0 la racine la plus rapprochée de x_0, comprise entre x_0 et X_1. Nous poserons $x'_0 = X_1$, si $u_1(x)$ ne s'annule pas entre x_0 et X_1. Cela posé, *pour que l'équation de Jacobi admette une intégrale particulière ne s'annulant pas pour* $x_0 \leqq x \leqq x_1$, *il faut et il suffit qu'on ait* $x_1 < x'_0$.

La condition est *nécessaire*. En effet, si l'on a $x'_0 < x_1$, toute intégrale de l'équation (43) a une racine comprise entre x_0 et x'_0, et cette racine est forcément comprise entre x_0 et x_1.

La condition est *suffisante* [1]. Supposons, en effet, $x_1 < x'_0$, et soit x_2 un nombre compris entre x_1 et x'_0 $(x_1 < x_2 < x'_0)$. L'intégrale $u_2(x)$ qui est nulle pour $x = x_2$ ne peut s'annuler entre x_0 et x_1, puisque, dans ce cas, $u_1(x)$ devrait s'annuler aussi entre x_0 et x'_0; elle ne s'annule pas non plus pour $x = x_0$, puisqu'elle est distincte de $u_1(x)$. Nous laissons de côté le cas où $x_1 = x'_0$ dont la discussion est un peu plus délicate.

En résumé, *lorsque les deux conditions de Legendre et de Jacobi sont vérifiées à la fois :* 1° $R(x) > 0$ *pour* $x_0 \leqq x \leqq x_1$; 2° $x_1 < x'_0$; *la seconde variation* $\delta^2 J$ *est positive pour toutes les formes possibles de la fonction* $\eta(x)$.

---

mière variation de l'intégrale du premier membre, c'est-à-dire être une solution de l'équation de Jacobi; φ est donc la dérivée logarithmique d'une intégrale de cette équation (*cf.* n° 102).

[1] On pourrait aussi raisonner par continuité sans supposer connu le théorème de Sturm. Si la première racine de $u_1(x)$ supérieure à x_0 est au delà de x_1, prenons une intégrale s'annulant en un point voisin $x_0 - h$ $(h > 0)$. Si h est assez petit, la première racine supérieure à x_0 sera aussi supérieure à x_1.

On a démontré plus haut que la condition de Legendre était une condition nécessaire pour que $\delta^2 J$ soit toujours positif. Il nous reste à prouver que la condition de Jacobi est aussi une condition *nécessaire*. Il suffit pour cela de montrer que si l'on a $x'_0 < x_1$, on peut trouver une fonction $\eta(x)$ de classe (II) dans l'intervalle (x_0, x_1), s'annulant pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$, et telle que l'expression (37) correspondante soit négative (n° 630). On obtient une telle fonction par la méthode de *Darboux-Erdman*. Appelons toujours $u_1(x)$ une intégrale de l'équation (43) admettant les zéros x_0 et x'_0, et soit $v(x)$ une autre intégrale s'annulant pour une valeur x_2 comprise entre x'_0 et x_1, qui n'est pas un zéro de $u_1(x)$. La différence $u_1 - v$ a aussi un zéro c entre x_0 et x'_0. Cela étant, soit $\eta(x)$ une fonction continue définie de la manière suivante : 1° $\eta(x) = u_1(x)$ pour $x_0 \leqq x \leqq c$; 2° $\eta(x) = v(x)$ pour $c \leqq x \leqq x_2$; 3° $\eta(x) = 0$ pour $x_2 \leqq x \leqq x_1$. Cette fonction est de classe (II), car la dérivée $\eta'(x)$ est discontinue aux deux points $x = c$, $x = x_2$.

Dans tout intervalle (ξ_1, ξ_2) où $\eta(x)$ est continue, ainsi que sa dérivée, on a, d'après une intégration par parties facile,

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2)\,dx = [\eta(Q\eta + R\eta')]_{\xi_1}^{\xi_2} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} R\eta\,\Psi(\eta)\,dx.$$

et le second membre se réduit au terme tout intégré lorsque $\eta(x)$ est une intégrale de l'équation de Jacobi. Appliquons la formule précédente à chacun des intervalles (x_0, c), (c, x_2), (x_2, x_1) en prenant pour $\eta(x)$ la fonction qui a été définie tout à l'heure. Il vient ainsi

$$(46)\qquad \int_{x_0}^{x_1} (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2)\,dx$$
$$= [u_1(x)(Qu_1 + Ru'_1)]_{x_0}^{c} + [v(Qv + Rv')]_{c}^{x_2}.$$

et, comme $u_1(c) = v(c)$, le second membre se réduit à

$$R(c)[u'_1(c)v(c) - v'(c)u_1(c)].$$

Mais on déduit de l'équation (43) elle-même la relation

$$u'_1(x)v(x) - v'(x)u_1(x) = \frac{K}{R(x)},$$

le facteur K étant constant et, par suite, l'intégrale définie (46) a

le signe de K. Or, ce facteur K est égal à $-u_1(x_2)v'(x_2)\,R(x_2)$, et l'on peut choisir arbitrairement le signe de $v'(x_2)$ puisque $v(x)$ est l'une quelconque des intégrales qui admettent x_2 pour zéro. La variation seconde $\delta^2 J$ peut donc être rendue négative par un choix convenable de $\eta(x)$.

Ainsi, *les conditions de Legendre et de Jacobi sont à la fois nécessaires et suffisantes pour assurer le signe de la variation seconde dans l'intervalle* (x_0, x_1).

Nous prendrons ces conditions au sens *strict*, et nous laisserons de côté l'étude du cas où $R(x)$ s'annulerait sans changer de signe entre x_0 et x_1, et du cas où l'on aurait $x'_0 = x_1$.

633. Interprétation géométrique. Foyers conjugués. — L'équation linéaire (43) se présente aussi quand on cherche les solutions de l'équation d'Euler (6), infiniment voisines de l'extrémale considérée $y = f(x)$. Si la condition de Legendre est vérifiée, c'est-à-dire si $F''_{y'^2}[x, f(x), f'(x)]$ reste positif, entre x_0 et x_1, on peut diviser tous les termes par le coefficient de y'' et l'équation d'Euler prend la forme

$$y'' = \Phi(x, y, y'), \tag{47}$$

la fonction Φ étant continue et admettant des dérivées partielles continues [d'après les hypothèses faites sur $F(x, y, y')$ au n° 620] lorsque x varie de x_0 à x_1, et que les différences $y - f(x)$, $y' - f'(x)$ restent assez petites en valeur absolue. Nous avons vu (n° 461) que l'équation (47) admet alors une infinité de familles d'intégrales dépendant d'un paramètre arbitraire λ, $y = \varphi(x, \lambda)$, la fonction $\varphi(x, \lambda)$ se réduisant à $f(x)$ pour $\lambda = 0$. De plus, cette fonction est continue et a des dérivées partielles continues φ'_x, φ'_λ, $\varphi''_{\lambda x}$, φ''_{x^2}, lorsque x varie de x_0 à x_1 pourvu que $|\lambda|$ soit inférieur à un nombre positif assez petit λ_0 [1]. La dérivée $\varphi'_\lambda(x, 0)$ satisfait à une équation linéaire du second ordre, qu'on obtient en diffé-

[1] Nous avons raisonné au Chapitre XXIII (n° 462) sur un système de deux équations du premier ordre, mais il est clair que les conclusions s'étendent à l'équation (47) qu'on peut ramener à un système de cette espèce, en posant $y' = z$. Si la fonction F est analytique en y et y', comme c'est le cas dans la plupart des applications, on peut prendre aussi pour $\varphi(x, \lambda)$ une fonction analytique de λ.

rentiant par rapport à λ les deux membres de l'équation (47) où l'on a remplacé y par $\varphi(x, \lambda)$ en faisant ensuite $\lambda = 0$ dans le résultat. Cette équation linéaire est *l'équation aux variations* relative à la solution particulière $y = f(x)$. En appliquant ce calcul à l'équation d'Euler (6), en supposant y remplacé par $\varphi(x, \lambda)$, on obtient pour l'équation aux variations

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial \lambda} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial \lambda}\right\}.$$

Faisons dans cette équation $\lambda = 0$; elle devient, en posant $u = \varphi'_\lambda(x, 0)$,

$$P(x)\,u(x) + Q(x)\,u'(x) = \frac{d}{dx}\{Q(x)\,u(x) + R(x)\,u'(x)\}$$

et nous retrouvons l'équation (43). Cette relation entre les deux équations (6) et (43) nous donne une interprétation géométrique simple de la fonction de Jacobi.

Considérons, en effet, la famille d'extrémales issues du point A et voisines de la première. Elles sont représentées dans tout l'intervalle (x_0, x_1) par une équation $y = \varphi(x, \lambda)$, où $\varphi(x, \lambda)$ satisfait aux conditions que nous venons de rappeler, et où l'on a de plus $\varphi(x_0, \lambda) = f(x_0)$, $\varphi'_x(x_0, \lambda) = \lambda + f'(x_0)$. La première de ces relations montre que $x = x_0$ est une racine de l'équation

(48) $$\varphi'_\lambda(x, 0) = 0;$$

or, les racines de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de l'extrémale $y = f(x)$, qui correspond à la valeur $\lambda = 0$ du paramètre avec l'extrémale infiniment voisine issue du point A, c'est-à-dire des points de contact de cette extrémale Γ avec la courbe enveloppe de cette famille d'extrémales. Une partie de cette enveloppe se réduit au point A lui-même. Les autres points de contact sont appelés *foyers conjugués du point* A. Comme $\varphi'_\lambda(x, 0)$ est précisément une intégrale $u_1(x)$ de l'équation de Jacobi qui s'annule pour $x = x_0$, la racine immédiatement supérieure x'_0 est l'abscisse du premier foyer conjugué A' de A à droite de ce point, et la condition de Jacobi exprime que l'extrémité B *de l'arc d'extrémale* AB *doit être située entre le point* A *et le premier foyer conjugué à droite.*

Il y a réciprocité entre les foyers conjugués, puisque les abscisses de ces points sont les racines d'une même intégrale de l'équation aux variations.

634. **Exemples.** — Reprenons les exemples du n° 622 où F est de la forme $y^{\alpha}\sqrt{1+y'^2}$. La condition de Legendre pour le minimum est toujours satisfaite. Si $y=f(x)$ est l'équation d'un arc d'extrémale passant par les deux points A et B d'abscisses x_0, x_1, $y=\lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ est aussi une fonction extrémale, quelle que soit la constante λ. On aura donc une solution de l'équation aux variations (n° 462) en prenant la dérivée par rapport à λ de cette intégrale (¹), et posant ensuite $\lambda=1$ dans cette dérivée, ce qui donne $u=f(x)-xf'(x)$. Pour que cette intégrale ne s'annule pas entre les limites x_0, x_1, il faut et il suffit qu'on ne puisse mener de l'origine aucune tangente à l'arc d'extrémale AB. Comme on peut prendre pour origine un point quelconque de Ox, on en conclut que *la condition de Jacobi est satisfaite, s'il y a sur l'axe* Ox *des points par lesquels ne passe aucune tangente à l'arc d'extrémale* AB. Il en est toujours ainsi, d'après la forme de la courbe, si α est négatif, comme dans le problème de la brachistochrone.

Si $\alpha>0$, l'arc AB tourne sa convexité vers Ox, et l'on peut transformer la condition comme il suit. Soient A' et B' les points de rencontre de Ox avec les tangentes en A et B à l'extrémale, et T le point de concours de ces tangentes. Si ce point T est au-dessus de Ox, il est clair, d'après le sens de la convexité de AB, que par un point du segment A'B', on ne peut

(¹) D'une façon générale, si l'équation d'Euler admet une transformation infinitésimale (II, n°s 396-397), de toute intégrale $f(x)$ on pourra déduire une intégrale infiniment voisine, et par suite une solution de l'équation aux variations correspondantes. Les exemples suivants se rattachent aux cas classiques d'abaissement de l'ordre d'une équation différentielle.

1° F ne contient pas y : si $f(x)$ est une extrémale, $f(x)+\lambda$ est aussi une intégrale de l'équation d'Euler, quel que soit λ, et par suite $u=1$ est une solution de l'équation aux variations. *La condition de Jacobi est toujours satisfaite.*

2° F ne contient pas x. Si $f(x)$ est une extrémale, $f(x+\lambda)$ est aussi une extrémale, et par suite $f'(x)$ est une solution de l'équation aux variations. La condition de Jacobi est vérifiée, *si, en aucun point de l'arc* AB, *la tangente n'est parallèle à* Ox.

3° Si F est homogène en y et y', le premier membre de l'équation d'Euler est homogène en y, y', y'', et par suite toute intégrale $f(x)$ est solution de l'équation aux variations correspondantes. La condition de Jacobi est vérifiée, *si l'arc d'extrémale ne coupe pas* Ox.

4° Si F est homogène en x et y, le calcul du texte prouve que la condition de Jacobi est vérifiée pour un arc d'extrémale AB, si la tangente en aucun point de cette extrémale ne passe par l'origine. Dans chacun de ces cas, la condition signalée est seulement *suffisante*, mais non *nécessaire*.

mener aucune tangente à cet arc. Au contraire, si le point T est au-dessous de l'axe des x, par tout point du segment $A'B'$ passent deux tangentes à l'arc AB. Ayant pris pour origine un de ces points, l'équation de Jacobi admet une intégrale particulière $f(x) - xf'(x)$ qui a deux zéros entre x_0 et x_1. Toute autre solution a donc au moins un zéro dans cet intervalle. En résumé, *pour que la condition de Jacobi soit satisfaite, il faut et il suffit que les tangentes à l'arc d'extrémale aux points* A *et* B *se coupent au-dessus de* Ox. C'est la généralisation d'une propriété bien connue de la chaînette (LINDELÖF-MOIGNO, *Calcul des variations*). Cette condition est toujours satisfaite si les deux points A et B sont situés du même côté par rapport au point le plus bas de l'extrémale.

L'interprétation géométrique du numéro précédent permet aisément de confirmer ce résultat. Dans le cas où F est de la forme $y^\alpha\sqrt{1+y'^2}$, on a vu (n° 622) que l'intégrale générale de l'équation d'Euler est de la forme

$$\alpha y = f(\alpha x + \beta),$$

α et β étant deux constantes arbitraires. On obtient une famille d'extrémales à un paramètre en établissant une relation entre α et β. Les coordonnées d'un point commun à deux courbes infiniment voisines de la famille vérifient aussi l'équation

$$y = f'(\alpha x + \beta)\left(x + \frac{d\beta}{d\alpha}\right) = y'\left(x + \frac{d\beta}{d\alpha}\right),$$

d'où l'on tire $\frac{y}{y'} - x = \frac{d\beta}{d\alpha}$, ce qui prouve que les tangentes à une extrémale aux points de rencontre avec une extrémale infiniment voisine de la même famille rencontrent l'axe Ox en un même point d'abscisse $-\frac{d\beta}{d\alpha}$. En particulier, si la famille d'extrémales est formée par les extrémales issues d'un point A, on en conclut que *les tangentes à une extrémale en deux foyers conjugués concourent en un point de* Ox (BOLZA).

Si $\alpha < 0$, par un point T de Ox on ne peut mener plus d'une tangente à un arc d'extrémale *situé tout entier au-dessus de* Ox : il n'y a donc jamais sur cet arc deux foyers conjugués, et la condition de Jacobi est toujours satisfaite.

Si $\alpha > 0$, les extrémales tournent leur convexité vers Ox et d'un point de cet axe, on peut mener deux tangentes et deux seulement à une extrémale quelconque. Les points de cette extrémale sont donc deux à deux conjugués, deux foyers conjugués étant toujours séparés par le point le plus bas de l'extrémale. Il est clair aussi, d'après la convexité de la courbe, que, si les tangentes en A et B se coupent au-dessus de Ox, le foyer conjugué de A n'est pas sur l'arc AB, tandis qu'il est sur cet arc si les tangentes se coupent au-dessous de Ox. Lorsqu'il passe deux extrémales par deux points A et B, l'une d'elle touche l'enveloppe des extrémales issues de A entre les points A et B, tandis que l'autre touche cette enve-

loppe, soit au delà du point B, soit en deçà du point A. La condition de Jacobi n'est vérifiée que pour celle-là. Par exemple, dans le cas de la chaînette (*fig.* 100), c'est l'arc de chaînette homothétique de l'arc terminé en M qui satisfait à la condition de Jacobi.

635. **Insuffisance des conditions précédentes.** — Les conditions de Legendre et de Jacobi ne suffisent pas pour assurer le minimum de l'intégrale J. En effet, nous n'avons comparé la valeur de l'intégrale qui correspond à la fonction $y = f(x)$ qu'aux valeurs de la même intégrale correspondant aux fonctions d'une famille

$$y = f(x) + \alpha\,\eta(x),$$

dépendant d'un seul paramètre arbitraire, tandis que, dans le problème tel qu'il a été posé (n° 620), on doit comparer la valeur de J pour $y = f(x)$ à la valeur de J pour l'ensemble des fonctions de la forme $y = f(x) + \omega(x)$, $\omega(x)$ étant une fonction quelconque de la classe (I), assujettie seulement à vérifier les conditions (1). La seule conclusion qu'on puisse déduire de l'étude qui précède est la suivante. Soit $\omega(x)$ une fonction quelconque de classe (I), vérifiant les conditions (1). L'équation

$$y = f(x) + \alpha\,\omega(x)$$

représente un faisceau de courbes Γ qui restent dans la région $\mathcal{R}_\varepsilon$ quand on fait varier α de 0 à 1. Pour $\alpha = 0$, on a la courbe Γ_0 qui a pour équation $y = f(x)$, et pour $\alpha = 1$ la courbe Γ_1 qui a pour équation $y = f(x) + \omega(x)$. La valeur $J(\alpha)$ de l'intégrale J correspondant à la fonction $f(x) + \alpha\omega(x)$ est une fonction de α qui commence par croître lorsqu'on fait varier α à partir de zéro, mais rien ne permet d'affirmer que cette fonction $J(\alpha)$ va constamment en croissant lorsque α croît de 0 à 1, aussi petit que soit le nombre ε qui définit la région $\mathcal{R}_\varepsilon$.

Voici un exemple qui montre bien nettement l'insuffisance des conditions $\delta J = 0$, $\delta^2 J > 0$ pour assurer le minimum. Soit $F = y'^2 + y'^3$; prenons $x_0 = y_0 = 0$, $x_1 = 1$, $y_1 = 0$. Les courbes extrémales sont des droites et la fonction extrémale répondant aux conditions limites est $f(x) = 0$. On peut voir directement que la seconde variation est positive, car on a dans ce cas

$$\delta^2 J = \alpha^2 \int_0^1 2\,\eta'^2\,dx;$$

pour qu'on eût $\delta^2 J = 0$, il faudrait avoir $\eta'(x) = 0$, et par suite $\eta(x) = 0$. Pour la fonction $f(x) = 0$, on a $J = 0$, et nous allons montrer qu'on peut trouver une fonction $\omega(x)$ de classe (I), satisfaisant aux conditions

$$\omega(0) = \omega(1) = 0, \qquad |\omega(x)| < \varepsilon$$

pour $0 < x < 1$, et telle que l'intégrale

$$J_1 = \int_0^1 (\omega'^2 + \omega'^3)\, dx$$

ait une valeur négative. Soit, en effet, α une constante positive inférieure à un. La fonction $\omega(x, \alpha)$ définie de la manière suivante :

$$1^\circ \quad \omega(x, \alpha) = \alpha x \qquad \text{pour } 0 \leqq x < 1 - \frac{2\alpha}{\alpha + 2};$$

$$2^\circ \quad \omega(x, \alpha) = 2(1 - x) - \frac{(\alpha + 2)^2}{4\alpha}(1 - x)^2 \qquad \text{pour } 1 - \frac{2\alpha}{\alpha + 2} \leqq x \leqq 1,$$

est de classe (I) dans l'intervalle (0,1). L'équation

$$y = \omega(x, \alpha)$$

représente une courbe APB formée d'un segment de droite AP issue de l'origine et d'un arc de parabole PB tangent à cette droite en P et tangent

Fig. 102.

en B à la droite de coefficient angulaire -2; cette fonction $\omega(x, \alpha)$ est continue et tend vers zéro avec α, mais sa dérivée $\omega'_x(x, \alpha)$ est discontinue pour $x = 1$, $\alpha = 0$. L'intégrale $J(\alpha) = \int_0^1 (\omega'^2 + \omega'^3)\, dx$ est infiniment petite avec α; mais, à cause de la discontinuité de $\omega'_x(x, \alpha)$, on n'a plus le droit d'appliquer la formule de différentiation habituelle et, par suite, on ne peut pas affirmer que $J'(0) = 0$. Nous allons vérifier au contraire que $J(\alpha)$ est un infiniment petit *du premier ordre*. D'une part, l'intégrale le long de AP est un infiniment petit du second ordre $(\alpha^2 + \alpha^3)\left(1 - \frac{2\alpha}{\alpha + 2}\right)$.

Quant à l'intégrale le long de PB, on peut l'écrire, en posant $x = 1 - \frac{2\alpha}{\alpha + 2} z$,

$$\frac{2\alpha}{\alpha + 2} \int_0^1 \left\{ [(\alpha + 2)z - 2]^2 + [(\alpha + 2)z - 2]^3 \right\} dz$$

et la partie principale est $-\frac{2\alpha}{3}$. On a donc

$$J'(0) = -\frac{2}{3},$$

et $J(\alpha)$ a une valeur négative pour des valeurs de α voisines de zéro. Cet exemple montre bien la nécessité de considérer des variations d'une forme plus générale que celles qui ont été envisagées jusqu'ici [1].

Remarque. — Dans quelques cas simples, les conditions de Legendre et de Jacobi sont suffisantes pour assurer l'extremum. Supposons, par exemple, $F = ay^2 + 2byy' + cy'^2$; l'équation d'Euler est alors linéaire en y, y', y'',

(49) $$c(x)y'' + c'y' + (b' - a)y = 0,$$

et l'équation de Jacobi, qui est indépendante de l'extrémale considérée $f(x)$, est identique à l'équation précédente. La condition de Legendre pour le minimum sera vérifiée si $c(x)$ est positif de x_0 à x_1. La condition de Jacobi le sera aussi si l'équation (49) admet une intégrale $u(x)$ ne s'annulant pas dans cet intervalle. Ces conditions sont suffisantes, car si l'on pose

$$y = f(x) + \alpha\eta(x),$$

on a (nº 632)

$$J(\alpha) - J(0) = \frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1} c(x)\left(\frac{\eta' u - \eta u'}{u}\right)^2 dx,$$

expression essentiellement positive, même si la condition de Legendre n'est vérifiée qu'au sens large. Si $a = b = 0$, $c = 1$, on retrouve un résultat déjà établi directement (I, nº 120).

Prenons encore l'exemple suivant de Weierstrass. Soit à trouver la valeur minimum de l'intégrale $J = \int_{-1}^{+1}(x^2 + \lambda^2)y'^2\,dx$ prise le long d'une courbe Γ de classe (I) joignant les deux points A et B de coordonnées $(-1, a)$ et $(1, b)$. L'équation d'Euler admet l'intégrale première

$$(x^2 + \lambda^2)y' = C$$

et l'intégrale générale est, en supposant $\lambda \neq 0$,

$$y = C_1 + C_2 \operatorname{Arc\,tang}\frac{x}{\lambda}.$$

---

[1] Pour constater l'insuffisance des conditions de Legendre et de Jacobi, il suffit de vérifier que l'intégrale $\int_0^1 (y'^2 + y'^3)\,dx$, le long de la ligne brisée AQB, a une valeur négative si α est assez petit (nº 630). Or cette intégrale a pour valeur $\frac{-4\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha^3}{\alpha + 2}$. Le premier exemple de ce genre est dû à Scheffer (HADAMARD, p. 44-46).

Les constantes C_1 et C_2 étant déterminées par les conditions aux limites, on trouve, pour la fonction cherchée $f(x)$,

$$f(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{Arc\,tang} \frac{x}{\lambda}}{\operatorname{Arc\,tang} \frac{1}{\lambda}}.$$

On voit aisément que les conditions de Legendre et de Jacobi sont vérifiées. En effet, $R = 2(x^2+\lambda^2)$ et l'équation de Jacobi admet l'intégrale $u = 1$ (n° 634, note). La fonction $f(x)$ donne donc un *minimum absolu* de l'intégrale.

Les conclusions sont tout à fait différentes si $\lambda = 0$. L'intégrale générale de l'équation d'Euler est dans ce cas $y = \frac{C_1}{x} + C_2$; il n'existe donc aucune extrémale de la classe (I) joignant les deux points A et B, sauf dans le cas banal où l'on aurait $b = a$. Dans le cas qui nous occupe, la borne inférieure de l'intégrale $J = \int_{-1}^{+1} x^2 y'^2 \, dx$ est égale à zéro; si nous prenons, en effet, pour y la fonction précédente qui fournit le minimum quand λ n'est pas nul, il vient

$$J = \frac{\lambda^2(b-a)^2}{4\left(\operatorname{Arc\,tang} \frac{1}{\lambda}\right)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{x^2 \, dx}{(x^2+\lambda^2)^2};$$

l'intégrale du second membre est plus petite que

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+\lambda^2} = \frac{2}{\lambda} \operatorname{Arc\,tang} \frac{1}{\lambda}.$$

On a donc

$$J < \frac{\lambda(b-a)^2}{2 \operatorname{Arc\,tang} \frac{1}{\lambda}},$$

expression qui tend vers zéro avec λ.

D'un autre côté, il est évident que, quelle que soit la courbe Γ de classe (I) joignant les deux points A et B, la valeur de l'intégrale J prise suivant cette courbe ne peut être nulle. Cet exemple montre bien nettement comment il peut arriver qu'une intégrale n'ait pas de valeur minimum, tout en étant bornée effectivement, et montre l'insuffisance du raisonnement de Riemann et des raisonnements analogues (n° 512).

636. Condition de Weierstrass. La fonction E. — Une nouvelle condition nécessaire pour l'extremum a été obtenue par Weierstrass en comparant la valeur de l'intégrale prise suivant l'arc d'extrémale AB à l'intégrale prise le long d'un chemin infiniment voisin, mais coupant l'arc AB sous un angle différent de zéro. Conser-

vons les mêmes notations et les mêmes hypothèses que dans les paragraphes précédents. Prenons un point P de l'arc AB, de coordonnées (x_2, y_2), et soit $y = f_1(x)$ l'équation d'une courbe C_1 passant au point P, la fonction f_1 étant continue et admettant des dérivées du premier et du deuxième ordre continues dans l'inter-

Fig. 103.

valle $(x_2 - k, x_2 + k)$; soit Q un point de C_1 d'abscisse $x_2 - h$, h étant un nombre positif inférieur à $k\,(x_0 < x_2 - h < x_2 < x_1)$. Posons

$$\omega(x, h) = (x - x_0)\frac{f_1(x_2 - h) - f(x_2 - h)}{x_2 - h - x_0},$$

et considérons l'arc de courbe AQ (*fig.* 103) qui a pour équation

$$y = f(x) + \omega(x, h), \qquad x_0 \leqq x \leqq x_2 - h.$$

Lorsque h tend vers zéro, il est clair que la ligne AQ a pour limite l'arc AP, et l'intégrale $\int_{(\mathrm{AQ})} \mathrm{F}(x, y, y')\,dx$ est une fonction de h, $\mathrm{I}(h)$, dont la dérivée a pour expression, pour $h = 0$,

$$\mathrm{I}'(0) = [y'_2 - f'_1(x_2)]\,\mathrm{F}'_{y'}(x_2, y_2, y'_2) - \mathrm{F}(x_2, y_2, y'_2),$$

d'après la formule générale (18) (n° 625), car l'arc AP est un arc d'extrémale et les coordonnées de l'extrémité variable Q sont

$$x = x_2 - h, \qquad y = f_1(x_2 - h),$$

d'où l'on tire

$$\delta x = -\,\delta h, \qquad \delta y = -f'_1(x_2)\,\delta h;$$

y'_2 représente le coefficient angulaire de la tangente en P à l'extrémale AP. Soit de même $\mathrm{I}_1(h)$ l'intégrale prise le long de l'arc QP

$$\mathrm{I}_1 = \int_{x_2 - h}^{x_2} \mathrm{F}[x, f_1(x), f'_1(x)]\,dx;$$

la dérivée $I'_1(0)$ est évidemment $F[x_2, y_2, f'_1(x_2)]$ et, par suite, en désignant par $J(h)$ l'intégrale $\int_{(AQP)} F(x, y, y')\,dx$, on peut écrire

$$\left(\frac{dJ}{dh}\right)_0 = F(x_2, y_2, p_2) - F(x_2, y_2, y'_2) - (p_2 - y'_2) F'_{y'}(x_2, y_2, y'_2),$$

p_2 étant le coefficient angulaire de la tangente à la courbe C_1. Le second membre de cette formule est une fonction des quatre variables x, y, y', p, qui joue un rôle essentiel dans la théorie de Weierstrass; on la représente par la lettre E,

$$(50)\quad E(x, y; y', p) = F(x, y, p) - F(x, y, y') - (p - y') F'_{y'}(x, y, y')$$

et la formule précédente peut s'écrire

$$(51)\qquad \left(\frac{dJ}{dh}\right)_0 = E(x_2, y_2; y'_2, p_2).$$

De cette relation on déduit aisément une nouvelle condition nécessaire pour le minimum; nous l'appellerons la condition de Weierstrass. *Pour que la courbe considérée* AB *rende l'intégrale* J *minimum, il est nécessaire que la fonction*

$$E[x, f(x); f'(x), p]$$

ne soit négative pour aucune valeur finie de p, lorsque x varie de x_0 à x_1. Nous exprimerons cette condition d'une façon abrégée en disant que la fonction $E(x, y; y', p)$ ne peut devenir négative en aucun point de l'arc AB, pour une valeur finie de p.

En effet, supposons que, pour un point P de l'arc AB, de coordonnées (x_2, y_2), et pour une valeur finie m de p, on ait

$$E(x_2, y_2; y'_2, m) < 0.$$

Prenons pour la courbe C_1 la courbe ayant pour équation

$$y = f(x) + (m - y'_2)(x - x_2),$$

qui est tangente au point P à la droite de coefficient angulaire m. La fonction $J(h)$ considérée tout à l'heure qui correspond à cette forme de la fonction $f_1(x)$ a sa dérivée négative pour $h = 0$. On peut donc trouver un nombre positif l suffisamment petit pour qu'on ait $J(l) < J(0)$ et, par conséquent, on aura un

chemin AQPB (*fig.* 103) tel que la somme des intégrales

$$\int_{(AQ)} F(x, y, y')\,dx + \int_{(QP)} F(x, y, y')\,dx + \int_{(PB)} F(x, y, y')\,dx$$

soit inférieure à la valeur de l'intégrale J le long de l'arc AB de la courbe extrémale. Cela suffit, comme on l'a fait remarquer (n° 630), pour prouver que la courbe AB ne donne pas un minimum de l'intégrale J, même si l'on ne considère que des courbes de classe (I) joignant les deux points A et B et infiniment voisines de l'arc AB.

Nous pouvons donc ajouter aux conditions déjà obtenues la condition suivante : *on doit avoir*

$$(52)\qquad E(x, y;\, y', p) \geqq 0,$$

pour toute valeur finie de p, tout le long de l'arc AB.

Le signe de l'inégalité devra être changé pour le maximum.

Remarque. — On a, d'après la formule de Taylor,

$$(53)\quad E(x, y;\, y', p) = \frac{(p-y')^2}{1.2} F''_{y'^2}[x, y, y' + \theta(p-y')] \qquad (0 < \theta < 1).$$

et il est clair, d'après cela, que la condition de Weierstrass est certainement vérifiée si la dérivée seconde $F''_{y'^2}(x, y, u)$ n'est jamais négative pour un point quelconque de l'arc AB et pour toute valeur finie de u. Mais cette dernière condition n'est pas nécessaire pour que la condition (52) soit satisfaite.

On peut remarquer que la condition de Weierstrass donne la condition de Legendre comme cas particulier. En effet, le rapport $\dfrac{2E(x, y;\, y', p)}{(y'-p)^2}$ a pour limite, d'après la formule (53), $F''_{y'^2}(x, y, y')$ lorsque p tend vers y'. Si la condition (52) est vérifiée pour toute valeur finie de p, on a donc aussi $F''_{y'^2} \geqq 0$ tout le long de l'arc AB.

Pour $F = y'^2 + y'^3$, et pour l'extrémale particulière $y = 0$, on a

$$E = p^2 + p^3 = p^2(p+1),$$

et si l'on prend $p = -2$, E est négatif, ce qui est bien conforme au résultat obtenu directement (n° 635).

La condition de Weierstrass est elle-même insuffisante pour assurer le

minimum, comme le montre l'exemple suivant de M. Bolza. Soit

$$F = ay'^2 - 4byy'^3 + 2bxy'^4,$$

a et b étant des constantes positives. L'équation d'Euler correspondante est

$$y''(2a - 24byy' + 24bxy'^2) = 0,$$

et les lignes droites sont des courbes extrémales. Considérons les deux points A(0, 0) et B(1, 0), la ligne droite $y = 0$ qui joint ces deux points est une courbe extrémale, pour laquelle les conditions de Legendre et de Jacobi sont satisfaites. Il en est de même de la condition de Weierstrass, car la fonction $E(x, y; y', p)$, qui a pour expression

$$E(x, y; y', p) = (y' - p)^2[a - 8byy' + 6bxy'^2 + 4b(xy' - y)p + 2bxp^2],$$

se réduit à $p^2(a + 2bxp^2)$ pour $y = 0$, et reste positive quand x varie de 0 à 1. Cependant cette droite ne donne pas un maximum de J. En effet, si l'on prend l'intégrale le long d'une ligne brisée APB, les coordonnées du point P étant deux nombres positifs h et k, on voit aisément qu'on peut prendre pour h un nombre positif assez petit pour que la valeur de l'intégrale le long de la ligne brisée soit négative, aussi petit que soit k. On en conclut que la droite AB ne peut fournir un minimum (n° 630).

Soit encore $F = \dfrac{1}{1 + y'^2}$; les extrémales sont des droites et la fonction

$$E(x, y; y', p) = \frac{(y' - p)^2(y'^2 - 1 + 2py')}{(1 + p^2)(1 + y'^2)^2}.$$

On voit que E peut changer de signe lorsque p varie, à moins que y' ne soit nul tout le long de l'extrémale, qui est alors un segment de droite parallèle à Ox. Il est évident que cette extrémale fournit un maximum pour l'intégrale; toute autre extrémale ne peut fournir ni maximum, ni minimum.

Quand on multiplie $F(x, y, y')$ par une fonction $g(x, y)$, la fonction $F(x, y; y', p)$ est multipliée par le même facteur. Si donc E peut changer de signe pour un système de valeurs données de x, y, y', il en sera de même de la fonction obtenue en multipliant par g à moins que $g(x, y)$ ne soit nul en ce point. Par exemple, si l'on a $F = \dfrac{g(x, y)}{1 + y'^2}$, les seules extrémales qui puissent satisfaire à la condition de Weierstrass sont des parallèles à Ox, ou des courbes qui vérifient l'équation $g = 0$. Dans le cas particulier où $g(x, y) = x$, la région $\mathcal{R}$ étant la portion du plan à droite de Oy, il est évident que tout segment de parallèle à Ox donne pour l'intégrale une valeur plus grande que toute autre courbe de classe (I) ayant les mêmes extrémités. Ce sont les seules extrémales qui puissent vérifier la condition de Weierstrass et, par conséquent, les seules qui fournissent un extremum.

637. Théorie de Clebsch — La méthode de Jacobi a été étendue par Clebsch au cas d'un nombre quelconque de fonctions inconnues. Nous indiquerons rapidement la suite des raisonnements pour $n = 2$, en insistant surtout sur les différences qui distinguent ce cas du cas déjà traité.

Soient $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ les équations d'une extrémale Γ pour l'intégrale définie $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$; $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions de classe (I) dans un intervalle (X_0, X_1) qui comprend l'intervalle (x_0, x_1). Soient $\eta(x)$, $\zeta(x)$ deux fonctions de cette classe dans le même intervalle. s'annulant pour $x = x_0$, $x = x_1$. En remplaçant y et z par

$$f(x) + \alpha\eta(x), \quad z(x) + \alpha\zeta(x)$$

respectivement sous le signe d'intégration, J devient une fonction $J(\alpha)$ dont la première variation est nulle pour toutes les formes possibles de η, ζ. de la classe considérée, tandis que la variation seconde a pour expression

$$(54)\quad \delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} G(\eta, \zeta, \eta', \zeta')\,dx = \int_{x_0}^{x_1} (A\eta'^2 + 2B\eta'\zeta' + C\zeta'^2 + \ldots)\,dx.$$

$G(\eta, \zeta, \eta', \zeta')$ étant une forme quadratique en η, ζ, η'. ζ' dont les coefficients sont des fonctions de x qu'on obtient en remplaçant, dans les dérivées secondes de F, y, z, y', z' par $f(x)$, $\varphi(x)$, $f'(x)$, $\varphi'(x)$. En généralisant l'artifice de Legendre, nous pouvons écrire $\delta^2 J$ d'une infinité de façons sous la même forme

$$(55)\qquad \delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} [G(\eta, \zeta, \eta', \zeta') + \varphi(\eta, \zeta, \eta', \zeta')]\,dx,$$

en ajoutant à G une autre forme $g = \frac{d}{dx}(\lambda\eta^2 + 2\mu\eta\zeta + \nu\zeta^2)$. où λ, μ, ν sont des fonctions quelconques de classe (I) dans l'intervalle (x_0, x_1). Nous chercherons à déterminer ces fonctions λ, μ, ν, de façon que la nouvelle forme quadratique $G + g$ se réduise à une somme de deux carrés de fonctions linéaires de η, ζ, η', ζ', multipliés par des facteurs ne dépendant que de x. Nous supposerons $B^2 - AC \not\geq 0$; comme g ne renferme pas de termes en η'^2, $\eta'\zeta'$, ζ'^2, on devra avoir. en remplaçant les lettres η et ζ par les lettres u et v respectivement. une identité de la forme

$$(56)\quad \begin{aligned} &G(u, v, u', v') + g(u, v, u', v') \\ &\quad = A(u' - p_1 u - q_1 v)^2 + 2B(u' - p_1 u - q_1 v)(v' - p_2 u - q_2 v) \\ &\qquad + C(v' - p_2 u - q_2 v)^2. \end{aligned}$$

p_1. q_1, p_2, q_2 étant des fonctions de x. D'après la théorie générale des formes quadratiques, pour que $G + g$ puisse être décomposée comme

l'indique la formule (56), il faut et il suffit que les quatre relations

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(G+g)}{\partial u}=0, \qquad \frac{\partial(G+g)}{\partial v}=0,\\ &\frac{\partial(G+g)}{\partial u'}=0, \qquad \frac{\partial(G+g)}{\partial v'}=0 \end{aligned}\right.$$

soient vérifiées identiquement quand on y remplace u' et v' par les expressions

$$(58)\qquad u'=p_1 u+p_1 v, \qquad v'=p_2 u+q_2 v.$$

Si l'on regarde u et v comme des fonctions inconnues, on peut dire encore que les équations (57) doivent admettre toutes les solutions du système (58) et, comme ces équations sont linéaires, il faut et il suffit qu'elles admettent pour intégrales deux systèmes particuliers distincts d'intégrales des équations (58).

On peut évidemment remplacer le système (57) par le système équivalent

$$(57)'\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(G+g)}{\partial u'}=0, \qquad \frac{\partial(G+g)}{\partial v'}=0,\\ &\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial u'}\right)=0, \qquad \frac{\partial G}{\partial v}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial v'}\right)=0, \end{aligned}\right.$$

car, d'après sa définition même, la forme auxiliaire g vérifie les deux conditions

$$\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial u'}\right)=0, \qquad \frac{\partial g}{\partial v}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial v'}\right)=0.$$

Les deux dernières équations du nouveau système (57)' sont deux équations linéaires du second ordre, qu'on obtiendrait encore en cherchant les extrémales infiniment voisines de l'extrémale considérée. Supposons, en effet, que les fonctions $y=f(x,t)$, $z=\varphi(x,t)$ forment un système d'intégrales des équations (9) du n° 623, dépendant d'un paramètre arbitraire t, et se réduisant à $f(x)$ et $\varphi(x)$ respectivement pour $t=0$, les fonctions $f'_t(x,0)$, $\varphi'_t(x,0)$ vérifient deux équations linéaires qui se déduisent des équations (9) par la méthode générale du n° 462. En effectuant les calculs, on vérifie immédiatement que ces deux équations aux variations sont identiques aux deux dernières équations (57)'.

Les coefficients p_1, q_1, p_2, q_2 sont donc déterminés par les relations

$$(59)\qquad \left\{\begin{aligned} &u'_1=p_1 u_1+q_1 v_1, \qquad v'_1=p_2 u_1+q_2 v_1;\\ &u'_2=p_1 u_2+q_1 v_2, \qquad v'_2=p_2 u_2+q_2 v_2; \end{aligned}\right.$$

(u_1, v_1), (u_2, v_2) étant deux systèmes particuliers d'intégrales des équations aux variations

$$(60)\qquad \frac{\partial G}{\partial u}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial u'}\right)=0; \qquad \frac{\partial G}{\partial v}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial v'}\right)=0.$$

Ayant choisi p_1, q_1, p_2, q_2 de cette façon, pour déterminer les coefficients λ, μ, ν de la forme g, il reste à écrire que les deux systèmes de solutions (u_1, v_1) et (u_2, v_2) vérifient les quatre relations

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial G_1}{\partial u'_1}+\frac{\partial g_1}{\partial u'_1}=0, \qquad \frac{\partial G_1}{\partial v'_1}+\frac{\partial g_1}{\partial v'_1}=0,\\ &\frac{\partial G_2}{\partial u'_2}+\frac{\partial g_2}{\partial u'_2}=0, \qquad \frac{\partial G_2}{\partial v'_2}+\frac{\partial g_2}{\partial v'_2}=0,\end{aligned}\right.$$

G_i, g_i désignant les formes G et g où l'on a affecté les lettres u et v de l'indice i. On a ainsi quatre équations linéaires pour déterminer λ, μ, ν, et par suite une condition de possibilité doit être vérifiée. Cette condition, qu'il est aisé d'obtenir en développant $\frac{\partial g_1}{\partial u_1}$, $\frac{\partial g_1}{\partial v'_1}$, ..., prend la forme

$$(62)\qquad u_2\frac{\partial G_1}{\partial u'_1}+v_2\frac{\partial G_1}{\partial v'_1}-u_1\frac{\partial G_2}{\partial u'_2}-v_1\frac{\partial G_2}{\partial v'_2}=0.$$

On obtiendra donc toutes les identités de la forme (56), *en prenant deux systèmes particuliers d'intégrales* (u_1, v_1), (u_2, v_2) *des équations aux variables* (60), *satisfaisant à la condition* (62), *et tels que*

$$D(x)=u_1v_2-u_2v_1$$

ne soit pas identiquement nul, puis en déterminant p_1, q_1, p_2, q_2 *par les relations* (59).

Il est inutile de s'occuper du calcul de λ, μ, ν, car ils disparaissent du résultat final.

Deux systèmes d'intégrales (u_1, v_1), (u_2, v_2) satisfaisant à la condition (62) sont dits *associés*. Il existe une infinité des systèmes associés. On tire, en effet, des équations (60)

$$u_2\frac{\partial G_1}{\partial u_1}+u'_2\frac{\partial G_1}{\partial u'_1}=\frac{d}{dx}\left(u_2\frac{\partial G_1}{\partial u'_1}\right),\qquad v_2\frac{\partial G_1}{\partial v_1}+v'_2\frac{\partial G_1}{\partial v'_1}=\frac{d}{dx}\left(v_2\frac{\partial G_1}{\partial v'_1}\right)$$

et, par suite,

$$\frac{d}{dx}\left\{u_2\frac{\partial G_1}{\partial u'_1}+v_2\frac{\partial G_1}{\partial v'_1}\right\}=u_2\frac{\partial G_1}{\partial u_1}+v_2\frac{\partial G_1}{\partial v_1}+u'_2\frac{\partial G_1}{\partial u'_1}+v'_2\frac{\partial G_1}{\partial v'_1}.$$

Le second membre ne changeant pas quand on permute les indices 1 et 2, d'après les propriétés des formes quadratiques, on a donc

$$\frac{d}{dx}\left\{u_2\frac{\partial G_1}{\partial u'_1}+v_2\frac{\partial G_1}{\partial v'_1}-u_1\frac{\partial G_2}{\partial u'_2}-v_1\frac{\partial G_2}{\partial v'_2}\right\}=0,$$

d'où l'on tire immédiatement une intégrale première du système (60). Pour avoir deux systèmes associés, il suffira donc de prendre les valeurs initiales des intégrales u_1, v_1, u_2, v_2 et de leurs dérivées premières, de façon que la relation (62) soit vérifiée pour une valeur particulière de x.

On satisfait à cette condition de la façon la plus simple en prenant deux systèmes distincts d'intégrales (u_1, v_1), (u_2, v_2), qui soient toutes nulles pour une valeur particulière c de la variable. Le déterminant

$$D_c(x) = u_1 v_2 - v_1 u_2$$

ne peut être identiquement nul quels que soient ces deux systèmes, car la dérivée seconde $D''_c(x)$ est égale à $2(u'_1 v'_2 - v'_1 u'_2)$ pour $x = c$, et il suffira de choisir les valeurs initiales des dérivées pour $x = c$ de façon que $u'_1 v'_2 - u'_2 v'_1$ ne soit pas nul pour cette valeur de x. Soient (u_1, v_1), (u_2, v_2) deux systèmes associés de cette espèce; tous les autres systèmes associés formés d'intégrales nulles pour $x = c$ sont des combinaisons linéaires de ces deux systèmes, et le déterminant $D_c(x)$ est le même, à un facteur constant près, pour tous ces systèmes. Il suit de là que les racines de l'équation $D_c(x) = 0$ sont déterminées quand on se donne le nombre c qui est racine double de cette équation; lorsque c varie dans l'intervalle (X_0, X_1), les racines de $D_c(x) = 0$, situées dans le même intervalle, varient aussi d'une manière continue.

Si M est le point de l'extrémale Γ d'abscisse c, les points de la même extrémale dont les abscisses sont les autres racines de $D_c(x) = 0$ sont dits les *foyers conjugués* du point M.

L'interprétation géométrique est analogue à celle qui a été donnée au n° 633. Soient $y = f(x, \lambda, \mu)$, $z = \varphi(x, \lambda, \mu)$ les intégrales du système (9) qui prennent les valeurs $f(c)$, $\varphi(c)$ pour $x = c$, tandis que leurs dérivées ont les valeurs initiales $f'(c) + \lambda$, $\varphi'(c) + \mu$. Ces fonctions sont continues et admettent des dérivées partielles continues lorsque x varie de X_0 à X_1, pourvu que $|\lambda|$ et $|\mu|$ restent inférieurs à une certaine limite (n° 461). Les équations précédentes représentent le faisceau des extrémales issues du point M de Γ d'abscisse c. Ces extrémales forment une *congruence* et chaque extrémale touche la surface focale de cette congruence (II, n° 436) en un certain nombre de points dont les abscisses sont les racines de l'équation $\dfrac{D(f, \varphi)}{D(\lambda, \mu)} = 0$. En particulier, l'extrémale Γ touche la surface focale aux points dont les abscisses sont données par l'équation

$$(63) \qquad f'_\lambda(x, 0, 0)\,\varphi'_\mu(x, 0, 0) - f'_\mu(x, 0, 0)\,\varphi'_\lambda(x, 0, 0) = 0.$$

Mais $\{f'_\lambda(x, 0, 0), \varphi'_\mu(x, 0, 0)\}$ et $\{f'_\mu(x, 0, 0), \varphi'_\mu(x, 0, 0)\}$ forment deux systèmes de solutions des équations aux variations, qui sont nulles pour $x = c$. L'équation (63) est donc identique à l'équation $D_c(x) = 0$, et par suite *les foyers conjugués du point* M *sont les points de contact de l'extrémale* Γ *avec la surface focale de la congruence formée par les extrémales issues de* M.

Ces préliminaires posés, les conditions de Legendre et de Jacobi se généralisent de la façon suivante :

Pour que la variation seconde $\delta^2 J$ soit positive pour toutes les formes

possibles des fonctions $\eta(x)$, $\zeta(x)$, *il faut et il suffit que la forme quadratique* $Az^2 + 2Bzt + Ct^2$ *soit définie et positive pour toute valeur de* x *comprise entre* x_0 *et* x_1, *et que tous les foyers conjugués du point* A *soient à l'extérieur de l'intervalle* (x_0, x_1).

Il est aisé de voir que ces conditions sont *suffisantes*. Supposons, en effet, que l'équation $D_{x_0}(x) = 0$ n'ait aucune racine $> x_0$ et $\leqq x_1$. On peut toujours prendre un nombre positif h assez petit pour que l'équation $D_{x_0-h}(x) = 0$ n'ait elle-même aucune racine $> x_0 - h$ et $\leqq x_1$; on peut aussi supposer $x_0 - h > X_0$. Soient (u_1, v_1), (u_2, v_2) deux systèmes associés de solutions des équations aux variations, formés d'intégrales qui s'annulent toutes pour $x = x_0 - h$. Le déterminant $u_1 v_2 - u_2 v_1$ ne s'annule pas dans l'intervalle (x_0, x_1), les limites comprises, et les coefficients p_1, q_1, p_2, q_2, déduits des relations (59), sont continus dans cet intervalle. La formule (55) nous donne alors l'expression de $\delta^2 J$ au moyen d'une intégrale dont l'élément est une forme définie positive dans tout l'intervalle d'intégration. On a donc $\delta^2 J > 0$. Pour avoir $\delta^2 J = 0$, il faudrait prendre pour η et ζ un système de solutions des équations (58) s'annulant aux deux limites x_0 et x_1. Il n'y a pas d'autre système que $\eta = \zeta = 0$, satisfaisant à ces conditions dans l'hypothèse envisagée ([1]).

Les conditions précédentes sont *nécessaires*. Prouvons par exemple que A ne peut être négatif pour aucun point de l'intervalle (x_0, x_1). Supposons en effet qu'on ait $A(c) < 0$, c étant compris entre x_0 et x_1. On peut alors trouver un intervalle (ξ_0, ξ_1) renfermant c et assez petit pour que, dans cet intervalle, $A(x)$ soit < 0, et qu'il existe deux systèmes associés (u_1, v_1), (u_2, v_2) d'intégrales des équations (60) tels que $u_1 v_2 - u_2 v_1$ ne s'annule pas dans cet intervalle. Les coefficients p_1, q_1, p_2, q_2 seront alors continus dans cet intervalle et il suffira de prendre pour η et ζ des fonctions de classe (I) entre x_0 et x_1, nulles en dehors de l'intervalle (ξ_0, ξ_1) et satisfaisant à la relation $\zeta' - p_2\eta - q_2\zeta = 0$. Il est clair qu'on aura $\delta^2 J < 0$. On démontrerait de même qu'on ne peut avoir $C < 0$, ou $AC - B^2 < 0$ en aucun point de l'intervalle (x_0, x_2). Comme par hypothèse, $B^2 - AC$ ne s'annule pas entre X_0 et X_1, on doit donc avoir, dans tout l'intervalle (x_0, x_1), $A > 0$, $C > 0$, $AC - B^2 > 0$.

La nécessité de la condition de Jacobi se démontre de même en prouvant que, s'il y a un foyer conjugué de A entre A et B, on peut trouver une ligne de classe (I) joignant ces deux points et donnant pour J une valeur moindre que Γ (*voir* HADAMARD, p. 355 et suiv.).

Ces conditions ne sont pas encore suffisantes pour assurer l'extremum. En effet, le raisonnement du n° 636 peut être repris presque mot pour mot;

([1]) Le raisonnement prouve plus généralement qu'on a $\delta^2 J > 0$, si les conditions de Legendre sont satisfaites, et s'il existe deux systèmes associés d'intégrales des équations (60) tels que $u_1 v_2 - u_2 v_1$ ne s'annule pas entre x_0, x_1, ni pour ces limites.

en comparant la valeur de l'intégrale prise le long d'un arc d'extrémale AC pris sur Γ à la valeur de l'intégrale J prise suivant un chemin infiniment voisin coupant l'arc AC sous un angle constant *non nul*, on obtient une nouvelle condition nécessaire pour le minimum. *La fonction*

$$(64)\quad \begin{aligned} &E(x, y, z; y', z'; u, v) \\ &= F(x, y, z, u, v) - F(x, y, z, y', z') - (u - y') F'_{y'} - (v - z') F'_{z'} \end{aligned}$$

ne peut prendre de valeur négative le long de Γ, *pour des valeurs finies de u et de v.*

III. — CHAMPS D'EXTRÉMALES. — CONDITIONS SUFFISANTES.

Nous allons maintenant établir un système de conditions suffisantes pour assurer le minimum. Ces conditions sont basées sur la considération des *champs d'extrémales* (Weierstrass), ou *faisceaux spéciaux* (Hadamard).

638. Définition d'un champ de courbes extrémales. — Nous désignerons pour abréger par $\mathcal{G}$ toute courbe extrémale, et nous dirons que tout système de courbes $\mathcal{G}$, dépendant d'un paramètre arbitraire, forme un *faisceau*. Une portion connexe et finie du plan $\mathcal{D}$, située dans la région $\mathcal{R}$, forme *un champ de courbes extrémales*, ou plus simplement *un champ*, s'il existe un faisceau de courbes extrémales, tel qu'il passe une courbe du faisceau et une seule par chaque point de $\mathcal{D}$, le coefficient angulaire $u(x, y)$ de la tangente au point (x, y) à la courbe $\mathcal{G}$ du faisceau qui passe par ce point étant une fonction continue, et admettant des dérivées partielles continues u'_x et u'_y dans $\mathcal{D}$. Les courbes du faisceau sont alors les courbes intégrales de l'équation différentielle du premier ordre $y' = u(x, y)$; de cette équation on déduit

$$y'' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} u(x, y).$$

En portant les valeurs de y' et de y'' dans l'équation d'Euler, on obtient la relation

$$(65)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} u\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial u} u + \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial u} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

y' étant remplacé par u dans $F(x, y, y')$, et cette condition doit

être vérifiée pour les coordonnées d'un point quelconque du champ $\mathcal{D}$. La fonction $u(x, y)$ doit donc être une intégrale de l'équation aux dérivées partielles (65), continue ainsi que ses dérivées partielles dans $\mathcal{D}$. Inversement, si l'équation (65) admet une intégrale continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre u'_x et u'_y, dans une région $\mathcal{D}$, cette région est un champ car l'équation différentielle $y' = u(x, y)$ définit un faisceau de courbes extrémales, tel qu'il en passe une et une seule par chaque point de $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{C}_0$ un arc de courbe extrémale, joignant le point $A(x_0, y_0)$ au point $B(x_1, y_1)$, et représentée par l'équation $y = f(x)$, la fonction $f(x)$ appartenant à la classe (I) dans l'intervalle (x_0, x_1). Considérons, comme plus haut, le domaine $\mathcal{R}_\varepsilon$ compris entre les deux droites $x = x_0$, $x = x_1$, et les deux courbes $Y_1 = f(x) + \varepsilon$, $Y_2 = f(x) - \varepsilon$. Nous dirons que *l'arc $\mathcal{C}_0$ appartient à un champ*, s'il est possible de prendre le nombre ε assez petit pour que la région $\mathcal{R}_\varepsilon$ soit un champ, l'une des extrémales du faisceau étant la courbe $\mathcal{C}_0$ elle-même. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'équation linéaire (65) admette une intégrale continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans $\mathcal{R}_\varepsilon$, et se réduisant à $f'(x)$ quand on y remplace y par $f(x)$ [1].

Tout arc d'extrémale pour laquelle les conditions de Legendre et de Jacobi sont vérifiées dans l'intervalle (x_0, x_1) appartient à un champ. Nous avons vu, en effet, en étudiant la signification géométrique de la condition de Jacobi (n° 633) que l'équation d'Euler admet alors une infinité d'intégrales $\varphi(x, \lambda)$, dépendant d'un paramètre arbitraire λ, se réduisant à $f(x)$ pour $\lambda = 0$, et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $\varphi(x, \lambda)$ est continue et admet des dérivées partielles con-

---

[1] Ce problème est indéterminé, car les équations $y = f(x)$, $u = f'(x)$ représentent, comme il est aisé de s'en assurer, une caractéristique de l'équation linéaire (65). Soient (x_2, y_2) les coordonnées d'un point de $\mathcal{C}_0$. Si la fonction F est analytique en x, y, y', comme c'est le cas habituel, $f(x)$ est aussi une fonction analytique, et l'équation linéaire (65) admet une infinité d'intégrales holomorphes dans le domaine du point (x_2, y_2) se réduisant à $f'(x)$, pour $y = f(x)$. Il faut de plus que l'une d'elles soit régulière dans toute la région $\mathcal{R}_\varepsilon$, pour que cette région soit un champ. Les méthodes du calcul des limites de Cauchy permettent de démontrer qu'il y en a une infinité si les conditions de Legendre et de Jacobi sont vérifiées (voir *Annales de Toulouse*, 2e série, t. VIII, p. 458).

tinues du premier et du second ordre lorsque x varie de x_0 à x_1, et λ de $-k$ à $+k$, k étant un nombre positif.

2° La dérivée $\varphi'_\lambda(x, 0)$ est différente de zéro pour $x_0 \leqq x \leqq x_1$.

Nous allons montrer que cette fonction $\varphi(x, \lambda)$ définit un champ auquel appartient la courbe extrémale AB.

En effet, $\varphi'_\lambda(x, 0)$ ne s'annulant pas quand x varie de x_0 à x_1, on peut, puisque la dérivée $\varphi'_\lambda(x, \lambda)$ est une fonction continue des deux variables x et λ, assigner un nombre positif ρ tel que $\varphi'_\lambda(x, \lambda)$ ne s'annule pas non plus dans le domaine Δ défini par les inégalités $x_0 \leqq x \leqq x_1$, $-\rho \leqq \lambda \leqq \rho$. Quand on fait varier x de x_0 à x_1 et λ de $-\rho$ à $+\rho$, le point m de coordonnées $[x, y = \varphi(x, \lambda)]$ décrit une certaine région $\mathcal{R}'$ entourant $\mathcal{G}_0$ et limitée par les droites $x = x_0$, $x = x_1$, et par les deux courbes $y = \varphi(x, -\rho)$, $y = \varphi(x, +\rho)$. Nous allons montrer que par tout point de cette région $\mathcal{R}'$ il passe une courbe et une seule de la famille considérée. En effet supposons, pour fixer les idées, $\varphi'_\lambda(x, \lambda) > 0$ dans $\mathcal{R}'$; si l'on donne à x une valeur fixe x_2, comprise entre x_0 et x_1, et qu'on fasse varier λ de $-\rho$ à $+\rho$, $\varphi(x_2, \lambda)$ va en croissant de $\varphi(x_2, -\rho)$ à $\varphi(x_2, \rho)$, et le point de coordonnées $[x_2, \varphi(x_2, \lambda)]$ décrit un segment de droite P_1P_2, parallèle à Oy. A chaque valeur de x_2 comprise entre x_0 et x_1 correspond ainsi un segment de droite P_1P_2, et quand x_2 croît de x_0 à x_1, le segment P_1P_2 décrit une certaine région du plan qui est la région $\mathcal{R}'$. On voit immédiatement, d'après ce mode de génération, qu'à tout point (x, y) de $\mathcal{R}'$ correspond une valeur déterminée de λ, comprise entre $-\rho$ et $+\rho$; soit $\lambda = \psi(x, y)$ cette racine. La dérivée $\varphi'_\lambda(x, \lambda)$ n'étant pas nulle pour la valeur $\lambda = \psi(x, y)$, il résulte de la théorie générale des fonctions implicites (I. n° 36), et des hypothèses qui ont été faites sur la fonction $\varphi(x, \lambda)$, que cette fonction $\psi(x, y)$ est continue, et admet les dérivées partielles continues dans la région $\mathcal{R}'$. D'autre part, le coefficient angulaire $u(x, y)$ de la tangente à la courbe du faisceau considéré qui passe en un point (x, y) de $\mathcal{R}'$ est égal à $\varphi'_x(x, \lambda) = \varphi'_x[x, \psi(x, y)]$. Puisque les dérivées du second ordre de φ sont continues, et que ψ admet des dérivées du premier ordre qui sont elles-mêmes continues, il s'ensuit que $u(x, y)$ admet aussi des dérivées partielles u'_x et u'_y, continues dans $\mathcal{R}'$. Cette région $\mathcal{R}'$ est donc un champ.

Soit maintenant ε la borne inférieure des deux fonctions

$$\varphi(x, \rho) - \varphi(x, 0), \quad \varphi(x, 0) - \varphi(x, -\rho)$$

lorsque x varie de x_0 à x_1. Ce nombre ε est positif, puisque les deux fonctions précédentes sont continues et ne peuvent s'annuler dans l'intervalle (x_0, x_1). Le domaine $\mathcal{R}_\varepsilon$ défini par les inégalités $x_0 \leqq x \leqq x_1$, $f(x) - \varepsilon \leqq y \leqq f(x) + \varepsilon$ est donc compris tout entier dans le domaine $\mathcal{R}'$ et par suite $\mathcal{R}_\varepsilon$ est un champ entourant l'arc $\mathcal{G}_0$.

Inversement, l'existence d'un champ entourant $\mathcal{G}_0$ entraîne la condition de Jacobi. Soit, en effet, $u(x, y)$ une intégrale de l'équation (65), continue dans ce champ ainsi que ses dérivées u'_x, u'_y, et telle qu'on ait

$$f'(x) = u[x, f(x)].$$

L'intégrale $y = \varphi(x, \lambda)$ de l'équation différentielle $y' = u(x, y)$ qui prend la valeur $y_0 + \lambda$ pour $x = x_0$ est une fonction continue des variables x et λ, et admet des dérivées continues, lorsque x varie de x_0 à x_1, pourvu que $|\lambda|$ reste inférieur à un nombre positif k. La fonction $\xi = \varphi'_\lambda(x, 0)$, qui prend la valeur $\xi = 1$ pour $x = x_0$, est une solution de l'équation aux variations $\xi'(x) = u'_y[x, f(x)]\,\xi(x)$. Cette fonction $\xi(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (x_0, x_1) et il clair que c'est aussi une solution de l'équation aux variations (43), puisque $\varphi(x, \lambda)$ est une intégrale de l'équation d'Euler.

Mais il est à remarquer que l'arc $\mathcal{G}_0$ peut appartenir à un champ sans que la condition de Legendre soit vérifiée. Supposons, par exemple, $F = xy'^2$. Les parallèles à l'axe des x forment bien un faisceau d'extrémales, et la condition de Legendre n'est pas satisfaite pour le segment $(-1, +1)$ de l'axe des x.

On pourra prendre par exemple, pour former le champ, le faisceau des extrémales voisines de $\mathcal{G}_0$ issues d'un point $\mathcal{A}$ d'abscisse X_0, situé à gauche de A sur le prolongement de l'extrémale, et assez voisin de A pour que le premier foyer conjugué de $\mathcal{A}$ soit à droite de B. Si $y = \varphi(x, \lambda)$ est l'équation de ce faisceau, nous avons vu (n° 633) que la fonction $\varphi(x, \lambda)$ satisfait bien aux conditions précédentes. On prend aussi quelquefois le faisceau spécial constitué par les extrémales voisines de $\mathcal{G}_0$ issues du point A lui-même, mais il passe alors une infinité d'extrémales par ce point A, ce qui introduit des restrictions dans certains énoncés.

Dans les exemples traités plus haut (n° 634), on aperçoit aisément un

champ d'extrémales dont l'arc AB fait partie. La condition de Jacobi étant satisfaite, soit O un point de l'axe des x par lequel on ne peut mener aucune tangente à l'arc AB. On peut alors trouver sur le prolongement de l'extrémale deux points A et B′, à gauche de A et à droite de B respectivement, tel que toute demi-droite OL, située dans l'angle A′OB′, rencontre l'arc A′B′ en un point et en un seul. Les arcs homothétiques de A′B′ par rapport au point O forment évidemment un champ d'extrémales entourant l'arc AB.

639. **Théorème de Weierstrass.** — Les conditions de Legendre et de Jacobi étant supposées vérifiées pour un arc d'extrémale $\mathcal{G}_0$, la région $\mathcal{R}_\varepsilon$ est un champ entourant l'arc $\mathcal{G}_0$, pourvu que le nombre positif ε ait été pris assez petit. Toute courbe Γ de classe (I), située dans le champ $\mathcal{R}_\varepsilon$, et joignant les deux points A et B, est représentée par une équation

$$y = f(x) + \omega(x),$$

la fonction $\omega(x)$ étant de classe (I) dans l'intervalle (x_0, x_1) et satisfaisant aux conditions

$$\omega(x_0) = 0, \qquad \omega(x_1) = 0, \qquad |\omega(x)| < \varepsilon \qquad \text{pour } x_0 < x < x_1.$$

Pour que l'extrémale $\mathcal{G}_0$ donne un minimum, l'intégrale $J_{\mathcal{G}_0}$ doit être plus petite que l'intégrale J_Γ, quelle que soit la forme de cette courbe Γ, pourvu qu'elle satisfasse aux conditions énoncées. La difficulté du problème tient en grande partie, il est facile de le concevoir, à ce qu'on a à comparer les valeurs de deux intégrales définies prises suivant deux chemins différents. Weierstrass est parvenu à exprimer la différence de ces deux intégrales par une seule intégrale définie prise le long du chemin Γ. Nous indiquerons d'abord la marche très simple de M. Hilbert pour parvenir à la formule de Weierstrass [1]. Elle repose sur le lemme suivant :

Soit $\mathcal{D}$ un champ de courbes extrémales; si $u(x, y)$ est la fonction qui correspond à ce champ (n° 638), *l'intégrale curviligne*

$$(66) \qquad I = \int [F(x, y, u) - u F'_u(x, y, u)]\,dx + F'_u(x, y, u)\,dy.$$

prise le long d'une courbe fermée quelconque située dans le champ, est égale à zéro.

---

[1] D'après M. W. Ermakoff (*Journal de Mathématiques*, 6e série, t. I, 1905, p. 97), cette méthode aurait aussi été employée par Weierstrass dans ses leçons.

En effet, la condition pour que cette intégrale soit nulle est exprimée par la relation

$$\frac{\partial F}{\partial y} - u\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial u} - u\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x},$$

qui est identique à l'équation (65) à laquelle satisfait la fonction $u(x, y)$.

Appliquons la formule d'Hilbert au contour fermé composé de l'arc d'extrémale $\mathcal{G}_0$ et de la courbe Γ, $u(x, y)$ étant la fonction qui correspond au champ $\mathcal{R}_\varepsilon$. Le long de $\mathcal{G}_0$ on a $u[(x, f(x)] = f'(x)$ et, par suite, cette formule nous donne

$$\int_{\mathcal{G}_0} F(x, y, y')\,dx = \int_{(\Gamma)} [F(x, y, u) + (y' - u)F'_u(x, y, u)]\,dx,$$

les deux intégrales étant prises dans le sens voulu, x croissant de x_0 à x_1. On en déduit

$$J_\Gamma - J_{\mathcal{G}_0} = \int [F(x, y, y') - F(x, y, u) - (y' - u)F'_u(x, y, u)]\,dx,$$

c'est-à-dire, d'après la définition de la fonction E (n° 636),

$$(67) \qquad J_\Gamma - J_{\mathcal{G}_0} = \int_\Gamma E(x, y;\ u, y')\,dx;$$

c'est la formule de Weierstrass que nous voulions obtenir. Dans cette formule, y' désigne le coefficient angulaire de la tangente à Γ, tandis que $u(x, y)$ est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe $\mathcal{G}$ du champ qui passe au point (x, y).

640. **Conditions suffisantes.** — On sera assuré du signe de la différence $J_\Gamma - J\mathcal{G}_0$ si la fonction $E(x, y;\ u, p)$ des trois variables indépendantes x, y, p conserve un signe constant pour les coordonnées d'un point quelconque du domaine $\mathcal{R}_\varepsilon$ et pour toute valeur finie de p; u est supposé remplacé dans E par la fonction $u(x, y)$ qui convient au champ considéré. En particulier, si cette fonction est constamment positive dans cette région, on a $J_\Gamma > J\mathcal{G}_0$ et nous pouvons énoncer la proposition suivante : *La courbe extrémale $\mathcal{G}_0$ donne un minimum de l'intégrale* J *si la fonction* $E(x, y;\ u, p)$ *est positive pour tout point* (x, y) *du domaine* $\mathcal{R}_\varepsilon$ *et pour toute valeur finie de* p.

Pour reconnaître si cette fonction est satisfaite, il faut d'abord avoir calculé la fonction $u(x, y)$ qui convient à un champ particulier d'extrémales, comprenant $\mathcal{G}_0$. On peut remplacer cette condition par une autre, qui est moins générale, mais d'une application plus commode, car elle n'exige pas le calcul de la fonction $u(x, y)$. Nous avons en effet, d'après la formule de Taylor,

$$(68) \qquad \begin{aligned} E(x, y; u, p) &= \frac{(p-u)^2}{1.2} F''_{y'^2}[x, y, u + \theta(p-u)] \\ &= (p-u)^2 G(x, y; p) \end{aligned}$$

et la fonction $E(x, y; u, p)$ sera certainement positive, si la dérivée seconde $F''_{y'^2}(x, y, p)$ est positive pour tout point (x, y) du domaine $\mathcal{R}_\varepsilon$ et pour toute valeur finie de p. On en déduit aisément un système de *conditions suffisantes* pour que la courbe extrémale $\mathcal{G}_0$ donne un minimum de l'intégrale J.

Soit C une courbe fermée quelconque entourant $\mathcal{G}_0$ et n'ayant avec $\mathcal{G}_0$ aucun point commun; la région du plan intérieure à C constitue un domaine de l'arc $\mathcal{G}_0$ et il est clair que le domaine $\mathcal{R}_\varepsilon$ sera intérieur à celui-là pourvu qu'on prenne ε assez petit. Si une certaine condition est vérifiée pour le domaine intérieur à C, elle l'est donc *a fortiori* pour $\mathcal{R}_\varepsilon$. Cela posé, *la courbe $\mathcal{G}_0$ rend minimum l'intégrale* J *si la dérivée seconde $F''_{y'^2}(x, y, p)$ est positive dans un certain domaine de l'arc $\mathcal{G}_0$ pour toute valeur finie de p, et si l'on a $x_1 < x'_0$.*

En effet, $F''_{y'^2}[x, f(x), f'(x)] = R(x)$ est alors positif de x_0 à x_1; la condition de Legendre est donc satisfaite. La condition de Jacobi l'est aussi par hypothèse, et l'on peut trouver un champ $\mathcal{R}_\varepsilon$ entourant $\mathcal{G}_0$, où la fonction E est positive pour toute valeur finie de p, d'après la formule (68). On a donc toujours $J_{\mathcal{G}_0} < J_\Gamma$.

Remarquons que les conditions précédentes ne forment pas un système de conditions nécessaires. Il peut arriver, en effet, que la fonction $G(x, y, p)$ soit positive dans tout le champ $\mathcal{R}_\varepsilon$ pour toute valeur finie de p sans qu'il en soit de même de $F''_{y'^2}(x, y, p)$ (n° 641).

Remarques. — Soit $\mathcal{G}$ une extrémale quelconque du faisceau spécial considéré; $u(x, y)$ est le coefficient angulaire de la tangente à cette extrémale au point (x, y) du champ. Si la fonction $E(x, y; u, p)$ est positive dans tout le champ pour toute valeur finie de p, la condition nécessaire pour le minimum du n° 636 est vérifiée aussi pour l'extrémale $\mathcal{G}$. On obtient

donc la condition *suffisante* de Weierstrass en exprimant que la condition *nécessaire* est vérifiée par toutes les extrémales du faisceau considéré dans le champ. Il est clair que cette condition nécessaire peut être vérifiée pour l'extrémale $\mathcal{G}_0$ sans l'être pour les extrémales infiniment voisines. On conclut aussi de cette remarque que tout arc d'extrémale $\mathcal{G}$ du faisceau spécial, situé à l'intérieur du champ, fournit aussi un minimum de l'intégrale, car la condition suffisante de Weierstrass est aussi vérifiée pour cet arc d'extrémale qui appartient au même faisceau que $\mathcal{G}_0$.

Il est clair que la condition suffisante de Weierstrass entraîne la condition de Legendre tout au moins au sens large (nº 636). Comme, d'autre part, l'existence d'un champ suppose la condition de Jacobi (nº 638), on peut dire qu'*un arc d'extrémale $\mathcal{G}_0$ fournit un minimum, si cet arc appartient à un champ pour lequel la condition suffisante de Weierstrass est vérifiée.* Lorsque F ne contient pas y, les deux conditions de Weierstrass (condition *nécessaire* et condition *suffisante*) se réduisent à une seule. On peut prendre, en effet, pour $u(x, y)$ la valeur de $f'(x)$ en un point de $\mathcal{G}_0$, ce qui revient à considérer le faisceau spécial formé par les extrémales qui se déduisent de $\mathcal{G}_0$ par une translation parallèle à Oy.

Exemples. — 1º Dans l'exemple de M. Bolza (nº 636) où

$$F = y'^2(a - 4byy' + 2bxy'^2),$$

on peut prendre $u = 0$. Le faisceau spécial est constitué par les parallèles à Ox, et la fonction $E(x, y; u, p)$ est égale à $p^2(a - 4byp + 2bxp^2)$. Sur l'arc d'extrémale formé par le segment $(0,1)$ de Ox, on a bien $E \geqq 0$, mais il n'en est pas de même pour les extrémales infiniment voisines du faisceau. En effet, si l'on prend $y = \frac{\varepsilon}{2}$, $p = \frac{y}{x}$, x ayant une valeur positive inférieure à un et à $\frac{b\varepsilon^2}{2a}$, la fonction E est négative.

2º Supposons encore $F = g(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$. On a ici

$$F''_{y'^2} = g(1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}},$$

et cette dérivée est du signe de $g(x, y)$. Si les conditions de Legendre et de Jacobi sont vérifiées, $g(x, y)$ est positif tout le long de $\mathcal{G}_0$; on a donc aussi $g(x, y) > 0$ dans un domaine entourant $\mathcal{G}_0$ et, par suite, $F''_{y'^2}$ est positif dans tout ce domaine pour toute valeur finie de y'. La courbe $\mathcal{G}_0$ fournit donc un minimum de l'intégrale. La conclusion s'applique, en particulier, aux exemples du nº 622.

641. Minimum fort et minimum faible. — Si en un point d'abscisse x de la courbe Γ, la valeur de y' diffère très peu de $f'(x)$, comme $u(x, y)$ est lui-même très peu différent de $f'(x)$, il s'ensuit que la différence $u + \theta(y' - u) - f'(x)$ est elle-même très petite, et d'après la formule (68) $E(x, y; u, y')$ aura le même

signe que $F''_{y'^2}[x, f(x), f'(x)]$. Cette remarque conduit tout naturellement à introduire une nouvelle distinction.

Soit, d'une façon générale, $\omega(x, \alpha)$ une fonction continue ainsi que sa dérivée première $\omega'_x(x, \alpha)$, dans l'intervalle (x_0, x_1), s'annulant quel que soit α pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$, et se réduisant identiquement à zéro pour $\alpha = 0$.

Nous dirons que $\omega(x, \alpha)$ est une *variation faible* si, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un autre nombre positif δ tel qu'on ait, pour $x_0 \leqq x \leqq x_1$,

$$(69) \qquad |\omega(x, \alpha)| < \varepsilon, \qquad |\omega'_x(x, \alpha)| < \varepsilon,$$

pourvu que $|\alpha|$ soit inférieur à δ. Par opposition, on dit que $\omega(x, \alpha)$ est une *variable forte*, si la première de ces conditions seulement est vérifiée, c'est-à-dire si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un autre nombre positif δ tel qu'on ait

$$|\omega(x, \alpha)| < \varepsilon \qquad \text{pour } x_0 \leqq x \leqq x_1,$$

pourvu que $|\alpha| < \delta$, la valeur de $\omega'_x(x, \alpha)|$ n'étant assujettie à aucune condition lorsque α tend vers zéro.

Les variations considérées plus haut, qui sont de la forme $\alpha\eta(x)$ sont des variations faibles, quel que soit $\eta(x)$; il suffit, en effet, qu'on ait $M|\alpha| < \varepsilon$, M désignant la valeur maximum de $|\eta(x)|$ et de $|\eta'(x)|$ dans l'intervalle (x_0, x_1), pour que les deux inégalités (69) soient vérifiées.

Au contraire, la variation

$$\omega(x, \alpha) = \alpha \sin\left[\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{\alpha^n}\right],$$

où $n > 1$, est une variation forte, car on a

$$\omega'_x(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha^{n-1}} \cos\left[\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{\alpha^n}\right](2x - x_0 - x_1)$$

et l'on peut toujours trouver des valeurs de α moindres en valeur absolue que tout nombre positif ρ, pour lesquelles $|\omega'_x(x, \alpha)|$ est plus grand que tout nombre donné.

Cette distinction est facile à saisir sur les courbes elles-mêmes. Considérons, en effet, les deux courbes $\mathcal{G}$ et Γ représentées par les

deux équations

$$(\mathcal{G}) \qquad y = f(x),$$
$$(\Gamma) \qquad y = f(x) + \omega(x, \alpha),$$

et faisons correspondre les points de ces deux courbes qui ont même abscisse. La distance de deux points correspondants sur les deux courbes est inférieure à ε pourvu que $|\alpha|$ soit $< \delta$, sans qu'il y ait lieu de distinguer si la variation est faible ou forte. Mais, lorsque la variation $\omega'(x, \alpha)$ est *faible*, non seulement deux points correspondants sur les deux courbes sont infiniment voisins, mais l'angle des tangentes aux deux courbes en ces points est infiniment petit. Il n'en est plus de même si la variation $\omega(x, \alpha)$ est forte; dans ce cas, l'angle des tangentes aux deux courbes aux points correspondants ne tend pas en général vers zéro, comme on peut le vérifier sur l'exemple précédent.

On fait une distinction analogue pour le minimum. Nous dirons que la courbe extrémale $\mathcal{G}_0$ donne un *minimum faible* pour l'intégrale J, *s'il existe un nombre positif* ε *tel que l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}[x, f(x), f'(x)]\, dx$$

soit moindre que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}[x, f(x) + \omega(x), f'(x) + \omega'(x)]\, dx,$$

pour toutes les formes possibles de la fonction $\omega(x)$, *qui est de classe* (I) *dans l'intervalle* (x_0, x_1) *et assujettie à vérifier les conditions*

$$\omega(x_0) = 0, \qquad \omega(x_1) = 0, \qquad |\omega(x)| < \varepsilon, \qquad |\omega'(x)| < \varepsilon,$$

pour $x_0 \leq x \leq x_1$.

Par opposition, on dit que la courbe extrémale $y = f(x)$ donne un *minimum fort*, si elle satisfait à la condition énoncée au début de ce Chapitre (n° 620). On comprend aisément d'après cela pourquoi les conditions de Legendre et de Jacobi sont insuffisantes pour assurer le minimum fort, puisqu'on obtient ces conditions en raisonnant uniquement sur des variations faibles. Au

contraire, la condition de Weierstrass (n° 636) a été obtenue en considérant une variation forte.

Théorème. — *Un arc d'extrémale $\mathcal{G}_0$, pour lequel les conditions de Legendre et de Jacobi son vérifiées, fournit au moins un* MINIMUM FAIBLE *pour l'intégrale* J.

En effet, par hypothèse, la fonction $R(x) = F''_{y'^2}[x, f(x), f'(x)]$ a une valeur positive lorsque x croît de x_0 à x_1. La fonction $F''_{y'^2}(x, y, y')$ étant continue, on peut donc trouver un nombre positif δ tel qu'on ait

$$F''_{y'^2}[x, f(x)+h, f'(x)+k] > 0 \qquad \text{pour } x_0 \leqq x \leqq x_1,$$

pourvu que $|h|$ et $|k|$ soient inférieurs à δ. Soit Γ une courbe voisine de $\mathcal{G}_0$ représentée par l'équation $y = f(x) + \omega(x)$; nous devons prendre, dans la formule (68), en y remplaçant p par y',

$$u + \theta(y' - u) = u[x, f(x) + \omega(x)] + \theta\{f'(x) + \omega'(x) - u[x, f(x) + \omega(x)]\},$$

ce qu'on peut écrire, en observant que $u[x, f(x)] = f'(x)$, et en désignant par θ_1 un nombre compris entre zéro et un,

$$\begin{aligned} f'(x) &+ \theta\,\omega'(x) + (1-\theta)\{u[x, f(x)+\omega(x)] - u[x, f(x)]\} \\ &= f'(x) + \theta\,\omega'(x) + (1-\theta)\,\omega(x)\,u'_y[x, f(x) + \theta_1\,\omega(x)]. \end{aligned}$$

Soit μ une limite supérieure de $|u'_y|$ dans un certain domaine de $\mathcal{G}_0$. Prenons un nombre positif ε tel que $\varepsilon(1+\mu) < \delta$; si $|\omega(x)|$ et $|\omega'(x)|$ sont inférieurs à ε de x_0 à x_1, on a

$$|y - f(x)| < \delta, \qquad |u + \theta(y' - u) - f'(x)| < \delta,$$

tout le long de la courbe Γ, et par conséquent la fonction

$$E(x, y;\, y', u)$$

est positive tout le long de cette courbe. La différence $J_\Gamma - J_{\mathcal{G}_0}$ est donc positive, d'après la formule (67).

La proposition établie à la fin du paragraphe précédent peut de même être énoncée comme il suit :

Théorème. — *Un arc d'extrémale $\mathcal{G}_0$ pour lequel les conditions de Legendre et de Jacobi sont vérifiées, fournit un* MI-

NIMUM FORT *pour l'intégrale* J, *si la dérivée seconde* $F''_{y'^2}(x, y, p)$ *reste positive pour toute valeur finie de* p *dans un certain domaine entourant* $\mathcal{G}_0$.

Exemples. — 1° Soit $F = y'^2(y'-1)^2$. On a

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 4y'^3 - 6y'^2 + 2y' = 2y'(y'-1)(2y'-1),$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 12y'^2 - 12y' + 2 = 12(y'-m')(y'-m''),$$

m' étant compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, et m'' étant compris entre $\frac{1}{2}$ et 1. Les courbes extrémales sont des lignes droites, et toute droite de coefficient angulaire m appartient à un champ formé par des droites parallèles; la valeur correspondante de la fonction $u(x, y)$ est $u(x, y) = m$. Étant donnés deux points A et B du plan des xy, la ligne droite AB est la seule courbe extrémale joignant ces deux points; cette courbe satisfait toujours à la condition de Jacobi, mais la condition de Legendre n'est vérifiée que si le coefficient angulaire m de la droite AB est inférieur à m' ou supérieur à m''.

Soit $\mathcal{R}_\varepsilon$ le domaine défini plus haut, relatif à la courbe extrémale AB; ce domaine est un champ pour lequel on a $u(x, y) = m$. La fonction $E(x, y; m, p)$ de Weierstrass a pour expression

$$\begin{aligned} E(x, y;\ m, p) &= (p-m)^2[p^2 + 2p(m-1) + (m-1)(3m-1)] \\ &= (p-m)^2[(p+m-1)^2 + 2m(m-1)]; \end{aligned}$$

cette fonction est positive pour toute valeur finie de p, pourvu que m soit négatif ou supérieur à 1, et dans ces deux cas seulement. Nous sommes donc conduit aux résultats suivants :

1° Si l'on a $m < 0$, ou $m > 1$, la droite AB donne un minimum fort pour l'intégrale $J = \int_{x_0}^{x_1} y'^2(y'-1)^2\,dx$. Il en est encore de même si $m = 0$, ou si $m = 1$, car la valeur de l'intégrale J le long de la droite AB est nulle dans ces deux cas, tandis qu'elle est positive pour toute autre courbe de classe (I) joignant les deux points A et B.

2° Si l'on a $0 < m < m'$, ou $m'' < m < 1$, la droite AB donne un minimum faible pour l'intégrale J.

3° Enfin si l'on a $m' \leqq m \leqq m''$, la droite AB ne donne ni un minimum fort, ni un minimum faible, puisque la condition de Legendre n'est pas satisfaite.

Cet exemple, dû aussi à M. Bolza, conduit à une remarque intéressante. Nous voyons que la fonction $E(x, y; m, y')$ est positive pour toute valeur

finie de y', lorsque m est négatif ou supérieur à 1, quoique la dérivée seconde $F''_{y'^2} = 12(y'-m')(y'-m'')$ ne soit pas positive pour toute valeur finie de y'. La condition $F''_{y'^2} > 0$ n'est donc pas une condition *nécessaire* pour qu'il y ait un minimum fort (n° 940).

2° Soit $F = \dfrac{x}{1+y'^2}$. On a remarqué plus haut que la condition de Weierstrass ne peut être vérifiée que pour les parallèles à l'axe des x. Toute autre extrémale ne peut donc fournir un extremum fort. Comme la condition de Jacobi est toujours vérifiée, puisque $u=1$ est une solution de l'équation aux variations (n° 634, note), il y aura extremum faible si la condition de Legendre est vérifiée, c'est-à-dire si $(3y'^2-1)x$ conserve un signe constant le long de l'extrémale considérée.

642. Interprétation de la méthode de Weierstrass. — A chaque solution $u(x,y)$ de l'équation (65) correspond une fonction $\theta(x,y)$ vérifiant les deux relations

$$(70) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = F(x,y,u) - u\,F'_u(x,y,u), \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = F'_u(x,y,u);$$

Weierstrass a présenté sa méthode sous une forme un peu différente, qui met en évidence la signification de cette fonction $\theta(x,y)$. L'équation $\theta(x,y)=C$ représente l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(71) \qquad [F(x,y,u) - u\,F'_u(x,y,u)]\,dx + F'_u(x,y,u)\,dy = 0,$$

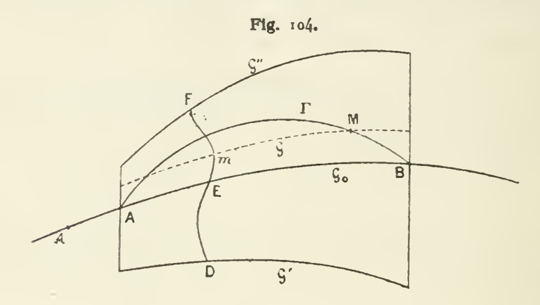
qui définit précisément les courbes transversales (n° 626) du faisceau d'extrémales considéré, pour lequel on a $y' = u(x,y)$.

Soit γ la transversale qui passe par un point E de l'arc AB ou pris sur le prolongement de cet arc. Prenons sur cette transversale un arc DF, dont les extrémités sont de part et d'autre de E, assez petit pour que $F(x,y,u)$ ne s'annule pas le long de DF et que les extrémales qui coupent transversalement DF soient dans le champ [1]. Nous pouvons alors limiter le champ par les deux extrémales $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}''$, issues des points D et F et par deux segments de droites $x=x_0$, $x=x_1$ (*fig.* 104). Par chaque point M de ce

[1] Nous laissons de côté le cas exceptionnel où $F(x,y,u)$ serait nul tout le long de $\mathcal{G}_0$. La transversale issue de E se confondrait alors avec $\mathcal{G}_0$. On peut toujours écarter ce cas puisqu'on peut ajouter à F une expression quelconque de la forme $\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}y'$ sans changer le problème (n° 621), et il suffira de disposer de $v(x,y)$ de façon à éviter ce cas exceptionnel. On peut même disposer de $v(x,y)$ de façon à avoir pour transversale une courbe choisie arbitrairement, par exemple la droite $x=x_0$.

champ passe une extrémale $\mathcal{G}$ du faisceau qui coupe transversalement γ en un point déterminé m de DF. Comme cas particulier, il peut se faire que la courbe γ se réduise à un point $\mathfrak{A}$ pris sur le prolongement de AB; le faisceau est alors constitué par les extrémales issues de ce point. Cela étant, soit $U(x, y)$ l'intégrale définie $\int F(x, y, y')\,dx$ prise le long de l'arc mM de l'extrémale $\mathcal{G}$ qui passe au point M, à partir du point m où elle

Fig. 104.



coupe γ transversalement; $U(x, y)$ est une fonction bien définie pour tout point du champ et, d'après la formule générale $(18)'$ qui donne la première variation (n° 625), sa différentielle totale dU est identique à $d\theta$. Comme la fonction $\theta(x, y)$ n'est définie qu'à une constante près, nous pouvons prendre $\theta = U(x, y)$.

Soit Γ une courbe quelconque de classe (I) située dans le champ et joignant les deux points A et B. On a la suite d'égalités évidentes

$$J_\Gamma - J_{\mathcal{G}_0} = \int_\Gamma F(x, y, y')\,dx - \int_{\mathcal{G}_0} d\theta = \int_\Gamma \left\{ F(x, y, y')\,dx - d\theta \right\}$$

et, en remplaçant $d\theta$ par sa valeur, nous retrouvons la formule de Weierstrass. Le raisonnement ne diffère pas au fond du premier, mais nous voyons la signification de la fonction auxiliaire $\theta(x, y)$ qui intervient dans la transformation de $J_\Gamma - J_{\mathcal{G}_0}$.

Connaissant un système de solutions des deux équations (70), on peut mettre la fonction $F(x, y, y')$ sous la forme

$$(72) \qquad F(x, y, y') = \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} y' + G(x, y, y'),$$

la fonction $G(x, y, y')$ et sa dérivée $G'_{y'}$ s'annulant quand on remplace y' par $u(x, y)$. Inversement, si par un moyen quelconque on a mis la fonction F sous la forme (72), où θ ne dépend que de x et de y, et où $G(x, y, y')$ et $G'_{y'}(x, y, y')$ s'annulent pour $y' = u(x, y)$, les courbes intégrales de l'équation $y' = u(x, y)$ forment un faisceau d'extrémales, et les courbes $\theta(x, y) = C$ sont des transversales de ce faisceau. En effet, si l'on différentie les deux membres de l'identité (72) par rapport à y', et qu'on remplace ensuite y' par u dans les deux relations, on retrouve précisément les formules (70). La fonction $E(x, y; u, y')$ relative à ce faisceau d'extrémales est identique à la fonction $G(x, y, y')$ elle même.

On remarquera que, si θ se réduit à une constante, F se réduit à G, et l'équation différentielle (71) des courbes transversales est vérifiée identiquement.

643. Équation des familles de transversales. — En éliminant u entre les deux équations (70), on obtient une équation aux dérivées partielles

$$\Phi\left(x, y, \frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}\right) = 0 \tag{73}$$

dont l'intégration permettra de former toutes les familles de courbes transversales. En effet, à toute solution $\theta(x, y)$ de cette équation correspond une fonction $u(x, y)$ satisfaisant aux deux relations (70) et par suite à l'équation (65).

Les courbes intégrales de l'équation $y' = u(x, y)$ forment donc une famille d'extrémales, dont les courbes $\theta(x, y) = C$ sont les courbes transversales. La réciproque est immédiate, et nous avons la proposition suivante : *Si $\theta(x, y)$ est une intégrale de l'équation* (73), *les courbes $\theta(x, y) = C$ forment une famille de transversales, et on les obtient toutes de cette façon.* Comme on l'a déjà observé (n° 626), une famille de transversales est définie, si l'on se donne une courbe de cette famille. Ceci est bien d'accord avec le théorème général d'existence, car une intégrale de l'équation (73) est déterminée quand on se donne sa valeur (qui est ici une constante quelconque) tout le long d'une courbe du plan des xy.

L'intégration de l'équation (73) se ramène à l'intégration de l'équation d'Euler (n° 621) et réciproquement. Nous allons montrer, en effet, que *les courbes extrémales sont les projections sur le plan des xy des caractéristiques de l'équation* (73).

Soit $y = f(x)$ l'équation d'une extrémale $\mathcal{G}$; on a déjà fait remarquer (p. 606, note) que la courbe gauche $\Gamma\{y = f(x), u = f'(x)\}$ était une courbe caractéristique pour l'équation en u. En d'autres termes, il existe une infinité d'intégrales $u = F(x, y)$ se réduisant à $f'(x)$ quand on remplace y par $f(x)$. A chacune de ces fonctions u correspond une intégrale de l'équation en θ, qui sera complètement déterminée si l'on se donne sa valeur θ_0 en un point M_0 de $\mathcal{G}$; les valeurs de θ, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ sont donc les

mêmes pour toutes ces intégrales le long de $\mathcal{G}$, d'après les formules (70). Il s'ensuit qu'elles sont tangentes tout le long d'une courbe Γ' de l'espace (x, y, θ) qui se projette suivant la courbe $\mathcal{G}$ sur le plan des xy. Cette courbe Γ' est donc une caractéristique de l'équation (73), et l'on démontrerait de la même façon qu'inversement toute caractéristique de l'équation en θ se projette sur le plan des xy suivant une caractéristique de l'équation en u, et par conséquent suivant une courbe extrémale.

Posons, pour abréger, $p = \frac{\partial\theta}{\partial x}$, $q = \frac{\partial\theta}{\partial y}$; les équations différentielles des caractéristiques de l'équation (73) sont

$$(74)\quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial p}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial q}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

en désignant par t une variable auxiliaire. L'intégration de ce *système canonique*, en tenant compte de la relation $\Phi = 0$, est équivalente à l'intégration de l'équation d'Euler. Si l'on connaît une intégrale $\theta(x, y, a)$ de l'équation (73), dépendant d'une constante arbitraire a, différente de celle qu'on peut toujours ajouter à une solution, $\theta(x, y, a) + b$ est une intégrale complète, et *l'équation* $\frac{\partial\theta}{\partial a} + c = 0$, *où a et c sont deux constante arbitraires, est l'équation générale des courbes extrémales* (II, n° 448).

Si l'on a $F = g(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$, l'équation en θ est

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = [g(x, y)]^2.$$

Sur toute intégrale $z = \theta(x, y)$, les caractéristiques sont les lignes de plus grande pente. Le réseau formé par les courbes de niveau $z =$ const. et les lignes de plus grande pente se projette sur le plan des xy suivant un réseau formé d'un faisceau d'extrémales et de leurs trajectoires orthogonales.

644. **Cas de deux fonctions inconnues.** — L'interprétation précédente de la méthode de Weierstrass permet de l'étendre aisément au cas de n fonctions inconnues; nous raisonnerons encore en supposant $n = 2$. La définition d'un champ d'extrémales est tout à fait analogue à celle qui a été donnée pour $n = 1$. Une région $\mathcal{D}$ de l'espace est un champ s'il existe une famille d'extrémales dépendant de deux paramètres (ou *congruence* d'extrémales) telle qu'il passe une extrémale de cette congruence et une seule par tout point de $\mathcal{D}$, les coefficients angulaires $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ de la tangente à l'extrémale qui passe au point (x, y, z) étant des fonctions continues qui admettent les dérivées partielles continues dans $\mathcal{D}$. Lorsque les conditions de Legendre et de Jacobi sont vérifiées pour un arc d'extrémale $\mathcal{G}_0$, les raisonnements faits pour $n = 1$ prouvent, en les modifiant un peu sur certains points, qu'on peut trouver d'une infinité de façons un champ d'extrémales entourant $\mathcal{G}_0$, de telle sorte que $\mathcal{G}_0$ soit une extrémale

de la congruence. Pour fixer les idées, considérons la congruence formée par les extrémales voisines de $\mathcal{G}_0$ issues d'un point $\mathfrak{A}$ d'abscisse $x_0 - h$ sur le prolongement de l'arc $\mathcal{G}_0$, h étant un nombre positif assez petit pour que $\mathfrak{A}$ n'ait pas de foyer conjugué sur AB (n° 637). Ces extrémales sont représentées par deux équations de la forme

$$(75) \qquad y = f(x, \lambda, \mu), \qquad z = \varphi(x, \lambda, \mu),$$

où les fonctions $f(x, \lambda, \mu)$, $\varphi(x, \lambda, \mu)$, qui se réduisent respectivement à $f(x)$ et à $\varphi(x)$ pour $\lambda = \mu = 0$, sont continues et admettent des dérivées partielles continues, lorsque x varie de $x_0 - h$ à x_1, pourvu que $|\lambda|$ et $|\mu|$ soient inférieurs à un nombre positif ρ. De plus, le déterminant $\frac{D(f, \varphi)}{D(\lambda, \mu)}$, pris pour les valeurs $\lambda = \mu = 0$, ne s'annule pas lorsque x varie de x_0 à x_1 (n° 637). Il suit de là qu'inversement on peut déterminer un nombre positif ε tel que, pour tout système de valeurs de x, y, z satisfaisant aux inégalités

$$(76) \qquad x_0 \leqq x \leqq x_1, \qquad |y - f(x)| \leqq \varepsilon, \qquad |z - \varphi(x)| \leqq \varepsilon,$$

les équations (75) admettent en λ et μ un système de solutions et un seul

$$\lambda = \pi(x, y, z), \qquad \mu = \pi_1(x, y, z),$$

où π et π_1 sont des fonctions continues qui deviennent nulles lorsque le point (x, y, z) vient sur $\mathcal{G}_0$ [1]. La région $\mathcal{D}$, définie par les inégalités (76), constitue donc un champ d'extrémales; par tout point de ce champ, il passe une extrémale et une seule, issue du point $\mathfrak{A}$, voisine de $\mathcal{G}_0$. Il est clair que nous pouvons remplacer ce champ $\mathcal{D}$ par un champ $\mathcal{D}'$, qui se compose de la région de l'espace balayée par les extrémales $\mathcal{G}$ issues de $\mathfrak{A}$ lorsque le point (λ, μ) décrit un domaine voisin de l'origine. Soient $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ les coefficients angulaires de la tangente à l'extrémale qui passe par le point (x, y, z) de $\mathcal{D}'$, et $\theta(x, y, z)$ la valeur de l'intégrale définie $\int F(x, y, z, y', z')\,dx$ prise depuis le point $\mathfrak{A}$ jusqu au point M le long de l'extrémale du faisceau qui joint ces deux points. D'après la formule générale qui donne la première variation (n° 625), la différentielle totale $d\theta$ a pour expression

$$d\theta = [F(x, y, z, u, v) - u F'_u(x, y, z, u, v) - v F'_v(x, y, z, u, v)]\,dx \\ + F'_u\,dy + F'_v\,dz.$$

Si Γ est une courbe de classe (I) du champ $\mathcal{D}'$ joignant les deux

---

[1] On peut le démontrer, par exemple, en appliquant la méthode des approximations successives à la résolution du système (75), considéré comme un système de deux équations à deux inconnues λ, μ (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXIII, 1906, p. 430 et suiv.).

points A et B, nous avons encore

$$J_\Gamma - J_{\mathcal{G}} = \int_\Gamma F(x, y, z, y' z')\,dx - \int_{\mathcal{G}_0} d\theta$$
$$= \int_\Gamma \{F(x, y, z, y' z')\,dx - d\theta\},$$

c'est-à-dire

(77) $$J_\Gamma - J_{\mathcal{G}} = \int_\Gamma E(x, y, z; u, v, y', z')\,dx.$$

formule tout à fait pareille à la formule (67) et dont on tire les mêmes conséquences. *La courbe extrémale $\mathcal{G}_0$ donne un minimum si la fonction $E(x, y, z; u, v, p, q)$ est positive pour tous les systèmes de valeurs finies de p et de q dans un domaine $\mathcal{D}$ entourant $\mathcal{G}_0$, défini par des inégalités de la forme* (76).

La formule de Taylor, limitée aux termes du deuxième degré, donne

$$E(x, y, z; u, v, y', z')$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{(y'-u)^2 F''_{y'^2}[x, y, z, u+\theta(y'+u), v+\theta(z'-v)]$$
$$+ 2(y'-u)(z'-v)F''_{y'z'}(\ldots) + (z'-v)^2 F''_{z'^2}(\ldots)\Big\};$$

on en conclut que *$\mathcal{G}_0$ fournit un minimum de* J *si la forme quadratique*

$$F''_{y'^2}(x, y, z, y', z')t_2 + 2F''_{y'z'}(\ldots)tw + F''_{z'^2}(\ldots)w^2$$

est une forme définie positive pour tous les systèmes de valeurs finies de y' et de z', lorsque le point (x, y, z) reste dans le domaine $\mathcal{D}$.

Les conditions précédentes sont suffisantes pour que $\mathcal{G}_0$ donne un *minimum* fort. Pour le *minimum faible*, on démontre, comme au n° 641, que les conditions de Legendre et de Jacobi sont suffisantes. En d'autres termes, il suffit que la forme quadratique précédente soit une forme définie positive tout le long de $\mathcal{G}_0$, y' et z' étant les coefficients angulaires de la tangente à cette courbe et que la condition de Jacobi soit vérifiée.

Il est clair que la façon dont nous avons déterminé la congruence d'extrémales ne joue aucun rôle dans le raisonnement, et la méthode de Weierstrass revient en définitive à mettre $F(x, y, z, y', z')$ sous la forme

(78) $$F = \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y}y' + \frac{\partial\theta}{\partial z}z' + (y'-u)^2 G(x, y, z, y', z')$$
$$+ 2H(y'-u)(z'-v) + K(z'-v)^2,$$

θ, u, v étant des fonctions de x, y, z; G, H, K des fonctions de x, y, z, y', z', et toutes ces fonctions étant continues ainsi que leurs dérivées dans un certain domaine. Inversement, toutes les fois que la fonction F a été mise sous cette forme, les courbes intégrales du système d'équations diffé-

rentielles $y' = u(x, y, z)$, $z' = v(x, y, z)$ sont des extrémales. On pourrait le vérifier par un calcul direct, mais il suffit d'observer que la première variation de l'intégrale J le long d'un arc de l'une de ces courbes d'extrémités fixes est évidemment nulle. *Les surfaces* $\theta(x, y, z) =$ const. *sont coupées transversalement par ces extrémales.* En effet, si l'on remplace y' et z' par u et v respectivement dans l'équation (78), et dans celles qu'on en déduit en différentiant par rapport à y' et à z', on en tire

$$(79) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x} = \mathrm{F} - u\mathrm{F}'_u - v\mathrm{F}'_v, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \mathrm{F}'_u, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial z} = \mathrm{F}'_v.$$

et la condition de transversalité est bien vérifiée (n° 626).

En éliminant u et v entre les équations (79), on obtient l'équation aux dérivées partielles qui définit les familles de surfaces transversales.

IV. — THÉORIE DE WEIERSTRASS. — SOLUTIONS DISCONTINUES.

645. Forme paramétrique d'une intégrale. — Dans les problèmes étudiés jusqu'ici, les courbes considérées ne peuvent être rencontrées en plus d'un point par une droite parallèle à Oy, ou par un plan parallèle au plan des yz. Mais, dans beaucoup de problèmes de géométrie, cette restriction est absolument artificielle, et l'intégrale définie dont on cherche l'extremum a un sens pour toute courbe admettant une tangente dont la direction varie d'une manière continue. Supposons, par exemple, qu'on cherche l'extremum de l'intégrale $\mathrm{J} = \int_{x_0}^{x_1} \left(y + a\sqrt{1 + y'^2}\right) dx$; on a vu plus haut (n° 628) que les extrémales sont des circonférences de rayon a. Si la distance des deux points donnés A et B est égale à $2a$, une demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre est bien une courbe extrémale joignant ces deux points; mais lorsque la droite AB n'est pas parallèle à Ox, il y a des parallèles à Oy qui rencontrent cette extrémale en deux points. Le problème, tel qu'il a été posé au n° 621, n'a donc pas de solution dans ce cas; cependant, si l'on écrit l'intégrale $\mathrm{J} = \int y\,dx + a\,ds$, cette intégrale, prise le long de la demi-circonférence, a encore un sens, et nous vérifierons un peu plus loin (n° 647) que la première variation de J est nulle quand on compare sa valeur le long de la demi-circonférence à sa valeur prise le long d'une courbe infiniment voisine ayant les mêmes extrémités.

Nous allons exposer la théorie de Weierstrass en nous bornant aux courbes planes, et en insistant surtout sur les différences de la nouvelle théorie avec les précédentes.

Nous dirons qu'un arc de courbe Γ est de classe C^1, si l'on peut représenter les coordonnées d'un point quelconque M de cet arc par deux fonctions

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \tag{80}$$

d'un paramètre auxiliaire t, qui sont continues et admettent des dérivées premières continues $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ *qui ne peuvent s'annuler simultanément* lorsque t varie de t_0 à t_1, valeurs du paramètre qui correspondent aux extrémités A et B de Γ. On peut toujours supposer $t_0 < t_1$; c'est ce que nous ferons désormais. Nous appellerons A le point qui correspond à la valeur t_0, B le point qui correspond à la valeur t_1, *sens positif* sur l'arc AB le sens de parcours d'un mobile qui décrit cet arc en marchant constamment de A vers B. Lorsque t croît de t_0 à t_1, le point de coordonnées $\varphi(t)$, $\psi(t)$ décrit l'arc AB dans le sens positif, puisque les deux dérivées $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ne peuvent s'annuler pour une même valeur de t. Si cet arc ne présente pas de point double, à tout point M de cet arc correspond une valeur et une seule de t entre t_0 et t_1. Nous désignerons par θ l'angle que fait la direction positive de la tangente avec Ox, cet angle étant compté comme en Trigonométrie et n'étant défini qu'à un multiple près de 2π. Les cosinus directeurs de cette direction positive de la tangente, c'est-à-dire les cosinus des angles (comptés de o à π) qu'elle fait avec Ox et Oy, sont $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Tout système de deux nombres $K\cos\theta$, $K\sin\theta$, où K est un nombre positif quelconque, constitue un système de paramètres directeurs pour cette tangente. On peut prendre pour paramètres directeurs les dérivées $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, puisqu'on a

$$\varphi' = \cos\theta\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}, \qquad \psi' = \sin\theta\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}.$$

Toute courbe Γ de classe C_1 admet une infinité de représentations paramétriques de cette espèce. En effet, si les formules (80) fournissent une représentation, on en obtiendra une nouvelle en remplaçant dans ces formules t par une fonction $\pi(\tau)$ d'une variable τ, continue et croissante de t_0 à t_1 lorsque τ croît de τ_0 à τ_1, et ayant

une dérivée continue $\pi'(\tau)$ qui ne s'annule pas entre τ_0 et τ_1. On passerait de cette représentation à la première en remplaçant τ par la fonction inverse $\pi^{-1}(t)$. En particulier, on pourra toujours supposer effectuée une substitution linéaire, $t = \alpha\tau + \beta$, de façon que les limites soient des nombres donnés à l'avance, 0 et 1 par exemple.

Cela posé, soit $F(x, y; x', y')$ une fonction des quatre variables x, y, x', y', continue et admettant les dérivées partielles continues jusqu'au troisième ordre, lorsque le point (x, y) reste dans une région $\mathcal{R}$ du plan, pour tout système de valeurs finies de x', y', tel que $x'^2 + y'^2$ ne soit pas nul. Soit Γ une courbe de classe C^1 située dans $\mathcal{R}$; si les formules (80) donnent une représentation paramétrique de cette courbe satisfaisant aux conditions qui viennent d'être expliquées, l'intégrale définie

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[\varphi(t), \psi(t); \varphi'(t), \psi'(t)]\, dt \tag{81}$$

a une valeur déterminée qui dépend non seulement de la courbe Γ elle-même, mais aussi du mode de représentation adopté, si la fonction F est quelconque. Nous allons d'abord chercher à quelles conditions doit satisfaire la fonction F pour que la valeur de J ne dépende que de la courbe Γ elle-même et du sens de parcours adopté, et soit indépendante du mode de représentation. Il faut et il suffit pour cela que l'intégrale de même forme que J, provenant d'une autre représentation, ait la même valeur que la première. En remplaçant dans les formules (80) t par une fonction $\pi(\tau)$, satisfaisant aux conditions qui ont été spécifiées tout à l'heure, on a une nouvelle représentation paramétrique de la courbe Γ, où φ, ψ, φ', ψ' sont remplacées respectivement par $\varphi[\pi(\tau)]$, $\psi[\pi(\tau)]$, $\varphi'(\pi)\pi'$, $\psi'(\pi)\pi'$ et la valeur de l'intégrale (81) relative à cette nouvelle représentation est

$$J' = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\{\varphi[\pi(\tau)], \psi[\pi(\tau)]; \varphi'[\pi(\tau)]\pi'(\tau), \psi'[\pi(\tau)]\pi'(\tau)\}\, d\tau. \tag{82}$$

Si l'on fait dans cette intégrale le changement de variable $\pi(\tau) = u$, elle devient

$$J' = \int_{t_0}^{t_1} F[\varphi(u), \psi(u); \varphi'(u)\pi'(\tau), \psi'(u)\pi'(\tau)] \frac{du}{\pi'(\tau)}. \tag{82'}$$

Pour que les intégrales (81) et (82)' soient égales quelles que soient la courbe Γ et la représentation paramétrique, il faut et il suffit que les éléments soient égaux, c'est-à-dire qu'on ait identiquement

$$F[\varphi(u), \psi(u); \varphi'(u)\pi'(\tau), \psi'(u)\pi'(\tau)] = \pi'(\tau)F[\varphi(u), \psi(u); \varphi'(u), \psi'(u)],$$

la fonction $\pi'(\tau)$ ayant une valeur positive quelconque. Nous dirons avec M. Bolza qu'une fonction $F(x, y; x', y')$ est *positivement homogène en* x', y', et de degré m, si l'on a, *pour toute valeur positive de* K,

$$(83) \qquad F(x, y; Kx', Ky') = K^m F(x, y; x', y').$$

Le résultat de la discussion précédente peut alors s'énoncer comme il suit : *Pour que la valeur de l'intégrale* (81) *ne dépende que de l'arc* AB *de classe* C^1 *et du sens de parcours adopté, il faut et il suffit que* $F(x, y; x', y')$ *soit positivement homogène du premier degré en* x', y'.

On représente cette intégrale par l'une ou l'autre des notations

$$J_\Gamma = \int_{AB} F[x, y; x'(t), y'(t)]\, dt = \int_{AB} F(x, y; dx, dy),$$

où la variable t n'est pas spécifiée.

Remarques. — 1° Une fonction rationnelle en x', y', qui satisfait à cette condition, est homogène au sens absolu du mot, car elle est le quotient de deux polynomes homogènes en x', y' de degrés m et $m-1$ respectivement. Il n'en est pas de même d'une fonction irrationnelle; par exemple, le radical $\sqrt{x'^2+y'^2}$, pris positivement, est bien positivement homogène, mais si l'on change x' en Kx', y' en Ky', K *étant négatif*, on a

$$\sqrt{K^2x'^2+K^2y'^2} = -K\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

L'expression $ax'+by'+\sqrt{x'^2+y'^2}$ est la somme de deux termes positivement homogènes, dont l'un change de signe quand on change x en $-x$ y' en $-y'$, tandis que l'autre ne change pas.

2° Quand on change le sens de parcours sur Γ, l'intégrale le long de BA a pour valeur

$$J_{BA} = \int_{-t_1}^{-t_0} F[\varphi(-t), \psi(-t); -\varphi'(-t), -\psi'(-t)]\, dt$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} F[\varphi(u), \psi(u); -\varphi'(u), -\psi'(u)]\, du;$$

si la fonction f est homogène en x', y', au sens absolu du mot, on a $J_{BA} = -J_{AB}$. Au contraire, si $F(x, y; -x', -y') = F(x, y; x', y')$, on a $J_{BA} = J_{AB}$, et la valeur de l'intégrale ne dépend pas du sens de parcours. L'exemple le plus simple est fourni par l'intégrale $\int \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$.

3° Dans le cas particulier où la courbe Γ est une courbe de classe (I), si l'on a en outre $x_0 < x_1$, on peut prendre pour représentation paramétrique $x = t$, $y = f(t)$, et l'intégrale prend la forme considérée jusqu'ici

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y'_x)\, dx.$$

Inversement, toute intégrale $\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\, dx$, prise le long d'une courbe Γ de classe (I) peut se mettre d'une infinité de manières sous forme paramétrique. Si, par exemple, on a $x_0 < x_1$, il suffira de poser $x = \varphi(t)$, $\varphi(t)$ étant une fonction de classe (I) telle que x croisse de x_0 à x_1 lorsque t croît de t_0 à t_1, puis $\psi(t) = f[\varphi(t)]$, et l'intégrale prend la forme paramétrique

$$\int_{t_0}^{t_1} G\left[\varphi(t), \psi(t); \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] \varphi'(t)\, dt.$$

La fonction

$$F[x, y; x'(t), y'(t)] = G(x, y; y'_x) x'$$

satisfait bien à la condition d'homogénéité. Mais, pour que cette transformation présente quelque intérêt, il faut que la forme paramétrique de l'intégrale s'applique à toutes les courbes de classe C^1, au moins dans un certain domaine. Par exemple, l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} y'^2\, dx$ peut s'écrire sous forme paramétrique $\int \frac{y'^2(t)}{x'(t)}\, dt$, et cette nouvelle intégrale n'a pas de valeur finie pour une courbe de classe C^1 qui a une tangente parallèle à Oy.

646. **Nouveau problème.** — Soit $F(x, y; x', y')$ une fonction satisfaisant aux conditions de continuité et à la condition d'homogénéité qui ont été expliquées ; à toute courbe de classe C^1 située dans la région $\mathcal{R}$, et décrite dans un sens déterminé, correspond une valeur déterminée de l'intégrale J. On peut se proposer pour ces intégrales les mêmes problèmes d'extremum qu'aux nos 621-631 et suivants, mais il est nécessaire de définir d'une façon précise ce qu'on doit entendre par le *voisinage* d'une courbe de cette espèce. Ce voisinage ne peut plus être limité par deux segments de parallèles à Oy passant par les points A et B, et doit renfermer ces points à l'intérieur. Dans la suite, nous appellerons *voisinage*

d'un arc AB *de classe* C^1 la portion du plan balayée par un cercle de rayon ρ dont le centre décrit l'arc AB, et nous le désignerons par $\mathcal{D}_\rho$ ou $\mathcal{D}$; bien entendu le nombre ρ est supposé assez petit pour que $\mathcal{D}_\rho$ soit tout entier dans la région $\mathcal{R}$. Cela posé, nous dirons que la courbe Γ donne un minimum relatif de l'intégrale J, s'il existe un nombre positif ρ assez petit pour que la valeur de l'intégrale J_Γ soit inférieure ou au plus égale à la valeur de la même intégrale prise le long de toute autre courbe de classe C^1, située dans $\mathcal{D}_\rho$, ayant les mêmes extrémités que Γ. Le maximum relatif se définit de la même façon.

Supposons que la courbe Γ définie par les formules

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

où $x(t), y(t)$ sont des fonctions de classe (I) dans l'intervalle (t_0, t_1), où $t_0 < t_1$, donne un extremum de l'intégrale J. Soient $\xi(t)$, $\eta(t)$ deux fonctions de classe (I) dans le même intervalle, nulles aux deux limites. Il est évident que la courbe représentée par les formules $x = x(t) + \alpha\xi(t)$, $y = y(t) + \alpha\eta(t)$ est située dans le domaine $\mathcal{D}_\rho$ pourvu que $|\alpha|$ soit assez petit, et l'intégrale

$$(84) \quad J(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t)+\alpha\xi(t), y(t)+\alpha\eta(t), x'(t)+\alpha\xi'(t), y'(t)+\alpha\eta'(t)]\,dt$$

doit être maximum ou minimum pour la valeur $\alpha = 0$. On peut calculer la première et la seconde variation par les formules générales des nos 621 et 631, mais, à cause de la propriété d'homogénéité de F, on a, entre les dérivées partielles de cette fonction, des relations qui permettent de simplifier les expressions générales obtenues plus haut pour δI, $\delta^2 I$. De la relation $F = x'F'_{x'} + y'F'_{y'}$, qui est une conséquence de l'homogénéité, on tire en effet les relations suivantes :

$$F'_x = x'F''_{xx'} + y'F''_{xy'}, \qquad F'_y = x'F''_{x'y} + y'F''_{yy'},$$
$$x'F''_{x'^2} + y'F''_{x'y'} = 0, \qquad x'F''_{x'y'} + y'F''_{y'^2} = 0.$$

Les deux dernières prouvent que les dérivées du second ordre $F''_{x'^2}$, $F''_{x'y'}$, $F''_{y'^2}$, sont respectivement proportionnelles à y'^2, $-x'y'$, x'^2. Nous poserons

$$(85) \quad F''_{x'^2} = y'^2 F_1(x, y; x', y'), \qquad F''_{x'y'} = -x'y'F_1, \qquad F''_{y'^2} = x'^2 F_1;$$

la fonction $F_1(x, y; x', y')$ ainsi définie est continue et admet des dérivées continues dans $\mathcal{R}$, pourvu que $x'^2 + y'^2$ ne soit pas nul. Mais il peut se faire que F_1 devienne infinie pour $x' = y' = 0$, même si F reste finie; par exemple, si $F = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, on a

$$F_1 = \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Remarque. — Si l'intégrale J admet un extremum relatif fourni par une courbe Γ de classe C^1, il est clair que cette courbe Γ fournira *a fortiori* un extremum relatif pour les courbes de classe (I) ayant les mêmes extrémités. Mais la réciproque n'est pas vraie. Il peut se faire qu'une courbe Γ de classe (I) donne un extremum d'une intégrale quand on ne compare que les valeurs de l'intégrale prises suivant des courbes de la même classe (I), et ne donne plus d'extremum quand on compare la valeur de l'intégrale J_Γ aux valeurs de J prises suivant les courbes de la classe plus générale C^1 ayant les mêmes extrémités que Γ. Par exemple, il est évident que l'intégrale $J = \int_0^2 \frac{dx}{1 + y'^2}$, prise le long du segment (0, 2) de l'axe des x, est plus grande que la valeur de la même intégrale prise suivant toute autre courbe de classe (I) ayant les mêmes extrémités. Mais si l'on écrit l'intégrale sous forme paramétrique $\int \frac{x'^3\, dt}{x'^2 + y'^2}$, on peut trouver des courbes de classe C^1, infiniment voisines du segment (0, 2), donnant pour l'intégrale une valeur supérieure à 2.

Considérons, en effet, la ligne brisée formée de trois segments, dont le premier joint l'origine au point $x = 1 + h$, $y = h$, le second joint ce point au point $x = 1$, $y = 0$ et, enfin, du segment (1, 2). La valeur de l'intégrale suivant cette ligne est égale à $2 + \frac{h}{2(1 + 2h + 2h^2)}$, et, par conséquent, supérieure à 2, si h est > 0. On démontre, comme au nº 630, qu'on peut remplacer cette ligne brisée par une courbe infiniment voisine de classe C^1, telle que l'intégrale le long de C^1 diffère de l'intégrale le long de la ligne brisée d'aussi peu qu'on le veut. Cette remarque, rapprochée de celle qui termine le numéro précédent, montre que le nouveau problème d'extremum et celui qui a été traité déjà sont essentiellement différents.

647. Forme générale de l'équation d'Euler. — Pour que la première variation de l'intégrale (84) soit nulle pour toutes les formes possibles des fonctions $\xi(x)$, $\eta(x)$, les fonctions $x(t)$, $y(t)$ doivent vérifier les deux relations (nº 623)

$$(86) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0.$$

Ces deux équations ne sont pas indépendantes, car, en tenant compte des relations entre les dérivées de F, les premiers membres développés sont de la forme $x'T$, $y'T$; et, comme x' et y' ne peuvent s'annuler à la fois. les deux relations (86) se réduisent à la seule équation

$$(87) \qquad T = F_1(x'y'' - y'x'') + F''_{xy'} - F''_{yx'} = 0.$$

On n'a donc qu'une seule équation pour déterminer les deux fonctions inconnues $x(t)$, $y(t)$, mais cette relation est suffisante pour déterminer les courbes extrémales elles-mêmes, abstraction faite de leur représentation paramétrique. En effet, cette équation est de la forme $x'y'' - y'x'' = x'^3\Phi$, la fonction Φ étant positivement homogène de degré zéro en x', y'; elle ne change donc pas de forme, comme on devait s'y attendre, quand on remplace t par une fonction quelconque $\pi(\tau)$ d'une autre variable τ, dont la dérivée est positive. Il s'ensuit que, pour trouver toutes les solutions de l'équation (87), on peut choisir arbitrairement le paramètre variable t, à la seule condition que ce paramètre aille en croissant quand le point (x, y) décrit la courbe dans le sens positif. En particulier, si l'on suppose que la courbe cherchée est de classe (I). et $x_0 < x_1$, on peut prendre $x = t$, et l'équation (87) devient identique à l'équation d'Euler qu'on obtiendrait en égalant à zéro la première variation de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y; 1, y'_x)\,dx$. L'équation (87) n'est donc au fond que l'équation d'Euler mise sous une forme symétrique, où la variable indépendante est laissée indéterminée. Au point de vue de l'intégration formelle, les deux problèmes présentent les mêmes difficultés, mais l'équation (87) peut admettre des solutions formées de droites $x = C$, qui ne peuvent se présenter quand x est la variable indépendante. Tel est le cas où F est de la forme $g(y)\sqrt{x'^2 + y'^2}$; l'équation (87) est alors satisfaite en posant $x' = 0$, et les parallèles à l'axe des y sont des extrémales pour le problème généralisé.

Pour achever de déterminer une courbe extrémale quand on se donne un point A et la direction de la tangente en ce point, il faut établir quelque autre relation entre $x(t)$ et $y(t)$. Si l'on prend pour variable t l'arc de l'extrémale compté à partir du point A, on ajoutera à l'équation (87) la relation $x'x'' + y'y'' = 0$, et l'on prendra pour valeurs initiales $x = x_0$,

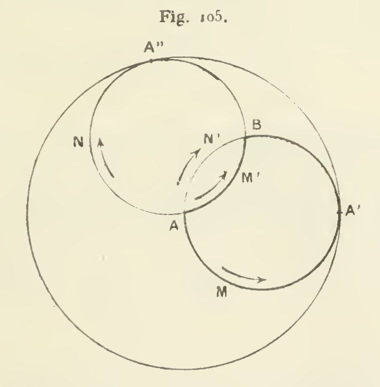
$y = y_0$, $x' = \cos\theta_0$, $y' = \sin\theta_0$, θ_0 étant l'angle de la direction positive de la tangente en A avec Ox. Les deux équations $T = 0$, $x'x'' + y'y'' = 0$ donnent pour x'', y'' des fonctions continues de x, y, x', y' dans le voisinage des valeurs initiales pourvu que $F_1(x_0, y_0; \cos\theta_0, \sin\theta_0)$ ne soit pas nul, et, par suite, il y a, dans ce cas, une seule extrémale répondant à ces conditions initiales. Si la fonction $F(x, y; \cos\theta, \sin\theta)$ ne s'annule pour aucune valeur de θ dans la région $\mathcal{R}$, de tout point de cette région, il part donc une extrémale et une seule dans chaque direction. Le problème est dit *régulier*.

Exemple. — Soit $F = yx + a\sqrt{x'^2 + y'^2}$ (*cf* nº 628). Le système à intégrer est $x'y'' - y'x'' = \frac{1}{a}(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$, $x'^2 + y'^2 = 1$. En posant $x' = \cos\theta$, $y' = \sin\theta$, il vient $\theta' = \frac{1}{a}$, et l'extrémale cherchée est un arc de cercle de rayon a, représenté par les deux équations

$$x = x_0 + a\sin\left(\theta_0 + \frac{s}{a}\right) - a\sin\theta_0, \qquad y = y_0 - a\cos\left(\theta_0 + \frac{s}{a}\right) + a\cos\theta_0.$$

Par deux points A et B dont la distance est inférieure à $2a$ passent deux de ces arcs de cercle, marqués en traits pleins sur la figure, pour lesquels

Fig. 105.



θ croît avec s. Les arcs marqués en traits fins pour lesquels θ diminue quand s augmente sont de même des extrémales pour l'intégrale obtenue en changeant le signe du radical dans F.

Remarque. — Lorsque les extrémités A et B sont elles-mêmes variables, la formule générale (19), qui donne la première variation δI, se simplifie

et ne renferme plus de terme en δt, d'après la relation d'homogénéité. Elle devient dans ce cas

$$(88)\qquad \delta I = (F'_{x'}\delta x + F'_{y'}\delta y)_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \delta x \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right] dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta y \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] dt;$$

ce résultat pouvait être prévu, puisqu'on peut toujours choisir la variable t de façon que les limites soient les mêmes pour un arc AB et pour un arc infiniment voisin A′B′. La condition de transversalité devient ici

$$(89)\qquad F'_{x'}(x, y; x', y')\,\delta x + F'_{y'}(x, y; x', y')\,\delta y = 0,$$

x', y' étant les paramètres directeurs de la tangente à l'extrémale au point (x, y), δx et δy les paramètres directeurs de la tangente à la courbe qu'elle coupe transversalement.

648. **Conditions de Legendre et de Jacobi.** — Soient $x(t)$, $y(t)$ un système de solutions de l'équation (87), continues ainsi que x', x'', y', y'' dans l'intervalle (t_0, t_1). Dans l'expression de la seconde variation $\delta^2 I$ de l'intégrale (84) figure sous le signe $\int$ une forme quadratique en ξ, η, ξ', η',

$$(90)\qquad G(\xi, \eta; \xi', \eta') = F''_{x'^2}\xi'^2 + 2F''_{x'y'}\xi'\eta' + F''_{y'^2}\eta'^2 + 2F''_{xx'}\xi\xi' + 2F''_{xy'}\xi\eta' + 2F''_{x'y}\eta\xi' + 2F''_{yy'}\eta\eta' + F''_{x^2}\xi^2 + 2F''_{xy}\xi\eta + F''_{y^2}\eta^2,$$

que Weierstrass transforme comme il suit. Les coefficients de ξ'^2, $\xi'\eta'$, η'^2 sont respectivement $y'^2 F_1$, $-x'y'F_1$, $x'^2 F_1$. Les coefficients de $\xi\eta'$ et de $\eta\xi'$ sont liés par la relation (87); si, pour plus de symétrie, on introduit trois fonctions auxiliaires L, M, N définies par les relations

$$(91)\qquad \begin{cases} L = F''_{xx'} - y'y''F_1, & M = F''_{xy'} + x'y''F_1 = F''_{yx'} + y'x''F_1, \\ & N = F''_{yy'} - x'x''F_1, \end{cases}$$

on peut écrire

$$G(\xi, \eta; \xi', \eta') = F_1(\xi'y' - \eta'x' + \xi y'' - \eta x'')^2 - F_1(\xi y'' - \eta x'')^2 + 2L\xi\xi' + 2M(\xi\eta' + \xi'\eta) + 2N\eta\eta' + F''_{x^2}\xi^2 + 2F''_{xy}\xi\eta + F''_{y^2}\eta^2;$$

on a donc, au moyen d'une intégration par parties évidente,

$$\delta^2 I = \alpha^2 \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + L_1\xi^2 + 2M_1\xi\eta + N_1\eta^2 \right\} dt,$$

où l'on a posé

$$(92)\quad \begin{cases} w = \xi y' - \eta x', & L_1 = F''_{x'^2} - F_1 y''^2 - \dfrac{dL}{dt}, \\ M_1 = F''_{x'y'} + F_1 x'' y'' - \dfrac{dM}{dt}, & N_1 = F''_{y'^2} - F_1 x'^2 - \dfrac{dN}{dt}. \end{cases}$$

La forme $L_1 \xi^2 + 2 M_1 \xi\eta + N_1 \eta^2$ est elle-même un carré parfait. Il est en effet facile de vérifier qu'on a, par exemple,

$$L_1 x' + M_1 y' = 0;$$

la vérification est aisée en tenant compte de l'identité

$$L x' + M y' = F'_x,$$

et de celle qu'on en déduit en différentiant par rapport à t, ainsi que de l'équation (87) elle-même. On montrerait de même qu'on a aussi $M_1 x' + N_1 y' = 0$. Les fonctions L_1, M_1, N_1 sont donc proportionnelles à y'^2, $-x'y'$, x'^2, et l'on a

$$L_1 = y'^2 F_2, \qquad M_1 = -x'y' F_2, \qquad N_1 = x'^2 F_2;$$

la fonction F_2 est elle-même une fonction continue de t puisque x' et y' ne peuvent s'annuler pour une même valeur de t entre t_0 et t_1. La seconde variation $\delta^2 J$ prend donc la forme très simple

$$(93)\qquad \delta^2 J = \alpha^2 \int_{t_0}^{t_1} \left[F_1 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + F_2 w^2 \right] dt,$$

et ne dépend que d'une fonction linéaire $w = \xi y' - \eta x'$, qui est de classe (I) dans l'intervalle $(t_0\, t_1)$ et s'annule aux deux extrémités. Nous pouvons appliquer à cette intégrale les résultats obtenus aux nos 631-632. Pour que $\delta^2 J$ ait un signe constant, soit positif par exemple, il faut et il suffit : 1° que $F_1 \,|\, x(t), y(t); x'(t), y'(t) \,|$ soit positif dans l'intervalle (t_0, t_1) (*condition de Legendre*); 2° que l'équation linéaire

$$(94)\qquad \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt} \right) - F_2 u = 0$$

admette une intégrale qui ne s'annule pas dans cet intervalle (*condition de Jacobi*).

Cette dernière condition peut s'énoncer autrement (n° 632). Soient $u_1(t)$ une intégrale de l'équation (94) qui est nulle pour $t = t_0$ et t'_0 la racine $u_1(t)$ immédiatement supérieure à t_0; *on doit avoir* $t_1 < t'_0$.

M. Kneser a montré que la condition de Jacobi peut s'interpréter géométriquement de la même façon qu'au n° 633. Soient

$$x = \varphi(t, \lambda), \qquad y = \psi(t, \lambda)$$

les équations d'un faisceau d'extrémales infiniment voisines de l'extrémale considérée; les fonctions φ et ψ se réduisent respectivement à $x(t)$, $y(t)$ pour $\lambda = 0$. Ces dérivées

$$\varphi_1(t) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0}, \qquad \psi_1(t) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0}$$

vérifient une équation différentielle qu'on déduit de l'équation d'Euler en différentiant par rapport au paramètre λ et faisant ensuite $\lambda = 0$ dans le résultat. Si l'on prend l'équation sous la forme $F'_x - \frac{d}{dt}(F'_{x'}) = 0$, on obtient après différentiation l'équation linéaire

$$F''_{x^2}\varphi_1 + F''_{xy}\psi_1 + F''_{xx'}\frac{d\varphi_1}{dt} + F''_{xy'}\frac{d\psi_1}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(F''_{xx'}\varphi_1 + F''_{yx'}\psi_1 + F''_{x'^2}\frac{d\varphi_1}{dt} + F''_{x'y'}\frac{d\psi_1}{dt}\right),$$

où l'on suppose $\lambda = 0$ dans les dérivées secondes. En exprimant toutes les dérivées secondes de F au moyen de F_1, F_2, L, M, N, on trouve, après quelques réductions, que le résultat peut s'écrire

$$(95) \qquad y'\left[F_2\omega - \frac{d}{dt}\left(F_1\frac{d\omega}{dt}\right)\right] = 0,$$

où l'on a posé $\omega = y'\varphi_1(t) - x'\psi_1(t)$. En écrivant l'équation d'Euler sous la forme $F'_y - \frac{d}{dt}(F'_{y'}) = 0$, on obtiendrait la même équation (95), sauf que y' serait remplacé par x'. La fonction $y'\varphi_1(t) - x'\psi_1(t)$ est donc une intégrale de l'équation de Jacobi (94), qui se trouve ainsi rattachée à l'étude des extrémales infiniment voisines de l'extrémale représentée par les équations $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Considérons en particulier le faisceau des extrémales issues du point A, infiniment voisines de la première. Il est clair que les fonctions $\varphi_1(t)$ et $\psi_1(t)$ sont nulles pour $t = t_0$, puisque $\varphi(t_0, \lambda)$ et $\psi(t_0, \lambda)$ sont indépendants de λ; le déterminant $y'\varphi_1 - x'\psi_1$ est donc une intégrale de l'équation de Jacobi s'annulant

pour $t = t_0$. Les autres racines de ce jacobien correspondent aux points de rencontre de l'extrémale avec une extrémale infiniment voisine du même faisceau ([1]). Si donc on appelle *foyers conjugués* du point A les autres points où cette extrémale touche l'enveloppe des extrémales issues de A, la condition de Jacobi exprime que *tous les foyers conjugués du point* A *sont en dehors de l'arc* AB.

Lorsque la condition de Jacobi est vérifiée, on démontre comme au n° 638 que l'arc d'extrémale AB peut être entouré d'un champ. On peut prendre par exemple, pour former ce champ, le faisceau des extrémales infiniment voisines de la première issues d'un point $\mathfrak{A}$ pris sur le prolongement de l'arc AB au delà du point A et assez voisin de A pour que tous les foyers conjugués de $\mathfrak{A}$ soient en dehors de l'arc AB.

Dans l'exemple cité plus haut (n° 647), l'enveloppe des extrémales issues de A est la circonférence de centre A et de rayon $2a$. La condition de Jacobi n'est vérifiée que pour le plus petit des arcs d'extrémale AM'B; l'arc AMB contient au contraire le foyer conjugué A' de A.

649. Condition de Weierstrass. — Les raisonnements qui ont conduit à la condition de Weierstrass (n° 636) s'étendent sans modification essentielle au nouveau problème. Soient AB un arc d'extrémale, P un point de cet arc et Γ une courbe d'espèce C^1 passant en ce point. On peut imaginer comme plus haut un faisceau de courbes d'espèce C^1 joignant le point A à un point Q voisin de P sur Γ et se réduisant à l'arc d'extrémale AP lorsque le point Q vient en P (*fig.* 103). Si $x(t)$, $y(t)$ sont les coordonnées d'un point de l'arc AP, (x_2, y_2) les coordonnées du point Q, on peut prendre par exemple l'arc AQ défini par les formules

$$x = x(t) + (t - t_0)\frac{x_2 - x(\tau)}{\tau - t_0}, \qquad y = y(t) + (t - t_0)\frac{y_2 - y(\tau)}{\tau - t_0},$$

τ étant la valeur du paramètre t qui correspond au point P.

---

[1] D'une façon générale, si une famille de courbes planes dépendant d'une constante λ est représentée paramétriquement par les formules $x = \varphi(t, \lambda)$, $y = \psi(t, \lambda)$, l'enveloppe de cette famille de courbes s'obtient en ajoutant aux équations précédentes la relation $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(t, \lambda)} = 0$, dont les racines font connaître, pour chaque valeur de λ, les points de contact de la courbe qui correspond à cette valeur de λ avec son enveloppe.

L'intégrale

$$J_1 = \int_{AQ} F(x, y; x', y')\, dt$$

est une fonction de l'arc $PQ = s$ dont la dérivée, prise pour $s = 0$, a pour expression, d'après la formule générale (19) qui donne la première variation,

$$\left(\frac{dJ_1}{ds}\right)_0 = \cos\theta_1 F'_{x'}(x, y; \cos\theta, \sin\theta) + \sin\theta_1 F'_{y'}(x, y; \cos\theta, \sin\theta),$$

$\cos\theta$, $\sin\theta$ étant les cosinus directeurs de la direction positive de la tangente en P à l'extrémale, et $\cos\theta_1$, $\sin\theta_1$ les cosinus directeurs de la tangente en P à Γ prise dans le sens PQ. De même l'intégrale J_2 prise le long de QP est une fonction de s dont la dérivée pour $s = 0$ est égale à $F(x, y; -\cos\theta_1, -\sin\theta_1)$, comme on le voit, en réduisant cette intégrale à son premier élément. La dérivée de la somme $J_1 + J_2$, qui représente l'intégrale

$$\int F(x, y; x', y')\, dt$$

prise le long du chemin AQP, est donc égale, pour $s = 0$, à l'expression

$$F(x, y; -\cos\theta_1, -\sin\theta_1) + \cos\theta_1 F'_{x'}(x, y; \cos\theta, \sin\theta) \\ + \sin\theta_1 F'_{y'}(x, y; \cos\theta, \sin\theta).$$

On représente cette expression par une notation abrégée, en posant

$$(96) \quad E(x, y; p, q; p', q') \\ = F(x, y; p', q') - p' F'_{x'}(x, y; p, q) - q' F'_{y'}(x, y; p, q),$$

ce qu'on peut encore écrire, d'après l'homogénéité de F, sous l'une ou l'autre des deux formes (*cf.* n° 646),

$$(96)' \quad F(x, y; p', q') - F(x, y; p, q) - (p' - p) F'_{x'}(x, y; p, q) \\ - (q' - q) F'_{y'}(x, y; p, q),$$

$$(96)'' \quad p'\left\{F'_{x'}(x, y; p', q') - F'_{x'}(x, y; p, q)\right\} \\ + q'\left\{F'_{y'}(x, y; p', q') - F'_{y'}(x, y; p, q)\right\}.$$

Le raisonnement s'achève comme au n° 636; en changeant θ_1 en $\pi - \theta'$, on arrive à une nouvelle condition nécessaire : *pour que l'arc d'extrémale* AB *fournisse un minimum de l'intégrale, il est nécessaire que la fonction*

$$E(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\theta', \sin\theta')$$

ne prenne jamais de valeur négative le long de l'arc AB, *quel que soit l'angle* θ'.

On peut encore énoncer cette condition comme il suit : x, y étant les coordonnées d'un point quelconque de l'arc d'extrémale, x', y' un système de paramètres directeurs pour la direction positive de la tangente en ce point, *on doit avoir, en tout point de l'arc d'extrémale,*

(97) $$E(x, y; x', y'; x'_1, y'_1) \geqq 0$$

pour tout système de valeurs de x'_1, y'_1.

Weierstrass a montré aussi que la fonction E s'exprime très simplement au moyen de F_1 ; en prenant pour E la forme (96)'', on a

$$\begin{aligned} &E(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\theta' \sin\theta') \\ &= \quad \cos\theta'[F'_{x'}(x, y; \cos\theta', \sin\theta') - F'_{x'}(x, y; \cos\theta, \sin\theta)] \\ &\quad + \sin\theta'[F'_{y'}(x, y; \cos\theta', \sin\theta') - F'_{y'}(x, y; \cos\theta, \sin\theta)], \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$\int_\theta^{\theta'} \left\{ \cos\theta' \frac{d}{dt}[F'_{x'}(x, y; \cos t, \sin t)] + \sin\theta' \frac{d}{dt}[F'_{y'}(x, y; \cos t, \sin t)] \right\} dt.$$

En remplaçant les dérivées secondes $F''_{x'^2}$, $F''_{x'y'}$, $F''_{y'^2}$ par leurs expressions au moyen de F_1, on a encore

$$\begin{aligned} E &= \int_\theta^{\theta'} \sin(\theta' - t) F_1(x, y; \cos t, \sin t)\, dt \\ &= \int_0^{\theta'-\theta} \sin(\theta' - \theta - \tau) F_1[x, y; \cos(\theta + \tau), \sin(\theta + \tau)]\, d\tau. \end{aligned}$$

Les angles θ et θ' n'étant déterminés qu'à un multiple près de 2π, on peut supposer $\theta' - \theta$ compris entre $-\pi$ et $+\pi$, de sorte que $\sin(\theta' - \theta - \tau)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $(0, \theta' - \theta)$. On peut donc appliquer à la dernière intégrale la première formule de la moyenne (I, n° 76), ce qui donne

(98) $$\begin{aligned} &E(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\theta', \sin\theta') \\ &\quad = [1 - \cos(\theta' - \theta)] F_1(x, y; \cos\theta_1, \sin\theta_1), \end{aligned}$$

θ_1 étant compris entre θ et θ'.

Il suit de là que la *condition de Weierstrass sera certainement vérifiée si la fonction* $F_1(x, y; \cos\theta_1, \sin\theta_1)$ *ne prend jamais de valeur négative le long de l'arc d'extrémale* AB, *quel que soit l'angle* θ_1.

D'autre part, le rapport

$$\frac{E(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\theta', \sin\theta')}{1 - \cos(\theta' - \theta)}$$

tend vers $F_1(x, y; \cos\theta, \sin\theta)$ lorsque θ' tend vers θ et, par suite, la condition de Legendre résulte aussi de la condition de Weierstrass sous sa première forme.

Remarque. — Lorsque la fonction $F(x, y; x', y')$ est homogène au sens absolu du mot, la fonction $E(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\theta', \sin\theta')$ change de signe quand on change θ en $\pi + \theta'$, et, comme la condition (97) doit être vérifiée quel que soit l'angle θ', il s'ensuit que $E(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\theta', \sin\theta')$ doit être nul tout le long de l'arc d'extrémale AB, quel que soit l'angle θ', ce qui exige en particulier, d'après la relation (98), que $F_1(x, y; \cos\theta, \sin\theta)$ soit nul tout le long de AB.

Un arc d'extrémale ne peut donc fournir d'extremum que dans des cas tout à fait exceptionnels, lorsque F est de cette forme. C'est ce qui arrive, par exemple, lorsque F est une fonction rationnelle de x', y' (*cf.* n° 645).

650. **Système de conditions suffisantes.** — Inversement, les conditions précédentes sont suffisantes pour le minimum, tout au moins quand on les prend *au sens strict*, en excluant les signes d'égalité. D'une façon précise, un arc d'extrémale $\mathcal{G}_0$ joignant deux points A et B de la région $\mathcal{R}$ donne un minimum de l'intégrale, s'il satisfait aux conditions suivantes :

1° *Tout le long de* $\mathcal{G}_0$, *on a*

$$F_1(x, y; \cos\theta, \sin\theta) > 0,$$

θ *ayant la même signification que plus haut;*

2° *La condition de Jacobi est vérifiée et, par conséquent, on peut entourer* $\mathcal{G}_0$ *d'un champ d'extrémales, par chaque point duquel passe une extrémale d'un faisceau spécial dont fait partie* $\mathcal{G}_0$;

3° *Tout le long de* $\mathcal{G}_0$, *on a, pour toute valeur de* $\theta' \neq \theta + 2K\pi$,

$$E(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\theta', \sin\theta') > 0.$$

Dans ces conditions [1], nous allons établir qu'on peut trouver un

[1] Les conditions 1° et 3° sont certainement vérifiées si la fonction

$$F_1(x, y; x', y')$$

est *positive* dans le domaine $\mathcal{R}$, quelles que soient les valeurs de x', y', c'est-à-dire si le problème est *régulier* (n° 647). Il suffira donc, pour qu'une extrémale donne un minimum, qu'elle vérifie la condition de Jacobi.

nombre positif ρ assez petit pour que toute courbe de classe C^1 située dans le domaine $\mathcal{D}_\rho$, et joignant les deux points A et B, donne pour l'intégrale J une valeur plus grande que l'arc d'extrémale $\mathcal{G}_0$. Considérons pour cela un faisceau spécial d'extrémales dont $\mathcal{G}_0$ fait partie, et soit $\mathcal{D}$ le champ correspondant. Par tout point (x, y) de ce champ passe une extrémale de ce faisceau et les cosinus directeurs de la direction positive de la tangente en ce point $(\cos u, \sin u)$ sont des fonctions continues des variables (x, y) qui deviennent égales à $\cos\theta$ et à $\sin\theta$ lorsque le point (x, y) vient sur $\mathcal{G}_0$. Nous allons d'abord montrer *qu'on peut prendre le nombre* ρ *assez petit pour que, dans le champ* $\mathcal{D}_\rho$, *la fonction* $E(x, y; \cos u, \sin u; \cos\theta, \sin\theta')$ *soit positive pour toutes les valeurs de* θ' *qui ne sont pas de la forme* $u + 2K\pi$. Considérons pour cela la fonction auxiliaire E_1 définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned}&E_1(x, y; \cos u, \sin u; \cos\theta', \sin\theta')\\&= \frac{E(x, y; \cos u, \sin u; \cos\theta', \sin\theta')}{1 - \cos(u - \theta')} \qquad (\theta' - u \neq 2K\pi),\end{aligned}$$

$$E(x, y, \cos u, \sin u; \cos\theta', \sin\theta') = F_1(x, y; \cos u, \sin u)$$

pour

$$\theta' - u = 2K\pi.$$

D'après la relation (98), cette fonction est continue, même pour $\theta' = u$, et d'après les hypothèses, elle est positive en tout point de l'arc AB pour toute valeur de θ'. Comme elle est continue dans le voisinage de l'arc AB et qu'elle admet la période 2π par rapport à θ', il résulte des propriétés des fonctions continues qu'on peut entourer $\mathcal{G}_0$ d'un domaine $\mathcal{D}_\rho$ assez étroit pour que la fonction E_1 reste positive lorsque le point (x, y) décrit le domaine $\mathcal{D}_\rho$, quel que soit l'angle θ'. On aura donc aussi

$$E(x, y; \cos u, \sin u; \cos\theta', \sin\theta') > 0$$

dans ce domaine $\mathcal{D}_\rho$, à moins qu'on ait $\cos(\theta' - u) = 1$ et, par suite, $\theta' = u + 2K\pi$.

Cela étant, soient

$$\frac{dx}{dt} = p(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = q(x, y)$$

deux équations différentielles définissant le faisceau spécial d'extrémales qui constitue le champ considéré; on peut prendre, par

exemple, $p = \cos u$, $q = \sin u$, et la variable t représente alors l'arc de l'extrémale compté dans le sens positif. Pour que ce système d'équations différentielles définisse un faisceau d'extrémales, il est nécessaire que les valeurs de x', y', x'', y'' qu'on en déduit vérifient l'équation (87), ce qui donne la condition

$$F_1(x, y; p, q)\left[p^2\frac{\partial q}{\partial x} + pq\left(\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x}\right) - q^2\frac{\partial p}{\partial y}\right] \\ + F''_{xq}(x, y; p, q) - F''_{yp}(x, y; p, q) = 0.$$

On obtient la même relation en exprimant que l'expression

(99) $$F'_p(x, y; p, q)\,dx + F'_q(x, y; p, q)\,dy$$

est une différentielle exacte $d\Phi$, de sorte qu'au faisceau d'extrémales considéré on peut rattacher une fonction $\Phi(x, y)$, continue dans le champ, dont la différentielle totale est égale à l'expression précédente.

Il est facile maintenant d'étendre la fin du raisonnement du n° 639. On a, en effet,

$$F(x, y; x', y') = E(x, y; p, q; x', y') + F'_p(x, y; p, q)x' \\ + F'_q(x, y; p, q)y',$$

d'où l'on tire, si p et q ont la signification précédente,

$$\int_\Gamma F(x, y; x', y')\,dt = \int_\Gamma E(x, y; p, q; x', y')\,dt + \int_\Gamma d\Phi.$$

Si la courbe Γ est une courbe de classe C^1 du champ $\mathcal{D}_\rho$, joignant les deux points A et B, on a encore

(100) $$I_\Gamma - I_{\mathcal{G}_0} = \int_\Gamma E(x, y; p, q; x', y')\,dt,$$

car le long de $\mathcal{G}_0$, l'intégrale $\int_{\mathcal{G}_0} d\Phi$ est égale à $\int_{\mathcal{G}_0} F(x, y, x', y')\,dt$. La différence $I_\Gamma - I_{\mathcal{G}_0}$ est donc positive quelle que soit la courbe Γ, puisque tous les éléments sont positifs ou nuls. Pour que la différence fût nulle, il faudrait que $E(x, y; p, q; x', y')$ ou

$$E(x, y; \cos u, \sin u; \cos\theta', \sin\theta')$$

fût nul en chaque point de Γ, ce qui ne peut avoir lieu que si l'on a $\theta' = u + 2K\pi$. Il faudrait donc que la tangente en chaque point

de Γ coïncide avec la tangente à l'extrémale du faisceau qui passe en ce point. Cette courbe Γ serait donc elle-même une extrémale du faisceau et, comme elle passe par les points A et B, elle se confondrait avec $\mathcal{G}_0$.

Contrairement à ce qui avait lieu pour une intégrale prise sous la forme $\int F(x, y, y')\,dx$, on voit que la condition *nécessaire* de Weierstrass, jointe aux conditions de Legendre et de Jacobi, est en même temps *suffisante* pour assurer le minimum. On s'explique cette différence en observant que, dans le premier cas, on a supposé que y' avait une valeur *finie*, de sorte qu'on n'a considéré que les courbes dont la tangente n'est pas parallèle à Oy; au contraire, quand l'intégrale est prise sous la forme paramétrique, l'angle θ' peut prendre toutes les valeurs possibles, et la tangente à la seconde courbe peut avoir toutes les directions.

On remarquera que la condition de Jacobi n'intervient que dans le raisonnement, mais il n'est pas nécessaire de connaître l'angle u, c'est-à-dire la direction de la tangente à l'extrémale du faisceau qui passe en un point du champ, pour reconnaître si les autres conditions sont vérifiées.

Les conditions énoncées sont suffisantes pour un *minimum fort*. On démontre, comme au n° 641, que les conditions de Legendre et de Jacobi sont suffisantes pour un *minimum faible*. On dit qu'un arc d'extrémale $\mathcal{G}_0$, représenté par les équations

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

où t croît de t_0 à t_1, donne un minimum faible de l'intégrale si l'on peut trouver un nombre positif ε tel que toute courbe Γ représentée par les équations $x = x(t) + \xi(t)$, $y = y(t) + \eta(t)$, où $\xi(t)$, $\eta(t)$ sont des fonctions de classe (I) dans l'intervalle (t_0, t_1), nulles aux deux limites, pour lesquelles $\xi^2 + \eta'^2$ ne s'annule pas entre t_0 et t_1, donne pour l'intégrale une valeur plus grande que $\mathcal{G}_0$, pourvu que $|\xi(t)|$, $|\eta(t)|$, $|\xi'(t)|$, $|\eta'(t)|$ soient inférieurs à ε dans tout l'intervalle. Non seulement la courbe Γ est très voisine de $\mathcal{G}_0$, mais les tangentes aux points des deux courbes, qui correspondent aux mêmes valeurs de t, font un angle infiniment petit.

L'interprétation de la méthode est tout à fait pareille à celle qui a été

indiquée pour les intégrales de la forme $\int F(x, y, y')\,dx$ au n° 642. Soit γ un arc de courbe coupant transversalement en un point chaque extrémale du faisceau. La fonction $\Phi(x, y)$ représente, à une constante près, la valeur de l'intégrale

$$\int F(x, y;\, x', y')\,dt$$

prise le long de l'arc mM de l'extrémale $\mathcal{G}$ du faisceau qui passe au point $M(x, y)$ et qui coupe γ transversalement au point m [1]. Les courbes $\Phi(x, y) = C$ sont donc les courbes transversales du faisceau. On obtiendra encore l'équation aux dérivées partielles des familles de courbes transversales en éliminant le rapport $\frac{p}{q}$ entre les deux équations

$$(101) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = F'_p(x, y;\, p, q), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F'_q(x, y;\, p, q),$$

et l'on verra de même que les extrémales sont les projections, sur le plan des xy, des caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue.

Supposons qu'on ait mis la fonction F sous la forme

$$(102) \qquad F = \frac{\partial \Phi}{\partial x} x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + G(x, y;\, x', y'),$$

Φ ne dépendant que des variables x et y, et G étant une fonction positivement homogène en x', y' du premier degré, dont les dérivées partielles $\frac{\partial G}{\partial x'}$, $\frac{\partial G}{\partial y'}$ sont nulles pour $x' = p(x, y)$, $y' = q(x, y)$; nous désignons par p et q des fonctions continues ayant des dérivées partielles continues dans un domaine $\mathcal{O}$. Les courbes intégrales du système $\frac{dx}{dt} = p(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = q(x, y)$ forment un faisceau d'extrémales, dont les courbes

$$\Phi(x, y) = \text{const.}$$

sont les transversales, car on obtient les relations (101) en différentiant

---

[1] Toutefois, une convention de signe est nécessaire pour cette intégrale. Considérons comme direction *positive* sur chaque extrémale du faisceau celle dont les paramètres directeurs sont p et q. Alors $\Phi(x, y)$ est égale à l'intégrale

$$\int F(x, y;\, x', y')\,dt$$

prise dans le sens positif le long de l'arc d'extrémale compris entre les points M et m, multipliée par ± 1, suivant que la direction qui va de m en M est la direction positive ou la direction opposée. Grâce à cette convention, la différentielle totale $d\Phi$ est toujours $F'_p(x, y;\, p, q)\,dx + F'_q(x, y;\, p, q)\,dy$, d'après la formule générale (88) qui donne la première variation (n° 647).

l'équation (102) par rapport à x' et à y' et en remplaçant ensuite x' par $p(x, y)$, y' par $q(x, y)$. La fonction $E(x, y; p, q; x', y')$ correspondant à ce champ d'extrémales est précisément $G(x, y; x', y')$.

631. Exemples. Lignes géodésiques. — 1° Reprenons le cas où

$$F = yx' + \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

On a

$$E(x, y; p, q; x', y') = \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{px' + qy'}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

expression toujours positive ou nulle d'après l'identité

$$(p^2 + q^2)(x'^2 + y'^2) = (px' + qy')^2 + (py' - qx')^2.$$

L'arc AMB qui satisfait aux conditions de Legendre et de Jacobi (*fig.* 105) donne donc un minimum de l'intégrale.

2° Soit à trouver le plus court chemin entre deux points sur une surface Σ. Nous supposons les coordonnées d'un point de cette surface exprimées au moyen de deux paramètres u et v de façon que la région $\mathcal{R}$ considérée sur cette surface corresponde point par point d'une façon univoque à une certaine région R du plan (u, v). On a alors pour le carré de l'élément linéaire

$$(103) \qquad ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

e, f, g étant des fonctions continues, admettant des dérivées continues dans R, si la portion de surface considérée ne renferme pas de points singuliers. De plus, les fonctions e, g, $eg - f^2$ sont essentiellement positives. Nous avons à chercher les courbes joignant deux points (u_0, v_0), (u_1, v_1) de la région R pour lesquelles la valeur de l'intégrale

$$(104) \qquad S = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2}\,dt$$

est minimum. Ces courbes doivent d'abord satisfaire à l'équation (87), obtenue en égalant à zéro la première variation, qui devient ici, en développant les calculs,

$$(105) \quad \begin{aligned} &(eg - f^2)(u'v'' - u''v') \\ &+ (eu' + fv')\left[\left(f'_u - \frac{1}{2}e'_v\right)u'^2 + g'_u u'v' + \frac{1}{2}g'_v v'^2\right] \\ &- (fu' + gv')\left[\frac{1}{2}e'_u u'^2 + e'_v u'v' + \left(f'_v - \frac{1}{2}g'_u\right)v'^2\right] = 0. \end{aligned}$$

On appelle *lignes géodésiques* les courbes situées sur Σ qui correspondent aux courbes du plan (u, v) satisfaisant à cette équation. D'après la façon dont elles sont définies, la première variation de l'intégrale $\int ds$,

quand on remplace un arc de géodésique par une ligne infiniment voisine de la surface ayant les mêmes extrémités, est nulle. Il en résulte (n° 625) que le plan osculateur doit passer par la normale à Σ, propriété qu'on peut aussi vérifier directement au moyen de l'équation (105) (voir *Exercice* 10).

Soit AB un arc de géodésique situé dans la région $\mathcal{R}$; les conditions de Legendre et de Weierstrass sont vérifiées car la fonction F_1, qui a pour expression

$$F_1 = (eg - f^2)(eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2)^{-\frac{3}{2}},$$

est toujours positive. Pour que l'arc AB de géodésique donne un minimum, il suffit donc qu'il vérifie les conditions de Jacobi, c'est-à-dire que les foyers conjugués de A sur cette géodésique soient en dehors de l'arc AB.

Remarquons que la condition de transversalité est ici

$$(eu' + fv')\,\delta u + (fu' + gv')\,\delta v = 0;$$

elle exprime précisément (II, n° 278) que la géodésique et la seconde courbe de Σ sont *orthogonales*. L'équation aux dérivées partielles des familles de courbes parallèles s'obtiendra donc en éliminant p et q entre les deux relations

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{ep + fq}{\sqrt{ep^2 + 2fpq + gq^2}}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{fp + gq}{\sqrt{ep^2 + 2fpq + gq^2}};$$

on obtient ainsi l'équation bien connue

$$(106) \qquad g\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 - 2f\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + e\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 = eg - f^2.$$

652. **Méthode de Darboux-Kneser.** — Dans le cas particulier des lignes géodésiques, la propriété de minimum est mise en évidence par la forme que prend le carré de l'élément linéaire quand on rapporte la surface à un système de courbes coordonnées, formé par une famille de géodésiques et leurs trajectoires orthogonales. Nous renverrons à la *Théorie des surfaces* de M. Darboux pour l'étude des propriétés des géodésiques fondée sur cette forme réduite de l'élément linéaire, et pour l'extension au cas d'une action maupertuisienne quelconque. M. Kneser a aussi étendu la méthode au cas d'une intégrale sous forme paramétrique. Cette généralisation, dont nous indiquerons rapidement le principe, est fondée sur les propriétés d'invariance des équations différentielles du calcul des variations relativement à un changement de variables. Soient $x = \psi(u, v)$, $y = \chi(u, v)$ des formules de transformations réversibles faisant correspondre point par point à une région R du plan (u, v) une région $\mathcal{R}$ du plan (x, y). Toute intégrale telle que $J = \int F(x, y; x', y')\,dt$, prise le long d'une courbe Γ de la région $\mathcal{R}$, où F est une fonction positivement homogène en x', y', se change en une

intégrale de même espèce $J' = \int G(u, v; u', v')\, dt$ prise le long de la courbe correspondante Γ' du plan (u, v). Il serait facile de vérifier que l'équation différentielle (87) a pour transformée l'équation différentielle qui se déduit de la même façon de $G(u, v; u', v')$; ce qui s'explique aisément, car il est évident que, si la première variation de J est nulle quand on remplace la courbe Γ par une courbe infiniment voisine, il en est de même de la première variation de J' quand on remplace Γ' par une courbe infiniment voisine, et réciproquement. On vérifie de même que la condition de transversalité $F'_{x'}\,\delta x + F'_{y'}\,\delta y = 0$ se change en $G'_{u'}\,\delta u + G'_{v'}\,\delta v = 0$ par la transformation.

Cela étant, considérons un champ $\mathcal{Q}$ par chaque point duquel passe une extrémale $\mathcal{G}$ d'un faisceau spécial formé par les extrémales qui coupent transversalement un arc DF d'une courbe γ, et supposons de plus que $F(x, y; p, q)$ a un signe invariable dans ce champ, $F(x, y; p, q) > 0$ par exemple [1]; p et q ont la même signification que dans les paragraphes précédents, et les extrémales du faisceau spécial vérifient les deux équations différentielles $\frac{dx}{dt} = p(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = q(x, y)$. On peut alors fixer la position d'un point M sur l'extrémale $\mathcal{G}$ qui coupe transversalement γ en m par la valeur de l'intégrale curviligne

$$u = \int_{mM} F'_p(x, y; p, q)\, dx + F'_q(x, y; p, q)\, dy$$

prise le long de l'arc d'extrémale mM. En effet, si la direction de m en M sur cet arc est la direction positive (définie par les paramètres directeurs p et q), cette intégrale est identique à $J' = \int_{mM} F(x, y; x', y')\, dt$, car on peut remplacer dx par $p\, dt$ et dy par $q\, dt$, et elle va en croissant avec la longueur de l'arc mM. Si, au contraire, la direction de m en M est opposée

(1) On peut toujours supposer cette condition remplie en ajoutant à

$$F(x, y; x', y')$$

une expression de la forme $\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y'$, ce qui ne change pas les extrémales, et augmente l'intégrale J, prise entre deux extrémités fixes, d'une quantité constante, quel que soit le chemin d'intégration (*cf.* n° 621 : *Remarque*). Si l'on choisit pour $U(x, y)$ une fonction qui croît lorsqu'on se déplace sur une extrémale du faisceau dans le sens positif, l'expression $\frac{\partial U}{\partial x} p + \frac{\partial U}{\partial y} q$ est positive, et il suffit de la multiplier par un facteur positif convenable pour que la somme

$$F(x, y; p, q) + \frac{\partial U}{\partial x} p + \frac{\partial U}{\partial y} q$$

soit positive.

à la direction positive, on a (*voir* la note de la page 642)

$$u = -\int_{Mm} F'_p\,dx + F'_q\,dy = -\int_{mM} F(x, y;\; p, q)\,dt;$$

cette intégrale est négative et sa valeur absolue diminue quand la longueur de l'arc Mm diminue. Dans tous les cas, u va constamment en croissant lorsque le point M se déplace sur $\mathcal{G}$ dans le sens positif. Soit, d'autre part, v un paramètre dont la valeur détermine la position du point m sur γ. On peut prendre u et v pour coordonnées d'un point M du champ [1]. Les courbes $v = c$onst. sont les extrémales du faisceau et les courbes $u =$ const. les courbes transversales. Nous supposerons le champ limité par les extrémales $v = v_0$, $v = v_1$, et les transversales $u = u_0$, $u = u_1$. En faisant correspondre à un point M du champ le point M′ de coordonnées (u, v), nous avons une représentation univoque de ce champ sur le rectangle limité par les droites $u = u_0$, $u = u_1$, $v = v_0$, $v = v_1$.

D'autre part, on sait que la fonction $F(x, y; x', y')$ est de la forme (n° 650)

$$(107)\qquad F = \frac{\partial u}{\partial x} x' + \frac{\partial u}{\partial y} y' + F_1(x, y;\; x', y'),$$

les dérivées partielles $\frac{\partial F_1}{\partial x'}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y'}$ s'annulant pour $x' = p$, $y' = q$.

Si l'on prend u et v pour nouvelles variables, l'identité précédente devient

$$(108)\qquad G(u, v;\; u', v') = u' + G_1(u, v;\; u', v'),$$

$G_1(u, v; u', v')$ étant une fonction positivement homogène de degré un en u' et v', dont les dérivées partielles $\frac{\partial G_1}{\partial u'}$ et $\frac{\partial G_1}{\partial v'}$ sont nulles pour $u' = 1$, $v' = 0$, car les parallèles à l'axe des u sont les extrémales du faisceau transformé, le sens positif étant le sens des u croissants. La fonction G est bien mise sous la forme (102), mais avec des expressions particulièrement simples pour Φ, p et q. Par exemple, si l'on a

$$G = \sqrt{u'^2 + g(u, v)\,v'^2},$$

on a

$$G_1 = \sqrt{u'^2 + g v'^2} - u' = \frac{g v'^2}{\sqrt{u'^2 + g v'^2} + u'};$$

---

[1] Il n'en est plus de même, lorsque F change de signe dans le champ. Supposons par exemple $F = xx + yy' + y'^2(x'^2 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}$; les droites $y = C$ forment un faisceau d'extrémales, dont les transversales sont les cercles $x^2 + y^2 = C'$. Dans le rectangle limité par les droites $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, on ne peut fixer la position d'un point M en se donnant y et $x^2 + y^2$.

les dérivées $\frac{\partial G_1}{\partial u'}$, $\frac{\partial G_1}{\partial v'}$ sont nulles pour $u' = 1$, $v' = 0$, et G_1 est positif si $g(u, v)$ est positif.

Pour plus de développements, ainsi que pour l'extension aux extrémales des propriétés des géodésiques, nous renverrons aux Ouvrages déjà cités.

653. **Solutions discontinues.** — Lorsqu'il n'existe pas d'extrémales joignant deux points A et B ou lorsque, parmi ces extrémales, il n'en est aucune satisfaisant aux conditions nécessaires pour fournir un extremum, on en conclut que le problème proposé n'admet pas de solution. Il suffit quelquefois d'élargir un peu l'énoncé du problème pour faire apparaître des solutions. Supposons, par exemple, $F = y^2(y'-1)^2$; l'équation différentielle des extrémales $y(yy''+y'^2-1) = 0$ se décompose en deux facteurs. L'intégrale générale se compose des hyperboles équilatères

$$y^2 = x^2 + 2Cx + C'$$

qui ont Ox pour axe de symétrie, et il y a, en outre, une extrémale particulière $y = 0$. Prenons le point A à l'origine ($x_0 = y_0 = 0$), et soient $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ les coordonnées du point B. Ces deux points ne sont pas situés sur la même branche d'extrémale, et par suite il n'y a pas de courbe de classe (I) joignant ces deux points fournissant un minimum pour l'intégrale $J = \int_0^2 y^2(y'-1)^2\,dx$. On s'explique aisément ce résultat en observant que l'intégrale prise suivant la ligne brisée AEB formée par le segment (0,1) de Ox et le segment EB joignant le point $E(x = 1, y = 0)$ au point B, est nulle, et l'on peut, par conséquent, trouver une courbe de classe (I) joignant les deux points A et B, pour laquelle l'intégrale J aura une valeur aussi voisine de zéro qu'on le voudra (n° 630). La borne inférieure de cette intégrale est donc nulle, et il est évident que J ne peut atteindre cette borne inférieure pour une courbe de classe (I). Mais, si l'on remplace dans l'énoncé du problème, tel qu'il a été posé au n° 620, les courbes de classe (I) par les courbes de classe (II), en conservant les autres conditions et la définition du voisinage, on voit que la ligne brisée AEB fournira une solution du nouveau problème. Ces solutions sont dites *solutions discontinues*. Cette extension est d'autant plus naturelle que toute solution du problème primitif est aussi une solution du problème étendu. Si, par exemple, une courbe Γ de classe (I) donne pour J une valeur plus petite que toutes les courbes voisines de la même classe ayant les mêmes extrémités, l'intégrale prise suivant une courbe voisine de la classe (II), joignant les mêmes points, ne peut avoir une valeur plus petite que l'intégrale le long de Γ; dans le cas contraire, on pourrait, en effet (n° 630), la remplacer par une courbe voisine Γ' de classe (I), qui donnerait aussi pour l'intégrale une valeur plus petite que l'intégrale le long de Γ. Mais l'exemple précédent prouve que le problème étendu peut avoir des solutions, alors que le problème primitif n'en admet pas.

Reprenons encore l'exemple de M. Bolza (nº 641) où $F = y'^2(y'-1)^2$, en supposant le coefficient angulaire de la droite AB compris entre o et 1. Il est clair que dans ce cas le problème admet une infinité de solutions discontinues, formées par des lignes polygonales joignant les deux points A et B, dont les côtés sont alternativement parallèles à la droite $y = 0$ et à la droite $y = x$. La borne inférieure de l'intégrale prise suivant une courbe Γ de classe (I), joignant les deux points A et B, est donc zéro, et il est évident que cette borne inférieure ne peut être atteinte pour aucune courbe de cette espèce.

Il est clair qu'une solution discontinue ne peut se composer que d'un certain nombre d'arcs de courbes extrémales mis bout à bout. Il faut, en outre, que certaines conditions soient vérifiées aux points anguleux. Pour les obtenir, supposons qu'une solution discontinue soit formée de deux arcs d'extrémales AE, EB, formant en E un point anguleux, et soient J_1, J_2 les valeurs de l'intégrale $\int F(x, y, y')\,dx$ prises suivant ces deux arcs respectivement. Si l'on fait décrire au point $E(x_2, y_2)$ un arc infiniment petit EE′, en remplaçant les arcs d'extrémales AE, EB par deux arcs infiniment voisins AE′, E′B de classe (I), la première variation $\delta(J_1+J_2)$ doit être nulle, quelle que soit la direction EE′, pour que le chemin AEB donne un extremum de l'intégrale. Or, on a (nº 625)

$$\delta J_1 = \quad [F(x_2, y_2;\, p_1) - p_1 F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_1)]\,\delta x_2 + F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_1)\,\delta y_2,$$
$$\delta J_2 = -[F(x_2, y_2;\, p_2) - p_2 F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_2)]\,\delta x_2 - F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_2)\,\delta y_2,$$

p_1 et p_2 étant les coefficients angulaires des tangentes aux arcs d'extrémales AE, EB. Pour que $\delta J_1 + \delta J_2$ soit nul, quels que soient δx_2, δy_2, il faut et il suffit qu'on ait

$$(109) \qquad F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_1) = F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_2),$$
$$(110) \quad F(x_2, y_2;\, p_1) - p_1 F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_1) = F(x_2, y_2;\, p_2) - p_2 F'_{y'}(x_2, y_2;\, p_2).$$

Pour qu'un point E de coordonnées (x_2, y_2) puisse être un point anguleux d'une solution discontinue, il faut que la fonction $F'_{y'}(x_2, y_2;\, p)$ prenne la même valeur pour deux valeurs distinctes p_1, p_2 de p; la dérivée seconde $F''_{y'^2}(x_2, y_2;\, p)$ aura donc au moins une racine entre p_1 et p_2, et, par conséquent, *il ne peut y avoir de solutions discontinues pour un problème régulier* (nº 621).

Pour déterminer les solutions discontinues ayant un seul point anguleux et joignant deux points donnés A et B, on a comme inconnues les coordonnées x_2, y_2 du point E, et les coefficients angulaires p_1, p_2. En écrivant que les extrémales issues de E, tangentes aux droites de coefficients angulaires p_1, p_2, vont passer par les points A et B respectivement, on a deux nouvelles conditions qui doivent être ajoutées aux conditions (109) et (110), ce qui forme bien un système de quatre équations. Pour une solntion dis-

continue à un nombre quelconque de points anguleux, les cordonnées de chaque sommet et les coefficients angulaires des tangentes aux deux extrémales issues de ce sommet doivent vérifier les relations (109) et (110). De plus, deux sommets consécutifs appartiennent à la même extrémale; quel que soit le nombre des sommets, le nombre des conditions est toujours égal au nombre des paramètres dont on dispose. Dans l'exemple de M. Bolza, les équations (109) et (110) n'ont pas d'autres systèmes de solutions réelles que $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ ou $p_1 = 1$, $p_2 = 0$. Il y a deux solutions discontinues seulement ayant un seul point anguleux, mais il y en a une infinité ayant plus de deux points anguleux, comme il est évident *a priori*.

Lorsque l'intégrale est sous forme paramétrique, une solution discontinue se compose d'un nombre fini d'arcs de courbes de classe C^1 mis bout à bout. Chacun de ces arcs doit évidemment être un arc d'extrémale, et les directions des tangentes aux points anguleux doivent vérifier deux relations pareilles aux relations précédentes qu'on obtient de la même façon :

$$(111) \qquad \begin{cases} F'_{x'}(x_2, y_2;\ \cos\theta_1, \sin\theta_1) = F'_{x'}(x_2, y_2;\ \cos\theta_2, \sin\theta_2), \\ F'_{y'}(x_2, y_2;\ \cos\theta_1, \sin\theta_1) = F'_{y'}(x_2, y_2;\ \cos\theta_2, \sin\theta_2), \end{cases}$$

θ_1 et θ_2 étant les angles que font avec Ox les directions positives des tangentes aux deux arcs d'extrémales au point (x_2, y_2) où ces arcs se rejoignent. Il s'ensuit qu'on a aussi

$$E(x_2, y_2;\ \cos\theta_1, \sin\theta_1;\ \cos\theta_2, \sin\theta_2) = 0,$$

et par suite l'équation $F_1(x_2, y_2;\ \cos u,\ \sin u) = 0$ a une racine au moins comprise entre θ_1 et θ_2, d'après la relation (98). *Il ne peut donc y avoir de solutions discontinues pour un problème régulier* (¹).

Remarque. — Il n'est pas toujours possible d'introduire des solutions discontinues. On a vu, par exemple, que la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} x^2 y'^2\, dx,$$

prise le long de la courbe Γ, qui a pour équation

$$y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\text{Arc tang}\, \frac{x}{\lambda}}{\text{Arc tang}\, \frac{1}{\lambda}},$$

tendait vers zéro avec λ. La courbe Γ se rapproche de plus en plus d'une

(¹) Les conditions obtenues sont seulement *nécessaires* pour un extremum. Pour plus de détails sur les solutions discontinues, *voir* la dissertation inaugurale de M. Carathéodory (Göttingen, 1904).

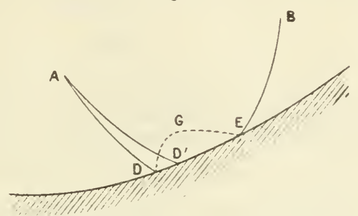
ligne brisée APQB, formée de deux segments AP, QB de parallèles à Ox et d'un segment PQ de l'axe Oy. Mais cette ligne brisée ne peut être considérée comme une solution discontinue, car l'intégrale le long de PQ n'a aucun sens.

654. **Variations unilatérales.** — L'introduction des solutions discontinues constitue en un certain sens une généralisation du problème primitif. Dans quelques questions, au contraire, on est amené à diminuer la généralité du problème en imposant aux fonctions inconnues certaines restrictions. Supposons, par exemple, qu'on veuille trouver la courbe de classe (I) joignant deux points A et B situés sur une parallèle à la droite $y = x$, qui rend minimum l'intégrale $\int y'(y'-1)^2 dx$. La droite AB est une extrémale, et l'on vérifie immédiatement que les conditions de Legendre et de Jacobi sont vérifiées; mais il n'en est pas de même de la condition nécessaire de Weierstrass (n° 636), car la fonction $E(x, y; y', p)$ le long de AB est égale à $p(p-1)^2$, et change de signe avec p. L'extrémale AB ne donne donc pas un minimum fort; mais si l'on cherche seulement, parmi les courbes joignant A et B et *dont l'ordonnée va constamment en croissant de* A *à* B, celle qui donne à l'intégrale une valeur minimum, il est clair que la droite AB fournit bien une solution; pour toute autre courbe de cette espèce, l'intégrale aura en effet une valeur positive. Dans certaines questions du calcul des variations qui ont une signification physique, des restrictions de cette nature peuvent être imposées par la nature du problème (voir *Exercice* 11).

Dans l'exemple précédent, la fonction inconnue y doit vérifier l'inégalité $y' > 0$. Il serait facile de généraliser beaucoup le problème, en supposant que les fonctions inconnues et leurs dérivées doivent vérifier des inégalités de forme quelconque. Nous n'étudierons qu'un cas très simple dont l'étude s'impose pour compléter la solution du problème posé au début de ce Chapitre (n° 620). On a supposé, en effet, que la courbe qui fournissait un extremum de l'intégrale était située tout entière à l'intérieur de la région $\mathcal{R}$, et par là nous avons exclu le cas où il existerait une courbe fournissant un extremum et comprenant une partie de la frontière de ce domaine. Supposons, pour fixer les idées, que la région $\mathcal{R}$ soit limitée inférieurement, au moins en partie, par une courbe Γ_1, représentée par l'équation $y = \Phi(x)$, la fonction $\Phi(x)$ étant de classe (I). Une ligne telle que ADEB, composée de deux arcs AD, EB, situés dans $\mathcal{R}$, et d'un arc DE de la courbe frontière peut donner pour l'intégrale $\int F(x, y, y')\, dx$ une valeur plus petite que toutes les courbes voisines de classe (II) ayant les mêmes extrémités et situées dans $\mathcal{R}$. Il faut d'abord pour cela que AD et EB soient des extrémales, ou composées d'arcs d'extrémales, si ces lignes ont des points anguleux. Mais il n'est pas nécessaire que la fonction $\Phi(x)$ soit une intégrale de l'équation d'Euler. En effet, si nous remplaçons

l'arc DE par un arc infiniment voisin DGE situé au-dessus, la fonction $\Phi(x)$ est remplacée par $\Phi(x) + \eta(x)$, où $\eta(x)$ ne peut être négative

Fig. 106.



entre les abscisses x_2, x_3 des points D et E. La dérivée $J'_2(0)$ de l'intégrale

$$J_2(\alpha) = \int_{x_2}^{x_3} F[x, \Phi(x) + \alpha\eta(x), \Phi'(x) + \alpha\eta'(x)]\,dx,$$

prise pour $\alpha = 0$, doit donc être $\geqq 0$, quelle que soit la fonction $\eta(x)$ de classe (I) satisfaisant à l'inégalité $\eta \geqq 0$ dans l'intervalle (x_2, x_3) et nulle aux deux limites. Or, si l'on reprend le calcul de cette dérivée, le raisonnement du n° 621 prouve seulement qu'il faut et qu'il suffit pour cela qu'on ait

$$\text{(112)} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \geqq 0$$

tout le long de l'arc DE. L'équation d'Euler est donc remplacée par l'inégalité (112).

Aux points D et E, de nouvelles conditions doivent être vérifiées. Imaginons qu'on remplace l'arc AD par un arc infiniment voisin AD' aboutissant à un point D' de DE. La première variation de l'intégrale $J_1 = \int_{AD} F\,dx$ a pour expression (n° 625)

$$\delta J_1 = [F(x_2, y_2; y'_2) - y'_2 F'_{y'}(x_2, y_2; y'_2)]\,\delta x_2 + F'_{y'}(x_2, y_2; y'_2)\,\delta y_2,$$

(x_2, y_2) étant les coordonnées du point D, y'_2 le coefficient angulaire de la tangente en D à l'extrémale AD. La première variation de l'intégrale J_2 prise suivant DE est évidemment $-F(x_2, y_2; p_2)\delta x_2$, p_2 étant le coefficient angulaire de la tangente à DE au point D. En observant que $y_2 = p_2\,\delta x_2$, la condition $\delta(J_1 + J_2) = 0$ devient $E(x_2, y_2; y'_2, p_2) = 0$; elle est évidemment satisfaite si $y'_2 = p_2$, c'est-à-dire si les arcs AD, DE sont tangents en E. On a une condition toute pareille pour le point E, et l'on doit ajouter

à l'inégalité (112) les deux relations

$$(113) \qquad E(x_2, y_2;\ y'_2, p_2) = 0, \qquad E(x_3, y_3;\ y'_3, p_3) = 0.$$

Dans le cas d'une intégrale sous forme paramétrique,

$$\int F(x, y;\ x', y')\, dt,$$

supposons que les coordonnées d'un point de l'arc DE de la frontière soient des fonctions $x(s)$, $y(s)$ de l'arc compté dans le sens positif. Soit θ l'angle que fait la direction positive de la tangente avec Ox. Les formules

$$x = x(s) - \eta(s)\sin\theta, \qquad y = y(s) + \eta(s)\cos\theta,$$

où $\eta(s)$ est une fonction de classe (I), qui est nulle aux points D et E et positive ou nulle dans l'intervalle, représentent une courbe telle que DGE, située dans le domaine $\mathcal{R}$, pourvu que $|\eta|$ ne dépasse pas une certaine limite. Si l'on remplace, dans F, x et y par

$$x(s) - \alpha\,\eta(s)\sin\theta \qquad \text{et} \qquad y(s) + \alpha\,\eta(s)\cos\theta,$$

l'intégrale devient une fonction de α dont la dérivée doit être $\geqq 0$ pour $\alpha = 0$, quelle que soit la forme de la fonction $\eta(s)$. En reprenant le calcul de cette dérivée, on trouve qu'il faut et qu'il suffit pour cela qu'on ait, tout le long de DE,

$$(114) \qquad T = F_1(x'y'' - x''y') + F''_{xy'} - F''_{yx'} \leqq 0.$$

Aux points D et E, on démontre comme plus haut qu'on doit avoir les relations

$$(115) \quad E(x_2, y_2;\ p_2, q_2;\ x'_2, y'_2) = 0, \qquad E(x_3, y_3;\ p_3, q_3;\ x'_3, y'_3) = 0,$$

p_i, q_i étant les paramètres directeurs de la direction positive de la tangente à l'arc DE, x'_i, y'_i les paramètres directeurs de la tangente à l'extrémale. Ce sont là des conditions nécessaires pour que le chemin ADEB fournisse un minimum relatif, mais non suffisantes en général [1].

Exemple. — Soit $F = y^\alpha\sqrt{x'^2 + y'^2}$, α étant positif et la région $\mathcal{R}$ étant la portion du plan au-dessus de Ox. Il ne peut y avoir de solutions discontinues ayant des points anguleux au-dessus de Ox, puisque F_1 ne peut s'annuler lorsque y est positif. D'autre part, les seules extrémales rencontrant Ox sont les parallèles à Oy. Par suite, les seules solutions discon-

---

[1] Les conditions (115) sont toujours vérifiées si l'extrémale et la frontière sont tangentes au point commun, la direction positive de la tangente étant la même pour les deux courbes. Si $F_1(x, y;\ \cos\theta, \sin\theta)$ ne peut s'annuler sur la frontière, les conditions (115) ne peuvent être vérifiées que dans ce cas. On peut faire une remarque analogue pour les conditions (113).

tinues possibles sont formées de deux segments AP, BQ parallèles à Oy et de la portion PQ de Ox. On vérifie immédiatement que les conditions (114) et (115) sont vérifiées. Dans le cas actuel, il est facile de prouver que ces conditions sont suffisantes et que le chemin APQB fournit bien un minimum relatif pour l'intégrale $\int y^\alpha ds$. Cela est immédiat pour un chemin qui a un point au moins sur PQ([2]). Étant donné un chemin AEB au-dessus de Ox, soient E le point le plus bas d'ordonnée h, P′ et Q′ les points d'ordonnée h sur AP et BQ. En comparant les éléments d'intégrale qui correspondent à une même ordonnée le long de AE et de AP′, le long de EB et de Q′B, on voit facilement que la différence des deux intégrales le long de AEB et le long de la ligne brisée APQB est au moins égale à $h^\alpha(\text{AE} + \text{EB} - \text{AP} - \text{BQ})$, expression qui est positive si h est très petit. Il y a donc toujours un minimum relatif fourni par une solution discontinue, et un autre minimum relatif fourni par une extrémale, dans le cas où il passe deux extrémales par les points A et B.

655. **Remarques sur l'extremum absolu.** — Dans l'exemple précédent, il y a toujours une ou deux courbes fournissant un minimum relatif pour l'intégrale $\int y^\alpha ds$, l'une d'elles étant une ligne brisée et la seconde, quand elle existe, étant une courbe de classe (I). Lorsqu'il n'y a qu'un minimum relatif, il est aussi un *minimum absolu ;* dans le cas où il y a deux courbes fournissant un minimum relatif, l'une d'elles fournit aussi un minimum absolu, mais ce n'est pas nécessairement la courbe de classe (I) ([3]). Dans ce cas, on démontre directement l'existence d'un minimum absolu.

Mais les méthodes habituelles du calcul des variations sont en général insuffisantes pour établir l'existence d'un extremum absolu. Dans une Note importante ([1]), M. Hilbert a employé une méthode tout à fait différente pour démontrer directement l'existence d'un extremum absolu dans certains cas particuliers, ce qui lui a permis de compléter la démonstration de Riemann pour le principe de Dirichlet. Nous ne pouvons, faute de

---

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

([2]) *Voir*, pour la démonstration, HADAMARD, pages 414 et suivantes. La démonstration, qui est développée pour $\alpha = \frac{1}{2}$, s'étend au cas où α est un nombre positif quelconque.

([3]) *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (*Jahresberichte*, vol. VIII, 1899, p. 184), traduit par L. Laugel (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1900, p. 377); *Mathematische Annalen*, t. LIX, 1904, p. 161. *Voir* aussi LEBESGUE (*Annali di Matematica*, 3ᵉ série, t. VII, 1902, p. 342-359 : *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXIV, 1907); HADAMARD (p. 484-495); BOLZA (Chap. VII); ZAREMBA, *Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie* (1909. p. 197-264).

La première partie du raisonnement d'Hilbert, pour établir le principe de Dirichlet, avait déjà été employée par Arzela (*Rendiconti della R. Accademia di Bologna;* 1897). Je dois cette observation à M. Lebesgue.

place, développer ici ces profondes recherches, et nous nous bornerons à quelques brèves indications.

Soit, pour fixer les idées, $F(x, y, y')$ une fonction positive dans un domaine $\mathcal{R}$, pour toute valeur finie de y'. L'intégrale

$$J = \int F(x, y, y')\, dx,$$

prise le long d'une courbe de classe (I), située dans $\mathcal{R}$, et joignant deux points donnés A et B de cette région, a évidemment une borne inférieure $J_0 \geqq 0$. On peut, et en général d'une infinité de manières, former une suite de courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ de classe (I), situées dans $\mathcal{R}$ et joignant A et B, telles que l'intégrale J_n, prise le long de C_n, tende vers J_0 lorsque n croît indéfiniment. Il suffit de prendre une suite de nombres positifs ε_n tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment, et de choisir la courbe C_n de façon qu'on ait $|J_n - J_0| < \varepsilon_n$. Soit $y = f_n(x)$ l'équation de C_n. Lorsque J atteint effectivement sa borne inférieure J_0 pour une courbe Γ de classe (I), représentée par l'équation $y = \Phi(x)$, il est clair qu'on peut choisir les courbes C_n de façon que $f_n(x)$ ait pour limite $\Phi(x)$ quand n croît indéfiniment. Inversement, pour qu'on puisse affirmer que J atteint sa borne inférieure pour une courbe de classe (I), il faut démontrer qu'on peut choisir les courbes C_n de façon à satisfaire aux trois conditions suivantes :

1° $f_n(x)$ tend vers une limite $\Phi(x)$ lorsque n croît indéfiniment;

2° La fonction $\Phi(x)$, et par suite, la courbe Γ correspondante sont de classe (I);

3° L'intégrale J_n le long de C_n a pour limite l'intégrale prise le long de Γ.

Les trois parties doivent être démontrées successivement. Par exemple, la borne inférieure de l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{dx}{1+y'^2}$, prise suivant une courbe de classe (I) ou (II), joignant les points (0, 0), (1, 0), est zéro. Si l'on prend, en effet, $y = h \sin(n\pi x)$, la valeur correspondante de l'intégrale est $J_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2h^2}}$ et tend vers zéro quand n croît indéfiniment, quoique la fonction $f_n(x)$ ne tende vers aucune limite. D'un autre côté, il peut se faire que $f_n(x)$ tende vers une limite $f(x)$ n'appartenant pas à la même classe que $f_n(x)$. Ainsi, dans l'exemple de Weierstrass (n° 635), la fonction $\frac{\operatorname{Arc\,tang}(nx)}{\operatorname{Arc\,tang} n}$ a pour limite une fonction discontinue lorsque n croît indéfiniment.

Enfin, il peut se faire que la fonction $f_n(x)$ tende uniformément vers une fonction de même classe $f(x)$ sans que l'intégrale J_n relative à $f_n(x)$ ait pour limite l'intégrale J relative à $f(x)$. Supposons, par exemple, $F = (y'^2 - 1)^2 + y^2$; l'intégrale $\int_0^1 F\, dx$, prise suivant une courbe de classe (II) joignant les points (0, 0), (1, 0), a pour borne inférieure zéro.

Considérons en effet la courbe C_n formée de segments de droite alternativement parallèles aux deux bissectrices des angles formés par les axes, menées par les points de Ox d'abscisses $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1$: l'intégrale correspondante a pour valeur $\frac{1}{12n^2}$. Lorsque n croît indéfiniment, l'ordonnée d'un point de C_n, correspondant à une valeur de x, comprise entre 0 et 1, tend uniformément vers zéro; l'intégrale J_n tend aussi vers zéro, tandis que l'intégrale le long de la courbe limite, qui est ici Ox, est égale à un.

Toutes ces difficultés ont pu être surmontées dans quelques cas particuliers, étudiés dans les travaux cités plus haut (¹).

COMPLÉMENTS ET EXERCICES.

1. Étudier le problème du nº 620 en supposant que F a l'une des formes suivantes :

$$x^n\sqrt{1+y'^2}, \quad (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+y'^2}.$$

2. L'équation d'Euler admet le multiplicateur $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$, lorsque F est indépendant de x.

[JACOBI.]

3. Étant donnée une équation différentielle du second ordre

$$(E) \qquad y'' = G(x, y, y'),$$

il existe une infinité de problèmes du calcul des variations qui conduisent à cette équation. On obtient toutes les formes correspondantes de la fonction $F(x, y, y')$ par des quadratures, si l'on a intégré l'équation (E).

[DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, t. III, nºˢ 604-605.]

R. La fonction $F(x, y, y')$ doit satisfaire à la condition

$$G\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

d'où l'on déduit une équation linéaire du premier ordre

$$\frac{\partial M}{\partial x} + y'\frac{\partial M}{\partial y} + G\frac{\partial M}{\partial y'} + M\frac{\partial G}{\partial y'} = 0,$$

(¹) Dans des Mémoires récents publiés dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, M. L. Tonelli a établi directement, sous des hypothèses très générales, l'existence d'une solution pour le premier problème du calcul des variations, et par suite l'existence d'une solution de l'équation d'Euler passant par deux points donnés. La méthode de M. Tonelli fait appel aux notions introduites par M. Lebesgue dans la théorie des fonctions de variables réelles.

pour déterminer $M = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$; cette dernière équation s'intègre par une quadrature, si l'on a intégré l'équation (E).

4. Déduire de l'exercice précédent qu'on obtient tous les problèmes du calcul des variations pour lesquels les extrémales sont des lignes droites, en prenant pour F la fonction suivante :

$$F = \int_0^{y'} (y' - t)\,\Phi(t, y - xt)\,dt + y'\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

Ψ étant une fonction arbitraire de x et de y, et Φ une fonction arbitraire de t et de $y - xt$.

5. Trouver les courbes extrémales pour l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} g(y, z)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx.$$

Des équations différentielles (10) et (11) on tire

$$gy'' = \frac{\partial g}{\partial y}(1 + y'^2 + z'^2), \qquad gz'' = \frac{\partial g}{\partial z}(1 + y'^2 + z'^2).$$

On en déduit l'intégrale première $g = C\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$. En posant $x = \frac{t}{C}$, et remplaçant $1 + y'^2 + z'^2$ par $\frac{C^2}{g^2}$, les équations différentielles des extrémales deviennent

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^2}{\partial y}, \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^2}{\partial z}.$$

6. *Exemple de Scheffer* (*cf.* n° 635). — Soit $F = x^2 y'^2 + xy'^3$. Le segment $(-1, +1)$ de l'axe Ox est une extrémale satisfaisant aux conditions de Legendre et de Jacobi pour le minimum. Cependant, ce chemin ne donne pas un minimum pour l'intégrale $\int_{-1}^{+1} (x^2 y'^2 + xy'^3)\,dx$, car elle a une valeur négative, si on la prend le long de la ligne brisée définie par les formules : 1° $y = x + h$ de $-h$ à 0; 2° $y = -x + h$ de 0 à h; 3° $y = 0$ de -1 à $-h$ et de h à 1, h étant un nombre positif très petit, car elle est égale à $h^2\left(\frac{2}{3}h - 1\right)$.

7. Pour que l'équation (34) du n° 629 soit vérifiée identiquement, il faut et il suffit que F soit de la forme $Ap + Bq + C$, A, B, C étant des fonctions de x, y, z vérifiant la condition $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial z}$. Expliquer le résultat au moyen des formules du n° 155 (t. I).

8. *Objection de Du Bois-Reymond pour les intégrales doubles.* — L'exemple suivant, de M. Hadamard, prouve que la première variation de

l'intégrale double $\int\int_{(A)} F(x, y, z, p, q)\,dx, dy$ peut être nulle pour une fonction $z = f(x, y)$, sans que f admette des dérivées secondes. Soit

$$F = p^2 - q^2, \qquad z = f(x+y),$$

la fonction f ayant une dérivée premiëre continue. On a

$$\delta I = 2\int\int_{(A)} f'(x+y)\,[\eta'_x - \eta'_y]\,dx\,dy.$$

Posons

$$x + y = u, \qquad x - y = v, \qquad \eta(x, y) = \varphi(u, v).$$

L'intégrale double précédente devient

$$\int\int_{(A)} f'(x-y)\,[\eta'_x - \eta'_y]\,dx\,dy = -\int\int_{(A')} f'(u)\,\varphi'_v(u, v)\,du\,dv;$$

la fonction $\varphi(u, v)$ étant nulle sur tout le contour du champ A' qui correspond au champ A du plan des xy, l'intégrale double est nulle, d'après la première formule de Green, sans qu'il soit nécessaire de supposer que $f'(u)$ a une dérivée.

9. Si, en égalant à zéro la première variation d'une intégrale double, on obtient une équation de Monge-Ampère pour laquelle les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, cette équation admet deux intégrales intermédiaires distinctes.

[Josef Kurschák, *Mathematische Annalen*, Bd. 56, p. 164.]

10. *Ligne géodésiques.* — Si l'on prend pour variable indépendante l'arc s de la ligne géodésique, les équations différentielles qui définissent u et v sont les suivantes :

$$(E) \qquad \begin{cases} 2\dfrac{d}{ds}\{eu' + fv'\} = e'_u u'^2 + 2f'_u u'v' + g'_u v'^2, \\ 2\dfrac{d}{ds}\{fu' + gv'\} = e'_v u'^2 + 2f'_v u'v' + g'_v v'^2, \end{cases}$$

avec la relation $eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 1$. Des formules qui définissent e, f, g (I, n° 131), on tire

$$eu' + fv' = S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{dx}{ds},$$

et, en différentiant par rapport à s, il vient

$$\frac{d}{ds}\{eu' + fv'\} = S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2x}{ds^2} + S(x'_u u' + x'_v v')(x''_{u^2}u' + x''_{uv}v')$$
$$= S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{2}e'_u u'^2 + f'_u u'v' + \frac{1}{2}g'_u v'^2.$$

En tenant compte de la première des équations (E), il reste

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2x}{ds^2} = 0,$$

et l'on démontrerait de même que l'on a

$$S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2x}{ds^2} = 0.$$

La normale principale à la ligne géodésique, dont les paramètres directeurs sont $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$, est donc normale à la surface (*cf.* n° 627).

11. *Solide de moindre résistance* (*Newton*). — Un corps solide de révolution étant animé d'un mouvement de translation parallèle à l'axe, on suppose que chaque élément de surface éprouve une résistance normale du milieu proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse. On demande de trouver la forme de la méridienne de façon que la résultante, qui est évidemment parallèle à l'axe, soit minimum. Si l'on a pris l'axe de révolution pour l'axe Oy, on est conduit à chercher le minimum de l'intégrale

$$(\alpha)\qquad J = \int_{x_0}^{x_1}\frac{x\,dx}{1+y'^2}\qquad (0 < x_0 < x_1).$$

L'équation différentielle d'Euler s'intègre aisément, et toutes les extrémales, sauf les droites $y = C$, se déduisent par une translation parallèle à Oy ou une transformation homothétique avec l'origine comme centre, de l'extrémale particulière

$$(\beta)\qquad x = \frac{(1+y'^2)^2}{y'},\qquad y = \frac{3y'^4}{4} + y'^2 - \mathrm{Log}|y'|.$$

Quand on fait varier y' de 0 à $\frac{1}{\sqrt{3}}$, x et y vont constamment en décroissant, et le point (x, y) décrit une branche infinie Γ' de classe (I) ayant une direction asymptotique parallèle à Ox et aboutissant à un point de rebroussement P. Lorsque y' croît de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ à $+\infty$, x et y vont en croissant et le point (x, y) décrit une branche infinie Γ'' de classe (I), partant de P, avec Oy pour direction asymptotique.

La dérivée seconde y'' est positive en tout point de Γ' et négative en tout point de Γ''. La condition de Legendre pour le minimum est vérifiée pour un arc quelconque AB de la branche Γ', car on a

$$F''_{y'^2} = \frac{2x(3y'^2-1)}{(1+y'^2)^3}.$$

Cet arc satisfait aussi à la condition de Jacobi (n° 634), mais non à la con-

dition de Weierstrass, car la fonction E a pour expression

$$(\gamma)\qquad E(x, y;\, y', p) = x\,\frac{(y'-p)^2[2py'+y'^2-1]}{(1+y'^2)^2(1+p^2)};$$

E peut donc changer de signe quand on fait varier p, à moins que l'extrémité ne soit un segment de parallèle à Ox. Cette extrémale donne évidemment un maximum pour J. En dehors de ce cas très particulier, on voit qu'aucune extrémale ne peut donner un extremum fort pour J. On s'explique aisément ce résultat, en observant que l'intégrale J est comprise entre o et $\frac{x_1^2-x_0^2}{2}$, et peut prendre des valeurs qui diffèrent d'aussi peu qu'on le voudra de ces deux bornes. D'une part, si l'on prend pour Γ une ligne brisée dont les côtés fassent un angle très petit avec Oy, la valeur de J sera infiniment petite. D'un autre côté, si l'on prend pour Γ une ligne brisée ACB, formée d'un segment AC parallèle à Ox, aboutissant à un point C d'abscisse $x_1 - h$ et du segment CB, la valeur de J le long de ce chemin tend vers $\frac{x_1^2-x_0^2}{2}$ lorsque h tend vers zéro. L'intégrale J n'admet pas non plus d'extremum fort si on la prend sous forme paramétrique

$$\int \frac{xx'^3}{x'^2+y'^2}\,dt.$$

puisque F est une fonction rationnelle de x', y' (nº 649).

Il semble donc que le problème de Newton n'admet pas de solutions. Mais il est naturel d'imposer à la courbe cherchée une condition supplémentaire, en supposant que l'ordonnée varie constamment dans le même sens entre les deux extrémités ; dans le cas contraire, l'hypothèse physique d'où l'on est parti serait évidemment inadmissible. Parmi toutes les courbes de classe (I) joignant deux points A et B et *dont l'ordonnée varie constamment dans le même sens* lorsqu'on décrit l'arc AB, il s'agit donc de trouver celle pour laquelle J prend une valeur minimum. On obtient un arc d'extrémale satisfaisant à cette condition en prenant sur l'arc Γ' un arc AB obtenu en faisant varier y' entre deux limites y'_0 et y'_1 supérieures à 1. Soit $\mathcal{G}_0$ l'arc d'extrémale ainsi obtenue ; elle appartient à un champ pour lequel on peut prendre $u(x, y) = p(x)$, où p est le coefficient angulaire de la tangente à $\mathcal{G}_0$ au point d'abscisse x, et $E(x, y;\, u, y')$ a pour expression

$$E(x, y;\, u, y') = x\,\frac{(y'-p)^2\{2py'+p^2-1\}}{(1+y'^2)(1+p^2)^2}$$

La formule (67) du nº 639 montre bien que la différence $J_\Gamma - J_{\mathcal{G}_0}$ est positive pour toute courbe Γ joignant les deux points A et B, pour laquelle y' est $> o$.

12. *Problème de Vieille.* — On demande de joindre deux points A et B par une ligne de longueur donnée, telle que la longueur de la projection orthogonale de cette ligne sur un plan donné soit maxima.

Il s'agit de trouver le maximum de l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2dx}$, sachant que l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ a une valeur donnée l. D'après la méthode du n° 628, on obtient les équations différentielles des extrémales en égalant à zéro la première variation de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ \sqrt{1+y'^2} + \mathrm{K}\sqrt{1+y'^2+z'^2} \right\} dx,$$

où K est un facteur constant. Ces équations sont les suivantes :

$$\left[\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mathrm{K}(1+z'^2)}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\right] y'' - \frac{\mathrm{K}y'z'z''}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$y'z'y'' - (1+y'^2)z'' - 0.$$

On en déduit $y''=z''=0$, à moins que les coefficients de y'' et de z'' ne soient proportionnels, ce qui exige qu'on ait

$$z' = \sqrt{1+y'^2}\sqrt{\mathrm{K}^2-1},$$

et cette dernière relation entraîne les deux premières. Les extrémales sont donc des lignes droites et des hélices tracées sur des cylindres dont les génératrices sont parallèles à Oz. Il est clair que ce sont ces hélices qui donnent la solution du problème, comme on pouvait le prévoir géométriquement. Il y a une infinité de solutions, car la forme de la section droite du cylindre reste indéterminée.

13. Toute équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\Phi\left(x, y;\ \frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}\right) = 0$$

définit les familles de courbes transversales pour un problème du calcul des variations. On obtiendra la fonction F correspondante en prenant l'intégrale singulière de l'équation différentielle

$$\Phi(x, y;\ \mathrm{F} - y'\mathrm{F}'_{y'}, \mathrm{F}'_{y'}) = 0,$$

où y' est la variable indépendante, F la fonction inconnue, x et y étant regardés comme des paramètres (*voir* n°s 642-643).

14. Même question pour une équation aux dérivées partielles

$$\Phi\left(x, y, z;\ \frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) = 0.$$

Parmi les fonctions $\mathrm{F}(x, y, z; y', z')$ obtenues, il y en a une seule qui conduit à un problème *régulier*.

NOTE

SUR

LA REPRÉSENTATION CONFORME

Par M. Paul MONTEL.

1. **Représentation conforme. Domaines.** — Faire la représentation conforme d'un domaine (D), limité par un seul contour (C) et contenu dans le plan de la variable Z, sur un domaine (D′) limité par un seul contour (C′) et contenu dans le plan de la variable Z′, c'est établir une correspondance univoque entre les points de (D) et ceux de (D′) de manière que l'angle de deux courbes tracées dans l'un des domaines soit égal à l'angle des courbes correspondantes. Cette correspondance est obtenue par une relation $Z' = f(Z)$ ou $Z = F(Z')$; la fonction $f(Z)$ est holomorphe dans (D) et ne prend qu'une fois chaque valeur : sa dérivée ne s'annule par conséquent pas dans (D); la fonction inverse $F(Z')$ possède les mêmes propriétés dans le domaine (D′).

La représentation conforme de (D) sur (D′) se ramène à la représentation conforme de chacun de ces domaines sur un cercle (d) de rayon *un* limité par la circonférence (c) et contenu dans le plan de la variable z; car, si les égalités

$$z = G(Z), \qquad Z' = g(z)$$

fournissent ces représentations, la relation

$$Z' = g[G(Z)] = f(Z)$$

donne la représentation conforme de (D) sur (D′).

On a vu (t. II, n° 279) des exemples de représentation conforme et l'on a établi (t. III, n° 517) la possibilité de faire la représentation conforme, sur le cercle (d), de tout domaine (D) limité par un seul contour (C) formé d'arcs analytiques. La correspondance est encore valable pour les contours limitant les domaines et,

lorsque le point z décrit d'une manière continue la circonférence (c), le point Z décrit d'une manière continue le contour (C). La solution dépend de trois constantes arbitraires que l'on détermine en faisant correspondre un point O, intérieur à (D), à un point o intérieur à (d) (le centre du cercle, par exemple) et un point A du contour de (C) à un point a de la circonférence (c).

Nous nous proposons d'établir la possibilité de la représentation conforme pour des domaines plus généraux. On peut d'abord supposer que le contour (C) est une courbe fermée simple de Jordan (t. I, n° 13), c'est-à-dire une courbe représentée par les équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (x + iy = z)$$

dans lesquelles $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions continues de la variable t dans l'intervalle $(0, 1)$; on a

$$\varphi(0) = \varphi(1), \qquad \psi(0) = \psi(1),$$

et la courbe n'a pas de point double, c'est-à-dire que si t est différent de t', les égalités

$$\varphi(t) = \varphi(t'), \qquad \psi(t) = \psi(t')$$

ne peuvent avoir lieu simultanément, sauf pour $t = 0$ et $t' = 1$. Une telle courbe partage le plan en deux domaines (D) et (D_1), dont l'un, (D_1), s'étend à l'infini, et chacun de ces domaines est limité par la courbe (C).

Considérons maintenant les domaines (D) représentés par les figures 1 et 2 et limités par des courbes indéfiniment sinueuses

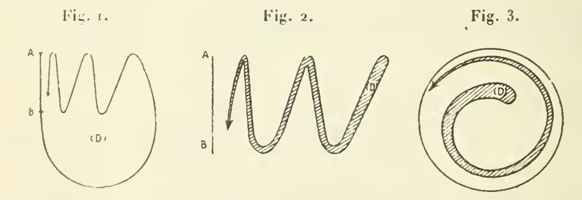


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

ayant pour asymptote le segment rectiligne AB. Les points de AB font partie de (C), puisqu'il y a dans le domaine (D) des points aussi voisins que l'on veut d'un point quelconque de AB. Ces courbes (C) partagent le plan en deux domaines, mais ne sont pas des courbes de Jordan; en effet, lorsqu'on décrit une partie

sinueuse de la courbe, t, qui varie toujours dans le même sens, aurait alors une valeur limite unique, tandis que tous les points du segment AB ont, dans leur voisinage, une infinité de points de cette partie sinueuse.

Dans la figure 3, le domaine (D) est limité par une double spirale admettant un cercle asymptote qui fait partie du contour (C). Cette courbe partage le plan en trois régions : le domaine (D), le domaine extérieur à (D) et intérieur au cercle, et le domaine extérieur au cercle.

Nous sommes conduits à définir avec précision les domaines dont nous ferons la représentation conforme. Nous appellerons dorénavant domaine, l'ensemble des points intérieurs à une région; les points du contour (C) ou frontière de la région n'appartiendront pas au domaine. Un point M du domaine possède la propriété d'être le centre d'un cercle dont tous les points appartiennent au domaine. Un point A de la frontière est tel que tout cercle arbitrairement petit de centre A contient des points qui font partie du domaine et des points qui n'en font pas partie. Un domaine est *connexe* si deux quelconques de ses points peuvent être joints par une courbe dont tous les points appartiennent au domaine; il est *simplement connexe* lorsque deux courbes formées de points du domaine et allant d'un point M à un point M′ peuvent toujours être ramenées l'une à l'autre par une déformation continue ne balayant que des points du domaine. Un cercle est un domaine simplement connexe : un anneau limité par deux circonférences dont l'une est intérieure à l'autre est un domaine connexe, mais non simplement connexe. Nous ne nous occuperons dans la suite que de domaines simplement connexes.

Un point A de la frontière (C) est dit *accessible*, si l'on peut le joindre à un point quelconque M du domaine par une courbe simple, une ligne brisée, par exemple, dont tous les points, sauf A, appartiennent au domaine. Lorsqu'on parcourt cette courbe, en allant de M vers A, il faut que A soit le seul point limite des points de la courbe, c'est-à-dire que si l'on trace un cercle arbitrairement petit de centre A, à partir d'un certain moment, on ne sorte plus de ce cercle. Tous les points d'une courbe fermée simple de Jordan sont accessibles soit par rapport au domaine (D), soit par rapport au domaine (D_1).

Dans le domaine (D) de la figure 1, les points du segment AB, sauf l'extrémité B, ne sont pas accessibles; dans la figure 2, aucun point de AB n'est accessible; il en est de même dans la figure 3, pour les points de la circonférence.

2. **Détermination de la représentation conforme.** — Nous verrons que tout domaine simplement connexe (D), dont la frontière ne se réduit pas à un point, peut être représenté d'une manière conforme sur le cercle (d). Il en résulte que deux domaines simplement connexes de cette nature (D) et (D′) peuvent être représentés l'un sur l'autre. Cette représentation est complètement déterminée si l'on considère comme homologues deux éléments de contact arbitrairement choisis dans (D) et dans (D′), c'est-à-dire deux points O et O′ respectivement intérieurs aux domaines, et deux directions OT et O′T′ passant respectivement par ces points. Il suffit d'établir que la représentation conforme de (D) sur (d) est entièrement déterminée par deux éléments de contact homologues OT et ot, o étant, par exemple, le centre de (d). Or, Poincaré a montré qu'il ne peut y avoir deux manières différentes de faire cette application (¹). Admettons, en effet, qu'il existe deux représentations distinctes de (D) sur (d) remplissant les conditions précédentes : on en déduit une transformation de (d) en lui-même qui conserve l'élément ot. Désignons par Z et z deux points homologues dans cette dernière transformation, et reprenons les notations et le raisonnement du n° 517. Lorsque z tend vers (c), il en est de même de

$$Z = f(z) = e^{\log r + P - i(\varphi + Q)}.$$

Pour tout point de (c) on doit avoir $P + \log r = 0$, donc $P = 0$, puisque $r = 1$. La fonction P, harmonique dans (d) et nulle sur (c), est égale à zéro et la fonction associée est une constante α, donc

$$Z = e^{\log r + i(\varphi + \alpha)} = e^{i\alpha} z.$$

Cette transformation fait tourner d'un angle α toute direction ot

(¹) Poincaré, *Acta mathematica*, t. IV, p. 231.

(t. II, n° 277); comme ot doit être sa propre homologue, $\alpha = 0$ et $Z = z$. La transformation résultante est la transformation identique, donc les deux premières n'étaient pas distinctes.

La représentation conforme de (D) sur (D′) étant complètement déterminée par la correspondance de deux éléments de contact, il n'est pas possible de lui imposer de condition relative aux contours frontières. Il faudra étudier la correspondance de ces points frontières. Cette correspondance est déterminée : nous verrons qu'elle est univoque et continue dans le cas où les contours sont des courbes de Jordan.

Pour établir la possibilité de l'application de (D) sur (d), nous allons considérer une suite de domaines (D_1), (D_2), ..., (D_n), ... se rapprochant de plus en plus de (D) et limités par des contours simples. Pour ces domaines, la représentation est possible et elle est fournie par des fonctions $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ Nous sommes donc amenés à étudier les suites infinies de fonctions holomorphes dans (d).

3. Suite infinie de fonctions bornées. Familles normales. — Nous allons établir le théorème suivant : *Considérons une suite infinie de fonctions holomorphes dans un domaine* (D)

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots,$$

bornées dans leur ensemble dans ce domaine, *c'est-à-dire que l'on a* $|f_n(z)| < M$, M *étant un nombre fixe*, *quel que soit* n, *et quel que soit* z *dans* (D). *On peut extraire*, *de cette suite*, *une suite partielle*

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_q}(z), \quad \ldots$$

convergeant uniformément dans (D) *vers une fonction holomorphe* $f(z)$.

On dit qu'une suite $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ converge au point z si la série $(f_{n+1} - f_n)$ est convergente. La convergence est uniforme dans (D) si, dans toute région (D′) intérieure à (D) et limitée par le contour (C′), la série converge uniformément dans (D′) et sur (C′).

Pour démontrer cette proposition, supposons d'abord que le domaine soit le cercle (d) de rayon *un* et soit (d') un cercle concentrique de rayon $\rho < 1$. Dans ce cercle, chaque fonction de

la suite est développable en série entière; on a, pour la fonction $f_n(z)$,

$$f_n(z) = a_0^n + a_1^n z + \ldots + a_p^n z^p + \ldots,$$

avec

$$a_p^n < \frac{M}{\rho^p},$$

d'après l'inégalité fondamentale relative aux coefficients de la série de Taylor.

Comme ρ est aussi voisin de 1 que l'on veut, on déduit de là : $|a_p^n| \leq M$.

Si l'on pose

$$R_p^n(z) = a_{p+1}^n z^{p+1} + a_{p+2}^n z^{p+2} + \ldots.$$

on aura, pour tout point z dans (d'),

$$|R_p^n(z)| \leq \frac{M\rho^{p+1}}{1-\rho},$$

et le second membre sera inférieur à ε si l'on prend p assez grand; on aura alors, quel que soit n et quel que soit z dans (d'),

$$|R_p^n(z)| < \varepsilon,$$

p étant supérieur à un nombre p_0 indépendant de n.

Considérons maintenant l'ensemble des coefficients a_p^n; je dis qu'on peut trouver une suite de nombres entiers croissants n_1, n_2, ... n_q, ... tels que la suite

$$a_p^{n_1}, \quad a_p^{n_2}, \quad \ldots, \quad a_p^{n_q}, \quad \ldots$$

ait une limite finie A_p lorsque q croît indéfiniment, et cela, quelle que soit la valeur fixée pour p.

En effet, les modules des termes de la suite

$$a_0^1, \quad a_0^2, \quad \ldots, \quad a_0^n, \quad \ldots$$

ne dépassent pas M; soit A_0, une des valeurs limites de cette suite; on peut donc, de la suite a_0^n, extraire une suite

(1) $$a_0^{n_1}, \quad a_0^{n'_1}, \quad a_0^{n''_1}, \quad \ldots$$

convergeant vers A_0. De même, les modules des termes de la suite

$$a_1^{n_1}, \quad a_1^{n'_1}, \quad a_1^{n''_1}, \quad \ldots$$

ne dépassent pas M; on peut, de cette suite des a_n^1, extraire une suite

(2) $$a_1^{n_1},\quad a_1^{n_2},\quad a_1^{n'_2},\quad a_1^{n''_2},\quad \ldots$$

convergeant vers une limite A_1. De même, de la suite

$$a_2^{n_1},\quad a_2^{n_2},\quad a_2^{n'_2},\quad a_2^{n''_2},\quad \ldots,$$

on peut extraire une suite

(3) $$a_2^{n_1},\quad a_2^{n_2},\quad a_2^{n_3},\quad a_2^{n'_3},\quad \ldots$$

ayant pour limite A_2, etc. En continuant ainsi, on définit une suite de nombres entiers croissants $n_1, n_2, \ldots, n_q, \ldots$ tels que la suite

(α) $$a_p^{n_1},\quad a_p^{n_2},\quad \ldots,\quad a_p^{n_q},\quad \ldots$$

ait pour limite un nombre A_p, pour toute valeur de p, lorsque q croît indéfiniment. En effet, pour $p = 0$, les termes de la suite (α), ayant été choisis parmi ceux de la suite (1), doivent avoir pour limite A_0; pour $p = 1$, les termes de la suite (α) ont pour limite A_1 puisqu'ils font partie de la suite (2), et ainsi de suite.

Considérons maintenant la série

$$f(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_p z^p + \ldots,$$

elle est convergente dans (d'); on a, en effet,

$$\begin{aligned}&|A_{p+1} z^{p+1} + A_{p+2} z^{p+2} + \ldots + A_{p+h} z^{p+h}|\\ &\quad = \lim_{q=\infty} |a_{p+1}^{n_q} z^{p+1} + a_{p+2}^{n_q} z^{p+2} + \ldots + a_{p+h}^{n_q} z^{p+h}|,\end{aligned}$$

et la dernière expression, égale à

$$R_p^{n_q}(z) - R_{p+h}^{n_q}(z)$$

a un module inférieur à

$$|R_{p+h}^{n_q}(z)| + |R_p^{n_q}(z)|,$$

c'est-à-dire à 2ε, si $p > p_0$; donc

$$|A_p z^p + A_{p+1} z^{p+1} + \ldots + A_{p+h} z^{p+h}| < 2\varepsilon,$$

quel que soit h, pour $p > p_0$.

La série $f(z)$ est donc convergente dans (d'). On a d'ailleurs, en faisant croître h indéfiniment et en posant

$$R_p(z) = A_{p+1} z^{p+1} + A_{p+2} z^{p+2} + \ldots + A_{p+h} z^{p+h} + \ldots,$$
$$|R_p(z)| \leqq 2\varepsilon, \qquad \text{pour } p > p_0.$$

La série dont les coefficients sont A_p représente donc une fonction holomorphe dans le cercle (d') et, par conséquent, dans (d), puisque la détermination des A_p ne dépend pas de ρ et que ce nombre est aussi voisin de 1 qu'on le veut.

Je dis que la suite des fonctions

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

a pour limite $f(z)$, uniformément dans (d'). Supposons $p > p_0$ et soit

$$S_p^{n_q}(z) = a_0^{n_q} + a_1^{n_q} z + \ldots + a_p^{n_q} z^p,$$
$$S_p(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_p z^p.$$

$S_p^{n_q}(z)$ converge uniformément vers $S_p(z)$ dans (d') lorsque p est fixe, puisque les coefficients du premier polynome ont pour limites ceux du second; donc, pour q assez grand, on aura

$$|S_p(z) - S_p^{n_q}(z)| < \varepsilon,$$

quel que soit z dans (d'). D'ailleurs,

$$|R_p(z) - R_p^{n_q}(z)| \leqq |R_p(z)| + |R_p^{n_q}(z)| < 3\varepsilon$$

puisque $p > p_0$; donc comme

$$f_{n_q}(z) = S_p^{n_q}(z) + R_p^{n_q}(z),$$
$$f(z) = S_p(z) + R_p(z),$$

on aura

$$|f(z) - f_{n_q}(z)| < 4\varepsilon,$$

si q est assez grand.

Supposons maintenant que (D) soit un domaine applicable sur le cercle (d) et désignons par Z l'affixe d'un point du plan de (D). Soit

$$F_1(Z), \quad F_2(Z), \quad \ldots, \quad F_n(Z), \quad \ldots$$

une suite infinie de fonctions holomorphes dans (D) et bornées

dans leur ensemble par le nombre M; soit encore

$$Z = g(z)$$

une fonction qui fournit une représentation conforme de (D) sur (*d*); posons

$$F_n[g(z)] = f_n(z),$$

la suite

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

est formée de fonctions holomorphes dans (*d*) et bornées dans leur ensemble, puisque $f_n(z)$ prend dans (*d*) les mêmes valeurs que $F_n(Z)$ dans D; on peut en extraire une suite partielle

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_q}(z), \quad \ldots$$

qui converge uniformément dans (*d*) vers la fonction holomorphe $f(z)$; donc, la suite

$$F_{n_1}(Z), \quad F_{n_2}(Z), \quad \ldots, \quad F_{n_q}(Z), \quad \ldots$$

qui prend les mêmes valeurs que la suite précédente pour deux points z et Z homologues, converge uniformément dans (D) vers la fonction holomophe $F(Z) = f[G(Z)]$, $G(Z)$ désignant la fonction inverse de $g(z)$.

Le théorème est ainsi établi pour tout domaine applicable sur un cercle.

Les raisonnements faits pour la suite $f_n(z)$ peuvent être répétés pour toute suite

$$f_{\lambda_1}(z), \quad f_{\lambda_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{\lambda_n}(z), \quad \ldots,$$

extraite des $f_n(z)$; on peut choisir, dans la suite $f_{\lambda_n}(z)$, une suite partielle

$$f_{\lambda_{n_1}}(z), \quad f_{\lambda_{n_2}}(z), \quad \ldots, \quad f_{\lambda_{n_q}}(z), \quad \ldots$$

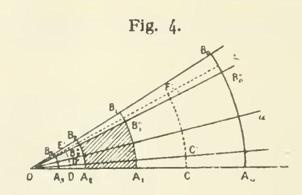
convergeant uniformément vers une fonction holomorphe. Toute suite partielle extraite des $f_n(z)$ donne naissance à une suite au moins qui converge uniformément. On arriverait au même résultat si, au lieu de prendre une suite de fonctions $f_n(z)$, on considérait une famille quelconque de fonctions holomorphes et bornées dans leur ensemble.

Ainsi, lorsqu'une famille de fonctions holomorphes dans (D) est formée de fonctions bornées dans leur ensemble, toute suite infinie

de fonctions de la famille admet au moins une fonction limite. Cette famille de fonctions possède la même propriété qu'un ensemble de valeurs numériques bornées. Quand une famille de fonctions holomorphes possède la propriété précédente, nous disons que c'est une *famille normale* : les fonctions holomorphes et bornées dans (D) forment une famille normale.

Voici une application du théorème précédent qui nous sera utile : soit $f(z)$ une fonction holomorphe et bornée dans un secteur circulaire OA_0B_0 et continue sur le rayon OA_0, sauf peut-être au point O ; si $f(z)$ a une limite α lorsque z tend vers O sur le rayon OA_0, nous allons montrer que $f(z)$ tend uniformément vers α dans tout secteur $A_0OB''_0$ intérieur au secteur donné.

Fig. 4.



Nous pouvons toujours supposer que $\alpha = 0$, que le point O est l'origine et que l'arc de cercle A_0B_0 a pour rayon 2. Traçons les arcs de cercles A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ... de centre O et de rayons $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$ et soit (D_n) le domaine compris dans l'angle A_0OB_0 et limité par les arcs A_nB_n et $A_{n+1}B_{n+1}$; posons $f_n(z) = f(2^n z)$: la fonction $f_n(z)$ est holomorphe et bornée dans le domaine $A_0B_0A_3B_3$, puisque $f(z)$ est holomorphe et bornée dans le domaine $A_nB_nA_{n+3}B_{n+3}$ et la suite $f_n(z)$ converge uniformément vers zéro sur le segment rectiligne A_0A_3. On peut extraire de la suite des $f_n(z)$, qui forment une famille normale, une suite partielle $f_n(z)$ convergant uniformément, dans le domaine $D'E'C'F'$ limité par deux rayons $OD'C'$ et $OE'F'$, aussi voisins que l'on veut de OA_0 et OC_0, et par les arcs de cercles de centre O et de rayons $OD = \frac{3}{8}$ et $OC = \frac{3}{2}$, vers une fonction $g(z)$ holomorphe dans ce domaine.

Si nous remplaçons le rayon OC' par un rayon OC'' faisant

avec OA_0 un angle plus petit que l'angle $\widehat{C'OA_0}$, nous pourrons extraire de la suite $f_n(z)$ une suite partielle $f_{n''}(z)$ convergeant uniformément dans le nouveau domaine $C''D''E'F'$ vers une fonction holomorphe dans ce nouveau domaine et qui coïncide avec $g(z)$ dans la région $C'D'E'F'$. Par conséquent, $g(z)$ est holomorphe en tout point intérieur à la région $CDE'F'$.

Je dis que la convergence de la suite $f_n(z)$ est uniforme en tout point z_0 inférieur à cette dernière région. Menons, en effet, le rayon OC'' tel que le point M soit intérieur au domaine $C''D''E'F'$. Si la convergence n'était pas uniforme en z_0, il existerait un nombre ε, une infinité d'entiers n'_k et de points z_k ayant pour limite z_0, tels que

$$|f_{n'_k}(z_k) - g(z_k)| > \varepsilon.$$

Or, de la suite $f_{n'_k}(z)$, on peut extraire une suite partielle $f_{n''_k}(z)$ convergeant uniformément vers $g(z)$ dans le domaine $C''D''E'F'$, et, par suite, au point z_0. Ce fait est incompatible avec l'hypothèse que l'inégalité précédente est vérifiée pour des points voisins de z_0.

Considérons maintenant le domaine (D) ou $A_1A_2B''_2B''_1$ couvert de hachures sur la figure. La suite $f_{n'}(z)$ converge en tout point de ce domaine, contour compris, et la convergence est uniforme en tout point qui ne fait pas partie du segment A_1A_2. Je vais montrer que la convergence est uniforme en tout point du domaine, contour compris, sauf peut-être aux deux points A_1 et A_2.

Faisons la représentation conforme de la région $A_1A_2B''_2B''_1$ sur un cercle (C) de rayon R dans le plan de la variable z'. Aux points A_1 et A_2 correspondent deux points a_1 et a_2 de la circonférence. Aux fonctions $f_{n'}(z)$ correspondent les fonctions $g_{n'}(z')$ qui convergent uniformément sur la circonférence, sauf peut-être aux points a_1 et a_2.

Sur l'un λ des arcs a_1a_2, la fonction limite est égale à zéro. Traçons, des points a_1 et a_2 comme centres, des circonférences interceptant sur le cercle (C) des arcs σ dont la somme des longueurs ne dépasse pas ε et considérons les points z' du cercle (C) qui sont extérieurs aux cercles de rayon ρ, concentriques aux premiers. Si ρ est assez petit, il y a une portion λ' de l'arc qui est extérieure à ces cercles. Je dis qu'on peut prendre n' assez grand

pour que, en tout point z' considéré, on ait

$$|g_{n'+p}(z') - g_{n'}(z')| < \varepsilon,$$

quel que soit l'entier p. Désignons par $u_{n'}(x', y')$ la partie réelle de $g_{n'}(z')$ et par $u_{n'}(s)$ sa valeur en un point de la circonférence défini par l'arc s. On a, d'après la formule de Poisson (t. III, n° 508, mêmes notations), le point z' étant intérieur à (C),

$$u_{n'+p}(x', y') - u_{n'}(x', y') = \frac{1}{\pi}\int_C [u_{n'+p}(s) - u_{n'}(s)]\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R}\right) ds,$$

et, par suite,

$$|u_{n'+p}(x', y') - u_{n'}(x', y')| < \frac{1}{\pi}\int_S |u_{n'+p}(s) - u_{n'}(s)| \frac{\cos\varphi}{r} ds.$$

Sur les arcs σ, la valeur absolue de $u_{n'+p}(s) - u_{n'}(s)$ ne dépasse pas $2M$ si M est la limite supérieure des modules des $f_n(z)$; r reste supérieur à ρ et, par suite, la partie de l'intégrale relative à ces arcs est inférieure à $\frac{2M\varepsilon}{\pi\rho}$. Sur le reste de la circonférence, le module de $u_{n'+p}(s) - u_{n'}(s)$ ne dépasse pas ε si n' est assez grand, et, comme l'intégrale $\int \frac{\cos\varphi}{r} ds$ n'est jamais supérieure à 2π, cette partie de l'intégrale est inférieure ou égale à 2ε, donc

$$|u_{n'+p}(x', y') - u_{n'}(x', y')| < \frac{2M\varepsilon}{\pi\rho} + 2\varepsilon;$$

ρ restant fixe, le second membre de l'inégalité est aussi petit que l'on veut, si n' est assez grand. La convergence de la suite $u_{n'}$ est uniforme pour les points z' intérieurs considérés; comme elle est aussi uniforme quand le point z' est situé sur l'arc λ', on voit que la convergence est uniforme, en tout point de (C), contour compris, sauf dans le voisinage de a_1 et a_2. La fonction limite u, continue dans le cercle, prend sur l'arc λ' la valeur zéro. On peut donc la prolonger à l'extérieur du cercle (t. III, n° 511). Comme le même raisonnement s'applique à la partie imaginaire des fonctions $g_{n'}(z')$, on voit que la fonction limite peut être prolongée au delà de l'arc λ'. Elle est donc holomorphe sur cet arc et, comme elle prend la valeur zéro en tout point de cet arc, elle est identiquement nulle : il en est de même de $g(z)$.

Cette fonction est identiquement nulle; toute suite partielle con-

vergente, extraite de la suite $f_n(z)$, converge donc uniformément vers zéro dans (D); on en déduit que la suite $f_n(z)$ converge elle-même uniformément vers zéro dans (D). Or les fonctions $f_n(z)$ prennent dans (D) les valeurs que $f(z)$ prend dans les parties de (D_{n+1}) limitées par OB''_0; donc $f(z)$ converge uniformément vers zéro dans l'angle $A_0OB''_0$, contour compris.

On déduit de là que $f(z)$ ne peut avoir deux limites différentes α et β sur A_0O et B_0O, car sur une droite quelconque Ou intérieure au secteur $f(z)$ devrait tendre à la fois vers α et β. On voit aussi qu'on peut remplacer, au moyen d'une représentation conforme, le secteur circulaire par un secteur OA_0B_0 limité par des arcs de courbes analytiques.

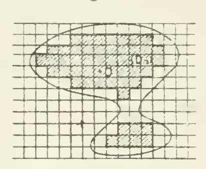
4. **Représentation conforme d'un domaine borné.** — Un domaine (D) est dit borné si tous ses points sont à l'intérieur d'un cercle tracé dans le plan. Les points de la frontière (C) sont aussi dans ce cercle, puisque dans le voisinage d'un point de la frontière se trouvent des points du domaine.

Nous ferons la représentation conforme d'un domaine borné simplement connexe (D) sur le cercle (d) de manière qu'un point O intérieur à (D) corresponde au centre o du cercle. Il suffira de faire ensuite la transformation $z' = kz$, k étant une constante de module unité, pour faire correspondre deux directions OT et ot. Nous pouvons d'ailleurs toujours supposer que O et o sont les origines des coordonnées dans les plans des Z et des z.

Dessinons sur le plan de (D) un quadrillage de côté h dont les droites sont parallèles à deux directions fixes et considérons les carrés dont tous les points sont intérieurs à (D); ces carrés forment un ou plusieurs polygones : je désigne par (D_1) celui de ces polygones qui contient O. On peut prendre h assez petit pour que (D_1) existe : il suffit que h soit inférieur à $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$, δ étant le minimum de la distance du point O aux points de (C). En remplaçant h, par $\frac{h}{2}, \frac{h}{2^2}, \cdots, \frac{h}{2^n}, \cdots$, nous définissons de la même manière des polygones $(D_2), (D_3), \ldots, (D_n), \ldots$ Chaque polygone est contenu dans le suivant et, par suite, dans tous les suivants. Tout point de (D) est intérieur à tous les polygones à partir d'une

valeur assez grande de n. Soit, en effet, M, un point de D, joignons-le à O par une courbe (L) tout entière dans (D); la distance d'un point de (L) à un point de (C) a un minimum non nul δ'; si l'on prend n assez grand pour que $\frac{h}{2^n} < \frac{\delta'}{\sqrt{2}}$, tous les points de (L) appartiendront à des carrés conservés formant une

Fig. 5.



chaîne qui contient O; donc tous les points de (L) sont dans (D_n) et, par suite, M appartient à (D_n) pour n assez grand. Nous dirons que le domaine (D) est la limite des domaines (D_n).

Le contour limitant (D_n) est formé de segments rectilignes, c'est-à-dire d'arcs analytiques; il existe donc une fonction $f_n(z)$ qui fait la représentation conforme de (D_n) sur (d) de manière que $f_n(0) = 0$. Considérons la suite des fonctions

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots$$

holomorphes dans (d). On a, quel que soit z dans (d) et quel que soit n, $|f_n(z)| < M$, M désignant le rayon du cercle de centre O qui contient le domaine borné (D), puisque tous les points de (D_n) appartiennent à (D). On peut donc, d'après le théorème du paragraphe précédent, extraire de cette suite une suite nouvelle convergeant vers une fonction $f(z)$ holomorphe dans (d). Nous désignerons encore, pour simplifier l'écriture, par $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, les termes de cette suite, et nous supposerons d'abord que $f(z)$ ne se réduise pas à une constante qui serait nulle puisque $f_n(0) = 0$.

Lorsque le point z se déplace dans (d), le point $Z = f(z)$ décrit un domaine (Δ) et, à tout point intérieur à (d), correspond un point intérieur à (Δ), Je dis que le domaine (Δ) ne se recouvre pas, c'est-à-dire que si $z_1 \neq z_2$, on a aussi $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Remarquons d'abord que, si en un point z_0 la fonction $f(z)$ prend la valeur Z_0, dans un petit cercle (γ) de centre z_0, les

fonctions $f_n(z)$ prennent toutes, pour n assez grand, la valeur Z_0. En effet, supposons (γ) assez petit pour que la fonction $f(z)$, qui n'est pas constante, ne prenne la valeur Z_0 qu'au centre z_0; sur la circonférence (γ), les fonctions $f_n(z) - Z_0$ et $f'_n(z)$ convergent uniformément vers $f(z) - Z_0$ et $f'(z)$; donc l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\gamma)}\frac{f'_n(z)\,dz}{f_n(z) - Z_0},$$

qui représente le nombre p_n des racines de l'équation $f_n(z) = Z_0$ contenues dans (γ), a pour limite l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f'(z)dz}{f(z) - Z_0}$ qui est égale au nombre p des racines de $f(z) = Z_0$, c'est-à-dire à l'ordre de multiplicité de la racine z_0. Comme p_n et p sont des entiers, il faut que $p_n = p$, pour n assez grand.

Supposons alors que $f(z_1) = f(z_2) = Z_0$ et traçons deux cercles (γ_1) et (γ_2) de centres z_1 et z_2 et dont les rayons soient inférieurs à la moitié de la distance de z_1 à z_2. Pour n assez grand, les équations

$$f_n(z) = Z_0$$

auraient au moins une racine dans (γ_1) et une racine dans (γ_2) puisque les cercles (γ_1) et (γ_2) n'ont aucun point commun. La fonction $f_n(z)$ prendrait la valeur Z_0 pour deux valeurs différentes de z, ce qui est impossible puisque cette fonction effectue la représentation conforme de (D_n) sur (d).

On démontrerait de la même manière que $f'(z)$ ne peut s'annuler dans (d).

Je dis maintenant que tous les points de (Δ) appartiennent à (D). Soient $Z_0 = f(z_0)$ l'affixe d'un point M intérieur à (Δ) et (Γ) une circonférence de centre M et de rayon ε limitant un cercle dont tous les points sont intérieurs à (Δ). L'égalité $Z = f(z)$, résoluble en z, fait correspondre au cercle limité par (Γ), un domaine contenant z_0 et limité par une courbe (γ). Prenons n assez grand pour que

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tous les points de (γ); on a, par suite,

$$|Z_0 - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La relation $Z = f_n(z)$ fait correspondre, au domaine limité par (γ), un domaine limité par une courbe (Γ_n) dont chaque point est à une distance inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$ d'un point de (Γ). La courbe (Γ_n) est donc extérieure au cercle (Γ') de centre Z_0 et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Le domaine limité par (Γ_n) contient le point $f_n(z_0)$ qui est intérieur à (Γ'), donc ce domaine, qui est simplement connexe, contient (Γ') et, comme $f_n(z)$ fait l'application de (d) sur (D_n), (Γ') est contenu dans (D_n) et, par suite, Z_0 appartient à (D_n), donc à (D).

Enfin, je vais montrer que, réciproquement, tout point de (D) appartient à (Δ). Soit M un point de (D) d'affixe Z_0; joignons O à M par une courbe (L) tout entière dans (D); cette courbe est intérieure à (D_n) pour n assez grand; pour faciliter le langage, nous supposerons que (D_1) est le premier domaine contenant (L). Appelons

$$F_1(Z), \quad F_2(Z), \quad \ldots, \quad F_n(Z), \quad \ldots$$

les fonctions inverses des fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots,$$

et supposons que Z reste dans (D_1). On a

$$|F_n(Z)| < 1$$

quel que soit n et quel que soit Z dans (D_1). On peut donc extraire de la suite $F_n(Z)$ une suite nouvelle, que je désignerai encore par F_n, qui converge uniformément dans (D_1) vers une fonction holomorphe $F(Z)$. Si $F(Z)$ n'est pas la constante zéro, au point Z_0, intérieur à (D_1), correspond un point z_0 intérieur à (d) tel que

$$z_0 = F(Z_0).$$

$F(Z_0)$ est la limite de $F_n(Z_0) = z_n^0$; pour n assez grand, z_n^0 est donc à l'intérieur d'un cercle (γ) de centre z_0 et de rayon arbitraire et, puisque F_n est la fonction inverse de f_n,

$$Z_0 = f_n(z_n^0);$$

la suite $f_n(z)$ converge uniformément dans (γ) vers $f(z)$, et z_n^0 a pour limite z_0; or

$$Z_0 - f(z_0) = [f_n(z_n^0) - f(z_n^0)] + [f(z_n^0) - f(z_0)]$$

a pour limite zéro, puisque chaque parenthèse est, en module, aussi petite qu'on le veut pour n assez grand, donc $Z_0 = f(z_0)$, et M appartient à (Δ).

Les raisonnements précédents supposent que ni $f(z)$, ni $F(Z)$ ne soient identiquement nulles. Si $f(z)$ était la constante zéro, tout point Z_0, distinct de l'origine O, aurait un homologue z_n^0 qui n'aurait pour limite z_0 aucun point intérieur au cercle (d), sinon, à l'aide du raisonnement précédent, on verrait que $f(z_0) = Z_0 \neq 0$. Donc, le module de $F_n(Z_0)$ aurait pour limite 1 quel que soit Z_0 dans (D_1), tandis que $F_n(0)$ aurait pour limite zéro, ce qui est impossible puisque $F(Z)$ est holomorphe.

De même, si $F(Z)$ était identiquement nulle, tout point z_0 de (d) autre que l'origine aurait un homologue $Z_n^0 = f_n(z_0)$ dont toutes les valeurs limites auraient un module supérieur ou égal à la distance δ'' de O à la frontière de (D_1) puisque aucune valeur limite ne pourrait correspondre à un point Z_0 de (D_1), sinon on démontrerait comme plus haut que $F(Z_0) = z_0 \neq 0$. Donc, le module de $f_n(z)$ aurait une limite toujours supérieure ou égale à δ'', tandis que $f_n(0)$ aurait pour limite zéro, ce qui est impossible puisque $f(z)$ est holomorphe.

Nous pouvons donc écarter l'hypothèse que $f_n(z)$ ou $F_n(Z)$ ait pour limite une constante.

La relation $Z = f(z)$ effectue la représentation conforme de (D) sur (d) de manière que les points O et o se correspondent. On ramène facilement à ce cas celui où le domaine (D), sans être borné, admet des points extérieurs. Soit, en effet, a, l'affixe d'un point extérieur à (D), c'est-à-dire n'appartenant ni à (D), ni à sa frontière (C). La transformation $Z' = \frac{1}{Z - a}$ fait correspondre à (D) un domaine (D') borné, puisque, (D) étant extérieur à un cercle $|Z - a| = R$, (D') est intérieur au cercle $|Z'| = \frac{1}{R}$. Si $f(z)$ effectue la représentation conforme de (D') sur (d), la fonction $Z = a + \frac{1}{f(z)}$ fera l'application de (D) sur (d).

5. **Théorème fondamental sur les familles normales.** — Pour démontrer la possibilité de la représentation conforme de domaines plus généraux, nous aurons besoin d'une nouvelle famille

normale. Tout d'abord, les fonctions qui, sans être bornées, ne s'approchent pas indéfiniment d'une valeur fixe a, forment une famille normale.

En effet, soit une suite $f_n(z)$ telle que $|f_n(z) - a| > \varepsilon$, quel que soit n et quel que soit z dans le domaine (D). Les fonctions $\varphi_n(z) = \frac{1}{f_n(z) - a}$ ont leurs modules bornés dans (D) par le nombre $\frac{1}{\varepsilon}$; on peut en extraire une suite ayant une fonction limite $\varphi(z)$; donc, la suite $f_n(z) = a + \frac{1}{\varphi_n(z)}$ correspondante a pour limite la fonction $a + \frac{1}{\varphi(z)}$. La famille des fonctions considérées est donc normale. On doit remarquer que les fonctions $\varphi_n(z)$ ne prenant pas la valeur zéro dans (D), la fonction $\varphi(z)$ n'admet pas de zéro dans (D), à moins qu'elle ne se réduise à la constante zéro. Par conséquent, $f(z)$ est holomorphe dans (D) ou se réduit à la constante infinie. Il faut donc admettre la constante infinie comme une fonction limite particulière. Ce cas ne se présentera d'ailleurs pas si les fonctions considérées ont des valeurs bornées en un point z_0 de (D).

Mais, il peut arriver que les fonctions d'une famille s'approchent autant qu'on le veut de toute valeur; nous allons voir que, s'il existe alors *deux valeurs exceptionnelles* a et b, c'est-à-dire deux valeurs telles que les équations $f_n(z) = a$, $f_n(z) = b$ n'aient aucune racine dans (D), la famille est normale. Nous pouvons toujours supposer que les valeurs exceptionnelles soient 0 et 1, en remplaçant les fonctions $f_n(z)$ par les fonctions

$$\frac{f_n(z) - a}{b - a} = \varphi_n(z).$$

Les familles f_n et φ_n sont normales en même temps.

Nous nous proposons donc de démontrer le théorème suivant :

Soit

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

une suite infinie de fonctions holomorphes dans le domaine simplement connexe (D) *où elles ne prennent ni la valeur* 0 *ni la valeur* 1 ; *on peut extraire de cette suite une suite partielle*

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_q}(z), \quad \ldots$$

convergeant uniformément dans (D) *vers une fonction holomorphe* $f(z)$.

Considérons pour cela l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(Z-t)}}$$

et deux périodes 2ω et $2\omega'$ de cette intégrale, par exemple,

$$\omega = \int^{1} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(Z-t)}} \quad \text{et} \quad \omega' = \int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-Zt)}}.$$

Si le nombre Z est différent de o et de 1, le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire et définit une fonction $\nu(Z)$, analytique dans le plan complexe des Z,

$$\nu(Z) = \frac{\omega'(Z)}{\omega(Z)}.$$

Cette fonction est holomorphe pour toute valeur finie de Z distincte de o et 1, car les périodes sont des fonctions holomorphes de Z et le dénominateur $\omega(Z)$ ne s'annule pas (*voir* t. II, n° 314). Elle n'est pas uniforme; lorsque Z décrit, dans son plan, une courbe fermée ne passant ni par o ni par 1, ω' et ω ne reprennent pas toujours leurs valeurs primitives, mais les valeurs finales sont encore des périodes de l'intégrale elliptique. Il en résulte que le signe du coefficient de i dans $\nu(Z)$ demeure invariable lorsque Z se déplace, car, si pour deux positions de Z, les signes étaient différents, il existerait sur le chemin qui les joint un point où ce coefficient, qui varie d'une manière continue avec Z, serait nul, ce qui est impossible. Ainsi les points ayant pour affixes les différentes valeurs de $\nu(Z)$ sont contenus dans un même demi-plan Π limité par l'axe réel.

Inversement, supposons que les valeurs de $\nu(Z)$ soient toutes à l'intérieur d'un domaine $(\mathcal{D})$ contenu, avec sa frontière, à l'intérieur de Π. Je dis que les valeurs correspondantes de Z restent bornées. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une suite infinie de valeurs de Z : $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$, dont les modules augmentent indéfiniment et telles que les points correspondants d'affixes $\nu(Z_n)$, contenus dans $(\mathcal{D})$, aient un point limite ν_0 situé à

l'intérieur ou sur la frontière de $(\mathcal{D})$: ν_0 serait donc un nombre imaginaire.

Cherchons les valeurs de Z qui peuvent donner à $\nu(Z)$ la valeur ν_0; le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des périodes de l'intégrale elliptique doit être égal à ν_0. La transformation

$$t = 4p + \frac{1+Z}{3}$$

remplace cette intégrale par l'intégrale

$$\int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}},$$

dont les périodes sont les mêmes. Inversement, si l'intégrale précédente a des périodes dont le rapport est ν_0, la transformation

$$t = \frac{p - e_1}{e_2 - e_1}$$

nous ramène à l'ancienne intégrale et l'on a

$$Z = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}.$$

Donnons-nous deux nombres dont le rapport soit ν_0, 1 et ν_0 par exemple, la fonction $p(u \mid 1, \nu_0)$ a les demi-périodes 1 et ν_0. Si l'on remplace ces demi-périodes par ω et $\nu_0\omega$, ω étant un nombre quelconque non nul, la fonction correspondante n'est autre que $\frac{1}{\omega^2}\, p\left(\frac{u}{\omega} \middle| 1, \nu_0\right)$; les racines e_1, e_2, e_3 deviennent $\frac{e_1}{\omega^2}$, $\frac{e_2}{\omega^2}$, $\frac{e_3}{\omega^2}$ et Z ne change pas. Donc, les valeurs cherchées de Z sont données par les six valeurs que prend le rapport $\frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}$ quand on permute les trois racines. Toutes ces valeurs sont finies, puisque ν_0 étant imaginaire, les racines sont distinctes (t. II, n° 335).

Si l'on donne à ν des valeurs voisines de ν_0, les nombres g_2, g_3 varient d'une manière continue; il en est de même de e_1, e_2, e_3, et par suite, de Z. Donc, si ν est voisin de ν_0, les valeurs de Z sont

finies. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse que, pour les nombres $\nu(Z_n)$ qui tendent vers ν_0, Z_n croît indéfiniment [1].

Considérons maintenant les fonctions $f_n(z)$, et soit z_0 un point intérieur à (D). Les nombres $f_n(z_0)$ ont un ensemble de valeurs limites : supposons d'abord qu'il existe une de ces valeurs limites α distincte de 0, 1, ∞ et appelons encore $f_n(z)$ la suite telle que $\lim f_n(z_0) = \alpha$.

Donnons à $\omega(Z)$ et $\omega'(Z)$ des déterminations précises pour $Z = \alpha$ et son voisinage, et posons $\nu[f_n(z)] = \varphi_n(z)$, $\varphi_n(z_0)$ ayant la détermination choisie et les autres valeurs s'obtenant par continuité. Puisque les valeurs de φ_n sont contenues dans Π, le module de $\varphi_n - Z_0$, Z_0 étant un point extérieur à Π, reste supérieur à un nombre fixe. La famille des $\varphi_n(z)$ est normale et l'on peut en extraire une suite

$$\varphi_{n'_1}(z), \quad \varphi_{n'_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n'}(z), \quad \ldots$$

convergeant uniformément dans (D) vers une fonction limite $\varphi(z)$; dans un domaine (D′), intérieur à (D), ces fonctions convergent uniformément même sur le contour; dans (D′), $\varphi(z)$ ne prend aucune valeur réelle puisque les $\varphi_{n'_q}(z)$ ne prennent aucune valeur réelle et que $\varphi(z)$ n'est pas une constante réelle : en effet, $\varphi(z_0)$ est imaginaire, puisque α est différent de 0, 1, ∞. Les valeurs de $\nu[f_{n'_q}(z)] = \varphi_{n'_q}(z)$ sont donc comprises dans un domaine $(\mathcal{D})$ intérieur à Π. Il en résulte que les valeurs de $f_{n_q}(z)$ sont bornées : on peut donc extraire, de cette suite, une suite $f_{n_q}(z)$ convergeant uniformément dans (D′). Je dis que cette suite converge uniformément autour de tout point z_1 intérieur à (D). En effet, soient z_1 un point quelconque extérieur à (D′) et intérieur à (D), et (D″) un domaine intérieur à (D) contenant z_1 et (D′). Soient β une valeur limite des $f_{n_q}(z_1)$, et $f_{n'_q}$ une suite extraite des f_{n_q} et convergeant vers β au point z_1. D'après ce qui précède, on peut en extraire une suite $f_{n''_q}$ convergeant uniformément dans (D″) vers une fonction holomorphe qui coïncide nécessairement avec $f(z)$ dans (D′) : donc $f(z)$ est holomorphe dans (D″) et $\beta = f(z_1)$; la suite $f_{n_q}(z_1$

[1] On démontrerait de la même manière que Z ne peut s'approcher indéfiniment, ni de zéro, ni de un.

n'a qu'une seule valeur limite β : elle est convergente. La convergence est uniforme dans D″ : en effet, dans le cas contraire, il existerait un nombre ε et une infinité de valeurs n'''_q telles que l'inégalité $|f(z) - f_{n'''_q}(z)| > \varepsilon$ ait lieu en un point au moins de (D″) pour chaque valeur de n'''_q : mais cela est impossible, puisque l'on peut extraire de la suite $f_{n'''_q}(z)$ une suite convergeant uniformément vers $f(z)$.

Nous avons supposé que α était différent de 0, 1, ∞. Si $\alpha = 1$, nous prendrons la suite $\sqrt{f_n(z)}$ en choisissant pour z_0 la détermination du radical de manière que $\sqrt{f_n(z_0)}$ ait pour limite -1. Les fonctions $\varphi_n(z) = \sqrt{f_n(z)}$ sont uniformes et holomorphes dans (D) où elles ne prennent ni la valeur 0 ni la valeur 1 ; donc la suite φ_n est normale, et la suite $f_n = \varphi_n^2$ est aussi normale. Si $\alpha = 0$, on prendra $\varphi_n = 1 - f_n$, la suite φ_n est normale, donc aussi la suite f_n; si $\alpha = \infty$, on prendra $\varphi_n = \frac{1}{f_n}$ [1]. La proposition est établie dans tous les cas.

6. **Représentation conforme d'un domaine quelconque.** — Considérons maintenant un domaine (D) simplement connexe quelconque *dont la frontière ne se réduit pas à un point;* cette frontière ne se réduit pas non plus à un nombre fini de points, sinon le domaine ne serait pas simplement connexe. Ce domaine pourra ne pas laisser de points extérieurs; il pourra, par exemple, comprendre tous les points du plan des Z non situés sur une coupure non fermée qui servira de frontière. La transformation $Z' = \frac{1}{Z - a}$, déjà utilisée au n° 4, permet, en supposant que a est un point frontière, de remplacer ce point par le point à l'infini du plan. Il est donc permis de supposer que le point à l'infini n'est pas intérieur au domaine : soient α et β les affixes de deux points frontières à distance finie. On peut maintenant reprendre les raisonnements du n° 4, et former les domaines emboîtés (D_n) [2].

---

[1] Le principe de la démonstration précédente est dû à M. de la Vallée Poussin [*Démonstration simplifiée du théorème fondamental sur les familles normales de fonctions* (*Annals of Mathematics*, 2ᵉ série, vol. 17, n° 1, 1915)].

[2] Si le domaine s'étend à l'infini, on ne prendra, pour former (D_n), que les carrés intérieurs à un cercle de centre origine et de rayon n.

Les fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes dans (d) et $f_n(0) = 0$. Elles ne prennent dans (d) ni la valeur α ni la valeur β; elles forment donc une famille normale et la démonstration se poursuit sans modifications.

En résumé, *tout domaine simplement connexe dont la frontière ne se réduit pas à un point peut être appliqué sur un cercle.*

7. **Correspondance entre les points des contours.** — Nous désignerons par (C) la frontière du domaine (D) dont on fait la représentation conforme sur le cercle (d) de rayon *un*, limité par la circonférence (c). Nous supposons que la représentation fait correspondre à un point O de (D) le centre o de (d) et que, à une direction donnée partant de O, corresponde une direction donnée partant de o. Soit $Z = f(z)$ la fonction qui fait cette représentation; $f(z)$ est holomorphe dans (d) et ne prend pas deux fois la même valeur à l'intérieur de ce cercle. La fonction inverse $z = F(Z)$ est holomorphe dans l'intérieur de (D) et ne prend pas deux fois la même valeur.

Soit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ une suite infinie de points ayant pour limite un point Z_0 de (C). Tout point limite de la suite $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ des points correspondants est situé sur (c); car, si un point limite z'_0 était intérieur à (d), il lui correspondrait un point Z'_0 intérieur à (D) et ce point devrait être un point limite des Z_n. Inversement, si une suite infinie $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ a pour limite un point z_0 de (c), les points limites de la suite correspondante $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ sont tous sur (C).

Soient maintenant Z_0 un point *accessible* de (C) et L une courbe simple sans point double aboutissant en Z_0 et dont tous les points, sauf Z_0, sont intérieurs à (D). Lorsque Z décrit (L), le point z décrit une courbe (l). A toute suite infinie de points $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n. \ldots$ situés sur (L) et ayant pour limite Z_0, correspond une suite infinie de points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ situés sur (l) et dont les points limites sont situés sur (c). Je dis que les suites z_n ont un seul point limite z_0. Admettons, en effet, que l'on puisse obtenir deux points limites z_0 et z'_0 sur (c) et correspondant respectivement aux suites $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ et $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_n, \ldots$. On peut toujours supposer, en supprimant des points si cela est néces-

saire, que, lorsqu'on se déplace sur (L) en allant vers Z_0, les points Z et Z' sont rencontrés dans l'ordre

$$Z_1,\ Z'_1,\ Z_2,\ Z'_2,\ Z_3,\ Z'_3,\ \ldots,\ Z_n,\ Z'_n,\ \ldots,$$

et que l'on a, pour toute valeur de n,

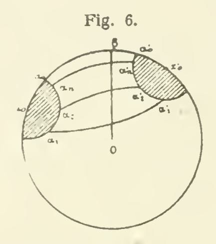
$$|z_n - z_0| < \varepsilon, \qquad |z'_n - z'_0| < \varepsilon,$$

ε étant arbitrairement petit, et

$$z_n = F(Z_n), \qquad z'_n = F(Z'_n).$$

Marquons sur le cercle (c) les points z_0 et z'_0 et traçons les arcs de cercles (γ) et (γ') intérieurs à (d), de centres z_0 et z'_0 et de rayon ε : ces arcs ne se coupent pas si ε est assez petit. Quand Z décrit l'arc $Z_1 Z'_1$, z décrit un arc de (l) qui va d'un point du segment hachuré voisin de z_0 à un point du segment hachuré voisin de z'_0; il y a donc un arc $\alpha_1 \alpha'_1$ de la courbe (l) qui joint un point α_1 de (γ) à un point (α'_1) de (γ') et qui est extérieur à ces segments. De même, l'arc $Z_2 Z'_2$ nous donne un

Fig. 6.



arc $\alpha_2 \alpha'_2$, ...; l'arc $Z_n Z'_n$ nous donne un arc $\alpha_n \alpha'_n$, ... Deux arcs $\alpha_p \alpha'_p$ et $\alpha_q \alpha'_q$ ne se coupent pas, puisque la courbe (L) ne se coupe pas elle-même. Les points α_n ont donc pour limite un point α_0 de (γ) situé sur (c) puisque $f(\alpha_n)$ a pour limite Z_0 comme Z_n et Z'_n. De même les points α'_n ont pour limite α'_0 sur (γ') et (c).

Toute suite infinie de points $z''_1, z''_2, \ldots, z''_n, \ldots$, telle que z''_n soit sur $\alpha_n \alpha'_n$, a pour limite un point de l'arc de cercle $\alpha_0 \alpha'_0$ car le point Z''_n est situé sur l'arc $Z_n Z'_n$ de la courbe (L) et a pour limite Z_0.

Réciproquement, tout point β de $\alpha_0\alpha'_0$ est un point limite ainsi obtenu; menons en effet le rayon $o\beta$; ce rayon rencontre l'arc $\alpha_n\alpha'_n$ en un point z''_n et les points z''_n ont pour limite β. Il résulte de ce qui précède que les arcs $\alpha_n\alpha'_n$ ont pour limite $\alpha_0\alpha'_0$; en d'autres termes, traçons le cercle de centre o et de rayon $1-\delta$, δ étant arbitrairement petit, qui coupe (γ) en un point α voisin de α_0 et (γ') en un point α' voisin de α'_0. Si n est assez grand, $\alpha_n\alpha'_n$ est tout entier dans le quadrilatère curviligne $\alpha\alpha_0\alpha'_0\alpha'$, car, s'il en était autrement, il existerait une infinité de valeurs de n

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_p, \quad \ldots,$$

telles que l'arc $\alpha_{n_p}\alpha'_{n_p}$ ait un point z''_{n_p} extérieur au quadrilatère; la suite z''_{n_p} aurait ses points limites situés hors de $\alpha_0\alpha'_0$, ce qui est impossible. Il est donc établi que les arcs $\alpha_n\alpha'_n$ convergent uniformément vers $\alpha_0\alpha'_0$. D'autre part, les valeurs de $f(z)$ sur ces arcs convergent uniformément vers la constante Z_0. Nous allons montrer qu'il en est de même si z est situé entre ces arcs, c'est-à-dire que l'on peut prendre n_0 assez grand pour que $|f(z)-Z_0|$ soit inférieur au nombre arbitrairement petit $2\sqrt{\eta}$ pour tout point z intérieur au quadrilatère curviligne $\alpha_0\alpha_{n_0}\alpha'_{n_0}\alpha'_0$.

Pour l'établir nous nous servirons d'un procédé de démonstration dû à Lebesgue. Nous pouvons toujours supposer que n_0 est assez grand pour que, sur la portion de (l) qui commence au point α_{n_0}, on ait $|f(z)-Z_0|<\eta<1$. Prenons $n \geqq n_0$ et soit (d_n) le domaine limité par l'arc de (l) qui va de α_n à α_{n+1} [composé des arcs $\alpha_n\alpha'_n$, $\alpha'_{n+1}\alpha_{n+1}$ et de l'arc $\alpha'_n\alpha'_{n+1}$ intérieur au segment hachuré limité par (c) et (γ')] et par l'arc $\alpha_n\alpha_{n+1}$ du cercle (γ). Traçons deux cercles de centre z_0, le premier (γ_1) de rayon ρ inférieur à ε, le second (Γ) de rayon R supérieur à 2 et soit α''_n le premier point de rencontre de $\alpha'_n\alpha_n$ avec la circonférence (γ_1) et α''_{n+1} le premier point de rencontre de $\alpha'_{n+1}\alpha_{n+1}$ avec cette circonférence ([1]). Sur l'arc (l_n) de (l) qui va de α''_n à α''_{n+1} on a $|f(z)-Z_0|<\eta$ et, sur l'arc $\alpha''_n\alpha''_{n+1}$ du cercle (γ_1), on a $|f(z)-Z_0|<M$, M désignant une limite supérieure de $|Z-Z_0|$ dans (D). La fonction $V=\log|f(z)-Z_0|$ est harmonique et régulière dans (d)

([1]) Ces points existent si n_0 est assez grand.

puisque $f(z)$ ne prend jamais la valeur Z_0 et l'on a

$$V < \log \eta \quad \text{sur } (l_n),$$
$$V < \log M \quad \text{sur l'arc } \alpha''_n \alpha''_{n+2} \text{ de } (\gamma_1).$$

La fonction

$$U = \log \eta \frac{\log \frac{r}{\rho}}{\log \frac{R}{\rho}} + \log M \frac{\log \frac{R}{r}}{\log \frac{R}{\rho}},$$

dans laquelle r désigne la distance à z_0 d'un point de la couronne limitée par les cercles (γ_1) et R, est harmonique et régulière dans cette couronne. Sur (γ_1), on a $r = \rho$ et $U - \log M$; sur (Γ), on a $r = R$ et $U = \log \eta$. La différence $U - V$ est harmonique et régulière dans le domaine limité par (l) et l'arc $\alpha''_n \alpha''_{n+1}$ de (γ_1). Sur l_n, $U - V$ est positif puisque, dans la couronne, V est compris entre $\log M$ et $\log \eta$ $(\eta < M)$ et que, sur (l_n), $V < \log \eta$; sur l'arc $\alpha''_n \alpha''_{n+1}$ on a $U = \log M$ et $V < \log M$, et $U - V$ est positif; donc $U - V$ est positif en tout point de (d_n) et $V < U$. Or, le premier terme de U est inférieur à $\frac{1}{2} \log \eta$, si $\rho < \frac{\varepsilon^2}{R}$; on peut prendre ρ assez petit pour que le second terme, qui est inférieur à $\log M \frac{\log \frac{R}{\varepsilon}}{\log \frac{R}{\rho}}$, soit inférieur à $\log 2$. On aura alors, en tout point de (d_n) et par suite, entre $\alpha_n \alpha'_n$ et $\alpha_{n+1} \alpha'_{n+1}$,

$$V < U < \log 2 \sqrt{\eta},$$

d'où

$$|f(z) - Z_0| < 2 \sqrt{\eta}.$$

Ce résultat étant indépendant de n, on voit que l'inégalité précédente a lieu en tout point intérieur au quadrilatère curviligne $\alpha_0 \alpha_{n_0} \alpha'_{n_0} \alpha'_0$.

La fonction $f(z)$ prend donc la valeur Z_0 quand z tend vers un point quelconque de l'arc de cercle $\alpha_0 \alpha'_0$; on en déduit, par le raisonnement de la fin de la page 672, que $f(z)$ se réduit à la constante Z_0. Or, cela est impossible puisque $f(z)$ fait l'application de (D) sur (d); donc z_0 et z'_0 ne sont pas distincts.

Réciproquement, soit z_0 un point de (c) tel que $f(z)$ ait pour limite unique le nombre Z_0 sur une courbe simple intérieure à (d) et aboutissant en z_0. Le point Z_0 est un point accessible de (C).

car à la courbe (l) correspond une courbe (L) aboutissant au seul point Z_0, dont tous les points, sauf Z_0, sont intérieurs à (D).

Le point z_0 que nous avons fait correspondre à Z_0 à l'aide du chemin (L) est-il déterminé d'une manière unique? Autrement dit, si nous remplaçons (L) par un autre chemin (L'), la limite de z sera-t-elle le même point z_0 de (c)? Supposons que les lignes (l) et (l') aboutissent à deux points distincts de (c), z_0 et z'_0; alors, lorsqu'on suit la ligne (l) en allant vers z_0, il y a un dernier point de rencontre a avec (l'), car, dans le cas contraire, il y aurait sur (l') une infinité de points ayant z_0 pour limite; z_0 serait sur (l') et se confondrait avec z'_0. Soit A le point correspondant, c'est le dernier point de rencontre de (L) et de (L'). Si (l) et (l') ne se rencontraient pas, on les joindrait à un point quelconque a de (d).

La portion (Δ) du domaine (D) limitée par les courbes (L) et (L') est représentée d'une manière conforme, par la relation $z = F(Z)$, sur la portion (δ) de (d) limitée par (l), (l') et l'arc (λ) d'extrémités z_0 et z'_0. Supposons que (Δ) ne contienne à son intérieur aucun point de (C); dans ce cas, lorsque z tend vers un point de (λ), Z tend nécessairement vers Z_0. On en déduirait encore que $f(z)$ est une constante, ce qui est impossible: donc z_0 et z'_0 coïncident.

L'hypothèse que nous venons de faire sur (C) est réalisée, en particulier, pour tous les points d'une courbe simple de Jordan. Il n'y a que deux arcs de cette courbe partant d'un de ses points, et deux chemins intérieurs aboutissant à un même point de la courbe ne peuvent enfermer aucun arc de cette courbe.

Soient maintenant Z_0 et Z'_0 deux points accessibles distincts de (C); je dis qu'ils correspondent à deux points différents de (c). Supposons en effet qu'ils correspondent à un même point z_0 et soient (L) et (L') deux lignes brisées partant de O et aboutissant à Z_0 et à Z'_0; ces lignes ont un dernier point commun A puisque Z_0 et Z'_0 sont distincts. Il leur correspond deux lignes (l) et (l') formées d'arcs analytiques partant de (a) et aboutissant toutes deux au point z_0; la portion (Δ) du domaine (D) limitée par (L), (L') est représentée d'une manière conforme sur le domaine (δ) limité par (l) et (l'). Sur (l), $f(z)$ a pour limite Z_0; sur (l'), $f(z)$ a

pour limite Z'_0 et dans (δ), $f(z)$ est bornée, car on peut toujours supposer que le domaine (Δ) est borné. Cela est impossible, car, d'après le n° 3, sur toute ligne intérieure à (δ) et aboutissant à z_0, $f(z)$ devrait avoir pour limite à la fois Z_0 et Z'_0. En résumé :

A tout point accessible de la frontière (C) *de* (D) *correspond un point unique de la circonférence* (*c*). *A deux points accessibles distincts correspondent deux points différents de* (*c*).

Considérons maintenant, au lieu de la courbe (L) qui aboutit au point accessible Z_0 de (C), une suite infinie $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p, \ldots$ de points de (D) ayant le seul point limite Z_0. Je dis que les points correspondants $z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots$ ont pour limite z_0. Soit (L) une ligne simple joignant O à Z_0 à l'aide de points intérieurs à (D). Traçons le cercle de centre Z_0 et de rayon $\frac{1}{n}$; soit A_n le dernier point de rencontre de (L) et de la circonférence, lorsqu'on se déplace de O vers z_0. Le point A_n, intérieur à (D), appartient à un arc $B_n A_n B'_n$ de la circonférence, arc dont les points intérieurs sont intérieurs à (D) et les extrémités $B_n B'_n$ appartiennent à (C). Les points B_n et B'_n sont accessibles évidemment, et il leur correspond des points distincts b_n et b'_n de (c); à l'arc de cercle $B_n A_n B'_n$ correspond un arc de courbe (λ_n) dont les points intérieurs sont intérieurs à (d). La coupure (λ_n) partage le domaine (d) en deux domaines (d_1) et (d_2); le premier contient o et le second contient z_0, car la ligne (l), à partir du point a_n, reste toujours à l'intérieur de (d_2); d'autre part, z_0 est distinct de b_n et b'_n puisque Z_0 est distinct de B_n et B'_n; enfin, à (d_1) et (d_2), correspondent (D_1) et (D_2). La coupure (λ_{n+1}) ne peut couper (λ_n), puisque les arcs de cercles correspondants ne se coupent pas ; elle partage le cercle en deux segments dont l'un contient o et l'autre z_0; par conséquent, (λ_{n+1}) est tout entière dans (d_2) et elle est entourée par (λ_n). Donc, chaque coupure (λ_n) entoure toutes les suivantes. Quand n croît indéfiniment, (λ_n) a pour limite le point z_0 ou un arc (λ_0) de la circonférence (c), car tous les points de (λ_n) ont pour limite un point de (c) puisque les points Z correspondants tendent vers Z_0. On a, sur (λ_n),

$$|f(z) - Z_0| < \frac{1}{n};$$

donc, $f(z)$ aurait pour limite Z_0, uniformément, quand les coupures s'approcheraient de (λ_0), ce qui est impossible puisque $f(z)$ n'est pas constant. Donc, la coupure (λ_n) a pour limite le point unique z_0.

Soit alors la suite $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p, \ldots$ admettant l'unique point limite Z_0. Pour chaque valeur de n, ces points, sauf un nombre fini d'entre eux, sont contenus dans (D_2); donc les points $z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots$ sont contenus dans (d_2), sauf un nombre fini d'entre eux, et, comme (d_2) se réduit à la limite à z_0, il en résulte que la suite z_p a pour limite z_0.

Voici une conséquence immédiate de la proposition précédente : supposons que les points accessibles $Z'_0, Z''_0, \ldots, Z^{(n)}_0, \ldots$ aient pour limite le point accessible Z_0; je dis que les points correspondants z_0. $z''_0, \ldots, z^{(n)}_0, \ldots$ ont pour limite le point z_0 correspondant à Z_0. Soit, en effet, ζ_0 un point limite de l'ensemble des points $z^{(n)}_0$. D'après ce qui précède, on peut choisir Z_n tel que ce point soit à une distance de $Z^{(n)}_0$ inférieure à $\frac{1}{n}$ et que le point correspondant z_n soit à une distance de $z^{(n)}_0$ inférieure aussi à $\frac{1}{n}$. Les points Z_n ont pour limite Z_0 et les points z_n ont pour limite ζ_0. D'après la proposition précédente, ζ_0 coïncide avec z_0. Comme ce raisonnement s'applique à tout point limite des $z^{(n)}_0$, la suite infinie de ces points a l'unique limite z_0. Ainsi, sur l'ensemble des points accessibles, z_0 est une fonction continue de Z_0.

Supposons que la courbe (C) soit une courbe fermée simple de Jordan. Tous les points Z_0 de cette courbe sont accessibles et, lorsque Z_0 décrit (C), z_0 est une fonction continue de Z_0. On peut représenter les affixes Z_0 de (C) par la formule $Z_0 = \varphi(\theta)$, θ étant un nombre réel qui varie de 0 à 2π; on a $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$, et les valeurs de $\varphi(\theta)$, pour deux valeurs quelconques de θ intérieures à l'intervalle $(0, 2\pi)$, sont distinctes. La fonction $\varphi(\theta)$ est une fonction continue de son argument. Le nombre z_0 est une fonction continue de Z_0, donc de θ et par suite, puisque $|z_0| = 1$, l'argument ψ de z_0 est une fonction continue de θ, $\psi(\theta)$. Cette fonction varie toujours dans le même sens de $\psi_1 = \psi(0)$ à $\psi_2 = \psi(2\pi)$; en effet, dans le cas contraire ψ prendrait la même valeur pour deux valeurs distinctes θ et θ'' et un même point z_0 correspondrait à deux points Z'_0 et Z''_0 de (C). Pour la même raison,

l'arc $\psi_1\psi_2$ n'est pas supérieur à une circonférence. Il n'est pas non plus inférieur à une circonférence, car il y aurait alors un arc de (c) qui ne serait pas parcouru par z_0. Or, lorsque z s'approche d'un point de cet arc, Z admet au moins un point limite Z_0 sur (C) et ce point, étant accessible, correspond à un point unique z_0 de (c) tel que si Z est voisin de Z_0, z est voisin de z_0. Donc, l'arc $\psi_1\psi_2$ couvre toute la circonférence (c); $|\psi_2 - \psi_1| = 2\pi$. Par suite, Z est, inversement, une fonction continue de z. Ainsi : *Lorsqu'un domaine* (D) *est limité par une courbe simple de Jordan, on peut faire la représentation conforme de ce domaine sur un cercle* (d) *de manière qu'à un élément de contact intérieur à* (D) *corresponde un élément de contact intérieur à* (d). *Les contours des deux domaines se correspondent alors d'une manière univoque et continue* (¹).

Soit $Z = f(z)$ une fonction faisant la représentation conforme du cercle (d) sur un domaine (D) limité par une courbe de Jordan. M. Féjer (²) a montré que la série de Taylor qui représente $f(z)$ dans (d) converge uniformément sur la circonférence (c); si, lorsque z est sur (c), on sépare dans cette série, la partie réelle et la partie imaginaire, on a

$$Z = f(z) = g_1(\psi) + i\, g_2(\psi),$$

g_1 et g_2 étant des séries trigonométriques uniformément convergentes. Donc, la courbe de Jordan

$$X = G_1(\theta), \qquad Y = G_2(\theta)$$

peut être représentée par les équations

$$X = g_1(\psi), \qquad Y = g_2(\psi)$$

déduites des précédentes par la transformation $\psi = \psi(\theta)$ et les fonctions g_1 et g_2 sont développables en série de Fourier.

Par conséquent : *on peut, par un changement de paramètre, remplacer les expressions des coordonnées des points d'une*

(¹) Ce résultat a été obtenu par M. Carathéodory [*Ueber die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis* (*Math. Annalen*, t. LXXIII, 1913, p. 305)].

(²) Féjer, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 156, 1913, p. 46.

courbe fermée simple de Jordan par des fonctions développables en série de Fourier.

8. Application au problème de Dirichlet. — On a vu (t. III, n° 517) les liens étroits qui unissent le problème de la représentation conforme à celui de Dirichlet. On saura résoudre ce dernier problème pour tout domaine applicable sur un cercle lorsque les contours se correspondent d'une manière univoque et continue. Il résulte de ce qui précède que l'*on peut résoudre le problème de Dirichlet pour tout domaine simplement connexe limité par une courbe de Jordan.*

9. Application à l'étude des points singuliers d'une fonction analytique. — La représentation conforme permet de remplacer le domaine voisin d'un point singulier par un domaine plus simple. On peut aussi, en morcelant ce domaine en un nombre fini ou non de parties, remplacer l'étude de la fonction dans le voisinage du point singulier par l'étude d'une famille de fonctions. Nous allons appliquer cette méthode au cas d'un point singulier essentiel isolé.

Considérons d'abord une fonction entière $f(z)$; la seule singularité de cette fonction est le point à l'infini qui est un point singulier essentiel. Décrivons, autour de l'origine $z = 0$, des cercles concentriques (C_1), (C_2), ..., (C_n), ... de rayons $2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots$. Nous pouvons faire la représentation conforme de chaque cercle (C_n) sur le cercle (C_1) au moyen de la fonction $z' = \frac{z}{2^{n-1}}$. Les fonctions $f_n(z) = f(2^{n-1} z)$ prennent dans le cercle (C_1) les mêmes valeurs que la fonction $f(z)$ dans les cercles (C_n).

La famille des fonctions $f_n(z)$ n'est pas normale dans le cercle (C_1). En effet, si elle l'était, on pourrait en extraire une suite infinie

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots$$

convergeant uniformément dans le cercle (C_0) de rayon *un* vers une fonction holomorphe, finie puisque $f_n(0) = f(0)$ quel que soit n. On aurait donc, quel que soit p, $|f_{n_p}(z)| < M$; or la fonction f_{n_p} prend dans le cercle (C_0) les mêmes valeurs que la fonction f dans le cercle (C_{n_p-1}) et le rayon de ce cercle croît indéfini-

ment avec p : on aurait donc $|f(z)| < M$ dans tout le plan, ce qui est impossible.

Le théorème de M. Picard résulte de là. La fonction $f(z)$ prend dans le plan toutes les valeurs sauf *une* au plus. Car, s'il y avait deux valeurs exceptionnelles, la famille $f_n(z)$ serait normale.

On peut apporter à cette démonstration un complément important dû à M. Julia. Menons un diamètre de (C_0); dans l'un au moins (C'_0) des demi-cercles obtenus, la famille $f_n(z)$ n'est pas normale. Partageons (C'_0) en deux quarts de cercle par un rayon; dans l'un au moins (C''_0) des secteurs obtenus, la famille n'est pas normale. On peut continuer, en bissectant continuellement chaque secteur par un rayon. On voit que tous les secteurs (C'_0), (C''_0), ... ont pour limite un rayon OA du cercle (C_0). Dans tout secteur de ce cercle bissecté par OA, la famille n'est pas normale, donc les fonctions $f_n(z)$ prennent toutes les valeurs, sauf une au plus, dans tout secteur BOB′ d'ouverture arbitrairement petite bissecté par OA. Prolongeons OA, OB, OB′, indéfiniment suivant Ou, Ov, Ov'. La fonction $f(z)$ prend dans l'angle vOv', les mêmes valeurs que les $f_n(z)$ dans le secteur BOB′. Donc : *dans tout angle, si petit soit-il, bissecté par* Ou, *la fonction* $f(z)$ *prend toutes les valeurs sauf une au plus.* On peut remplacer la droite Ou par une courbe.

Considérons maintenant une fonction $F(z)$ admettant un point singulier essentiel isolé z_0 que nous pouvons supposer à l'infini en faisant, au besoin, le changement de variable de z en $\frac{1}{z - z_0}$. La fonction $F(z)$ est méromorphe à l'extérieur d'un cercle (C_0) dont nous prendrons le rayon pour unité. Je vais montrer que $F(z)$ prend toutes les valeurs, sauf deux au plus, à l'extérieur de (C_0). Comme (C_0) est arbitrairement grand, il en résulte immédiatement que $F(z)$ prend une infinité de fois toutes les valeurs, sauf *deux* au plus, dans le voisinage du point singulier. C'est le théorème général de M. Picard.

Supposons que $F(z)$ ne prenne jamais aucune des trois valeurs distinctes a, b, c, à l'extérieur de (C_0). La transformation homographique

$$f(z) = \frac{F(z) - a}{F(z) - c} : \frac{b - a}{b - c}$$

conduit à une fonction $f(z)$ qui ne prend jamais les valeurs o, 1, ∞, $f(z)$ est holomorphe à l'extérieur de (C_0) et ne prend ni la valeur o, ni la valeur 1.

Traçons les cercles (C_n) et appelons (D_n) l'anneau circulaire compris entre (C_n) et (C_{n+1}). La transformation $z' = \frac{z}{2^n}$, déjà utilisée, fait la représentation conforme de (D_n) sur (D_0). La fonction $f_n(z) = f(2^n z)$ prend dans (D_0) les mêmes valeurs que $f(z)$ dans (D_n). Les $f_n(z)$, ne prenant ni la valeur o ni la valeur 1 dans (D_0), forment une famille normale. On peut en extraire une suite $f_{n_p}(z)$ convergeant uniformément vers une fonction holomorphe ou vers la constante infinie, dans toute couronne intérieure à (D_0), en particulier sur le cercle (Γ_0), concentrique à (C_0) et de rayon $\frac{3}{2}$. Si la limite est finie, les $f_n(z)$ sont bornées en module sur (L_0) et, par suite, sur les cercles correspondants (L_n), de rayons $3 \times 2^{n-1}$, la fonction $|f(z)|$ est inférieure à un nombre fixe M. Il en résulte aussitôt que $|f(z)| < M$ entre les cercles (Γ_n) et, par suite, partout à l'extérieur de (Γ_0). La fonction $f(z)$ serait donc régulière à l'infini. Si la limite est infinie, les fonctions holomorphes $\frac{1}{f_n}$ sont bornées sur (Γ_0) et le même raisonnement prouve que $\frac{1}{f}$ est régulière à l'infini : ce point est donc un point ordinaire ou un pôle de f. Dans les deux cas, l'hypothèse de l'existence de trois valeurs exceptionnelles est incompatible avec celle que le point à l'infini est essentiel. Le théorème de M. Picard est démontré.

FIN DU TOME III.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE XXIII.

INTÉGRALES INFINIMENT VOISINES.

CHAPITRE XXIV.

ÉQUATIONS DE MONGE-AMPÈRE.

CHAPITRE XXV.

ÉQUATIONS LINÉAIRES A n VARIABLES.

CHAPITRE XXVI.

ÉQUATIONS LINÉAIRES DU TYPE HYPERBOLIQUE.

CHAPITRE XXVII.

ÉQUATIONS LINÉAIRES DU TYPE ELLIPTIQUE.

CHAPITRE XXVIII.

FONCTIONS HARMONIQUES DE TROIS VARIABLES.

CHAPITRE XXIX.

ÉQUATION DE LA CHALEUR.

CHAPITRE XXX.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

CHAPITRE XXXI.

L'ÉQUATION DE FREDHOLM.

CHAPITRE XXXII.

LES FONCTIONS FONDAMENTALES.

CHAPITRE XXXIII.

APPLICATIONS DES ÉQUATIONS INTÉGRALES.

CHAPITRE XXXIV.

CALCUL DES VARIATIONS.

NOTE SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME III.

JOSEPH FLOCH
MAITRE-IMPRIMEUR
MAYENNE
Nº D'ÉDITEUR : 677 — Nº D'IMPRIMEUR : 1051
DÉPOT LÉGAL : 2e TRIMESTRE 1956

